

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Σε δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ να δείξετε ότι:
α) Οι διχοτόμοι AK και $\Delta\Lambda$ είναι ίσες. β) Οι διάμεσοι BM και $E\Theta$ είναι ίσες.
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB είναι ίσα. β) $\Delta\Delta = AE$
3. Στη βάση $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ , E , ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδειχθεί ότι $\Delta\Delta = AE$.
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Από το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$ φέρουμε κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $M\Delta = ME$ β) το τρίγωνο $\Delta\Delta E$ είναι ισοσκελές.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των AB και AG .
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο BMG είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.
β) $MK = M\Lambda$

6. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , AG ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχως τα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδειχθεί ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.

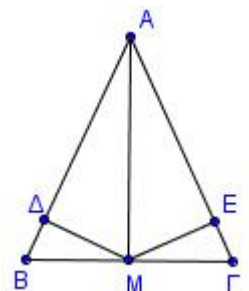
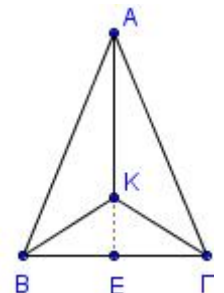
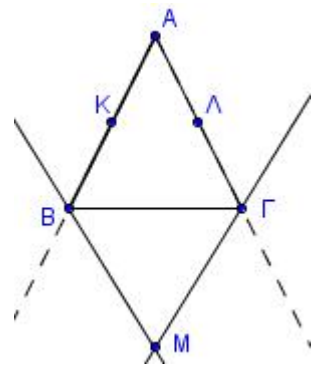
7. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$ και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
β) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAG .
γ) Η προέκταση της AK διχοτομεί τη γωνία BKG .

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και στις ίσες πλευρές AB , AG παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $\Delta\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}AG$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
β) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $ME\Gamma$ είναι ίσα. γ) το τρίγωνο $\Delta\Delta M$ είναι ισοσκελές.

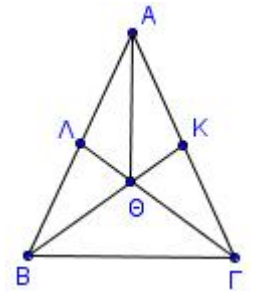
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\Delta\Delta = AE$.
Να αποδείξετε ότι:

- α) $BE = \Gamma\Delta$ β) $B\Delta = \Gamma E$ γ) $\hat{\Delta B\Gamma} = \hat{E\Gamma B}$

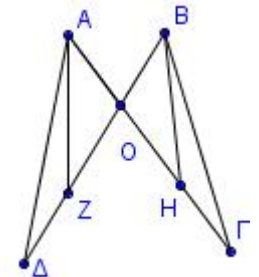
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.
β) Αν $AB = AG$ και M το μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.



11. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε τη διχοτόμο AK και παίρνουμε σ' αυτή τυχαίο σημείο M . Να δείξετε ότι $MB = M\Gamma$.

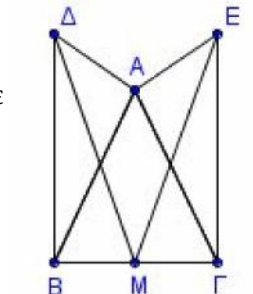


12. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$ οι οποίες τέμνονται στο Θ . Να αποδείξετε ότι:
α) Οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.
β) Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα.



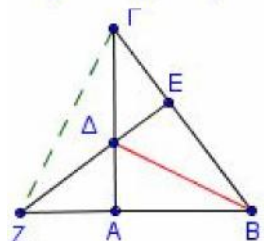
13. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ορίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

14. Δίνονται τα τμήματα $A\Gamma = B\Delta$ που τέμνονται στο σημείο O έτσι ώστε $OA = OB$ και σημεία H και Z στα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $OH = OZ$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\widehat{AO} = \widehat{BO}$.
β) $AZ = BH$



15. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν $B\Delta$, ΓE τα ύψη του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα, β) $A\Delta = AE$.



17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB (προς το A) στο Z . Να αποδείξετε ότι:
α) $BE = AB$ β) το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

18. Στις πλευρές γωνίας $\widehat{x\hat{A}y}$ παίρνουμε $AB = A\Gamma$. Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$ της γωνίας $\widehat{x\hat{A}y}$ να δείξετε ότι $KB = K\Gamma$.

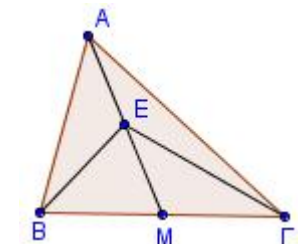
19. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε τις διχοτόμους BM και ΓN . Να δειχθεί ότι $BM = \Gamma N$.

20. Ν' αποδειχθεί ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

21. Μία ευθεία (ϵ) διέρχεται από το μέσον M ενός τμήματος AB . Ν' αποδειχθεί ότι τα σημεία A , B ισαπέχουν από την ευθεία (ϵ).

22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:

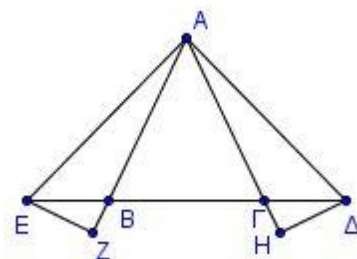
- α) $\widehat{AEB} = \widehat{EM\Gamma}$ β) $AB = E\Gamma$.



23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε DH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) A\Delta = AE$$

β) $EZ = \Delta H$

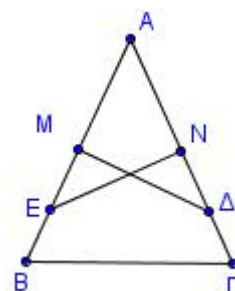


- 24.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \text{ BE} = \Gamma \Delta$$

β) $B\Delta = \Gamma E$

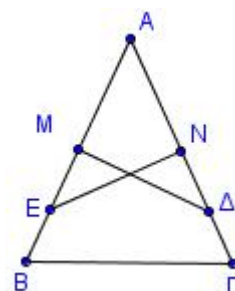
у) $\Delta \hat{B} \Gamma = E \hat{\Gamma} B$



25. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $M\Delta = NE$ τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Αν $AB = A\Gamma$ τότε $M\Delta = NE$.



- 26.** Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

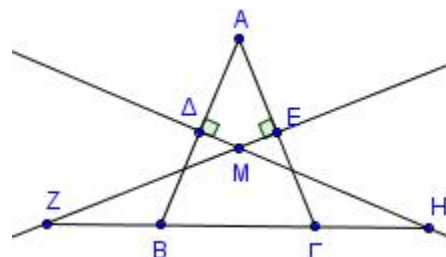
α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

27. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $ΜΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABM και $MΓΔ$ είναι ίσα.

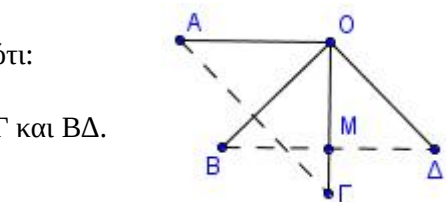
β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.



- 28.** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα Z και H .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $\Delta Z\Gamma$.

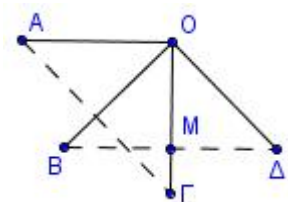
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.



29. Αν $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma = B\Delta$

β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

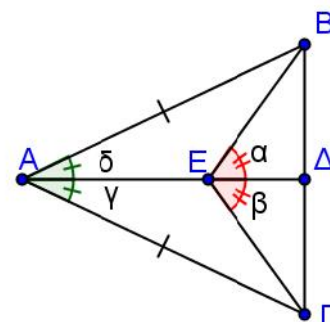


30. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

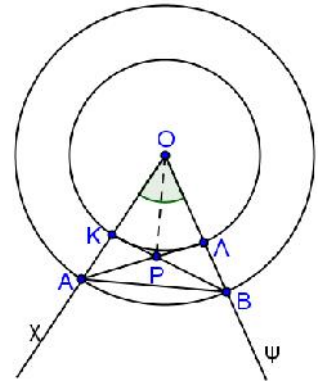
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.



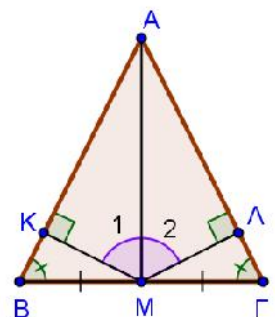
31. Δίνεται οξεία γωνία $\angle XO\Psi$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την $O\chi$ στα σημεία K, A και την $O\Psi$ στα Λ, B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- $AL = BK$
 - Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL, BK .
 - Η OP διχοτομεί τη γωνία $\angle XO\Psi$.



Στέλιος Μιχαήλογλου

ΚΑΠΟΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

4. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΚΒ$ και $ΜΛΓ$ έχουν:
- 1) $ΜΒ = ΜΓ$ γιατί το $Μ$ είναι μέσο του $ΒΓ$ και
 - 2) $\hat{Β} = \hat{Γ}$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = ML$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AKM και ALM έχουν:

- 1) την πλευρά AM κοινή και 2) $MK = ML$,

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας KML .

5. α) Επειδή οι BM και GM είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και G

$$\text{αντίστοιχα, έχουμε: } \hat{MBG} = \frac{\hat{B}_{\text{εξ}}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{G}}{2} = \frac{\hat{G}_{\text{εξ}}}{2} = \hat{MGB}.$$

Το τρίγωνο MGB έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την BG , άρα $MB = MG$.

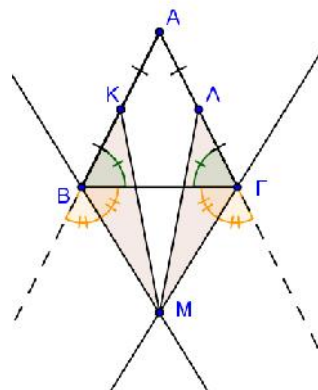
β) Τα τρίγωνα KBM και LGM έχουν:

- 1) $KB = LG$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και AG

- 2) $MB = MG$ και

- 3) $\hat{KBM} = \hat{B} + \hat{MBG} = \hat{G} + \hat{MGB} = \hat{LGM}$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = ML$



7. α) Τα τρίγωνα BAK και KAG έχουν:

- 1) την πλευρά AK κοινή

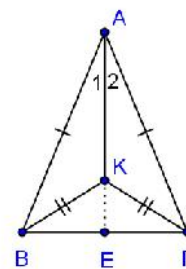
- 2) $AB = AG$ και

- 3) $KB = KG$.

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα BAK και KAG είναι ίσα, έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, άρα η AE είναι διχοτόμος της γωνίας BAG . Επειδή το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές η AE θα είναι και ύψος και διάμεσος.

γ) Η KE είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο BKG , άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας BKG .



8. α) Επειδή $AB = AG$ και $AD = AE$, οπότε και $AB - AD = AG - AE \Leftrightarrow BD = GE$

β) Τα τρίγωνα BDM και MEG έχουν:

- 1) $BD = GE$

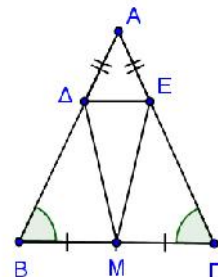
- 2) $BM = MG$ γιατί το M είναι μέσο της BG και

- 3) $\hat{B} = \hat{G}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABG .

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα BDM και MEG είναι ίσα, έχουν και $MD = ME$,

οπότε το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.



9. α) Επειδή $AB = AG$ και $AE = AD$ είναι και $AB + AE = AG + AD \Leftrightarrow BE = GD$

β) Τα τρίγωνα DBG και EBG έχουν:

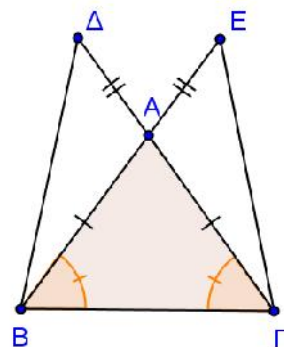
- 1) την πλευρά BG κοινή

- 2) $BE = GD$

- 3) $\hat{EBG} = \hat{GDB}$ γιατί βρίσκονται στη βάση BG του ισοσκελούς τριγώνου ABG .

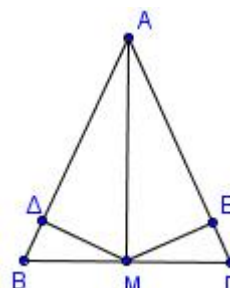
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BD = GE$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα DBG και EBG είναι ίσα, έχουν και $\hat{DBG} = \hat{GEB}$.



10. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα AMD και AME έχουν:

- 1) την πλευρά MA κοινή και 2) $MD = ME$,



δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα.

β) Αν $AB = AG$, το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΜΔΒ$ και $ΜΕΓ$ έχουν:

- 1) $\hat{B} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ και
- 2) $MB = MG$, γιατί το M είναι μέσο του $BΓ$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $MD = ME$.

12. α) Τα τρίγωνα $ΛΒΓ$ και $ΚΒΓ$ έχουν:

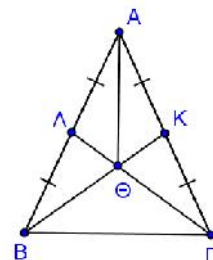
- 1) την πλευρά $BΓ$ κοινή
 - 2) $BL = GK$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και AG και
 - 3) $\hat{B} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$.
- Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BK = GL$.

β) Επειδή τα τρίγωνα $ΛΒΓ$ και $ΚΒΓ$ είναι ίσα, έχουν και $\hat{\Theta}BΓ = \hat{\Theta}ΓB$. Τότε το τρίγωνο $\Theta BΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $BΓ$ και έχει $\Theta B = \Theta Γ$.

Τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Theta Γ$ έχουν:

- 1) $AB = AG$
- 2) $\Theta B = \Theta Γ$ και
- 3) $A\Theta$ κοινή

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



14. α) Τα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΓ$ έχουν:

- 1) $OA = OB$
- 2) $OD = OG$ γιατί $AG = BL$ και $OA = OB$, άρα $AG - OA = BL - OB \Leftrightarrow OD = OG$

και

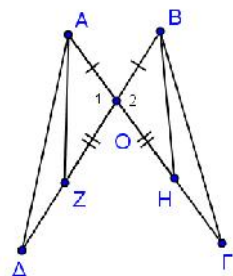
- 3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\hat{D}O = B\hat{G}O$.

β) Τα τρίγωνα $ΟΑΖ$ και $ΟΒΗ$ έχουν:

- 1) $OA = OB$
- 2) $OH = OZ$ και
- 3) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AZ = BH$.



16. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΔΜ$ και $ΓΕΜ$ έχουν:

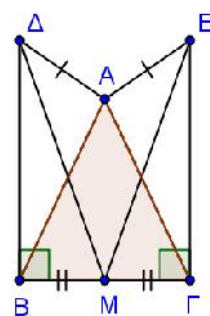
- 1) $BD = GE$ και 2) $BM = MG$ γιατί το M είναι μέσο της $BΓ$

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΕΓ$ έχουν:

- 1) $BD = GE$
- 2) $AB = AG$ και
- 3) $A\hat{B}D = \Delta\hat{B}M - \hat{B} = 90^\circ - \hat{Γ} = A\hat{Γ}E$ (οι γωνίες B και $Γ$ είναι στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ και είναι ίσες)

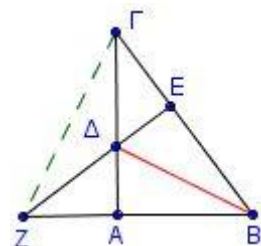
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AD = AE$.



17. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΔΕ$ έχουν:

- 1) τη πλευρά $BΔ$ κοινή και
- 2) $A\hat{B}D = \Delta\hat{B}E$ γιατί η $BΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας B .

Τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BE = AB$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και EZB έχουν:

- 1) $BE = AB$ και
- 2) τη γωνία B κοινή

Τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη και μια οξεία γωνία ίσες, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BΓ = ΓΖ$, άρα το τρίγωνο BΓΖ είναι ισοσκελές.

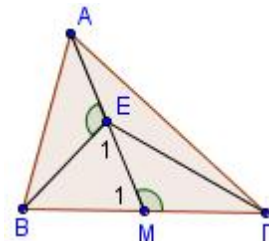
22. α) Είναι $BM = \frac{BΓ}{2} = \frac{2BE}{2} = BE$, άρα το τρίγωνο BEM είναι ισοσκελές με βάση την

ΕΜ και έχει $\hat{E}_1 = \hat{M}_1$. Όμως και $\hat{E}\hat{M}\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{M}_1$, άρα $\hat{A}\hat{E}\hat{B} = \hat{E}\hat{M}\hat{\Gamma}$.

β) Τα τρίγωνα AEB και EMΓ έχουν:

- 1) $AE = EM$ γιατί το E είναι μέσο του AM
- 2) $BE = BM = MΓ$ και
- 3) $\hat{A}\hat{E}\hat{B} = \hat{E}\hat{M}\hat{\Gamma}$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = EΓ$.



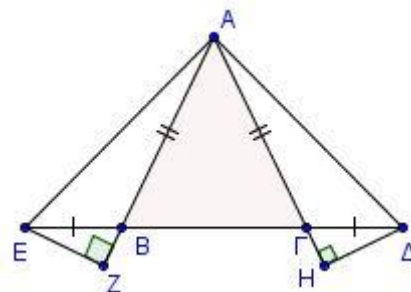
23. α) Τα τρίγωνα ABE και AΓΔ έχουν:

- 1) $AB = AΓ$
- 2) $ΓΔ = BE$ και
- 3) $\hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ παραπληρωματικές των ίσων γωνιών B και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ. Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AΔ = AE$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα EBZ και ΓΗΔ έχουν:

- 1) $ΓΔ = BE$ και
- 2) $\hat{E}\hat{B}\hat{Z} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{H}$ κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες B και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $EΖ = ΔΗ$.



24. α) Επειδή $AB = AΓ$ και $AE = AΔ$ είναι και $AB + AE = AΓ + AΔ \Leftrightarrow BE = ΓΔ$

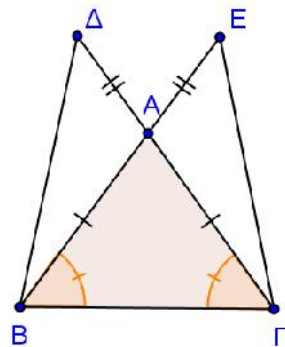
β) Τα τρίγωνα ΔBΓ και EBΓ έχουν:

- 1) την πλευρά BΓ κοινή
- 2) $BE = ΓΔ$
- 3) $\hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{B}$ γιατί βρίσκονται στη βάση BΓ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

ABΓ.

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BΔ = ΓΕ$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΔBΓ και EBΓ είναι ίσα, έχουν και $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{B}$.



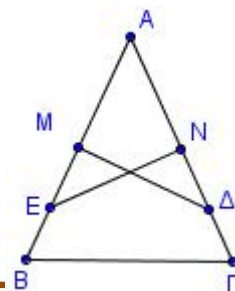
25. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα AMΔ και AEN έχουν:

- 1) $MΔ = ME$ και 2) τη γωνία A κοινή, άρα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν

$AM = AN \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{AΓ}{2} \Leftrightarrow AB = AΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AMΔ και AEN έχουν:

- 1) $AM = AN$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και AΓ και



2) τη γωνία Α κοινή, άρα έχουν την υποτεινούσα και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΜΔ = ΜΕ$.

26. α) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, τότε αν $ΑΒ = Α'Β'$,

θα είναι $ΑΓ = ΑΒ = Α'Β' = Α'Γ'$.

Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ έχουν:

1) $ΑΒ = Α'Β'$

2) $ΑΓ = Α'Γ'$ και

3) $\hat{A} = \hat{A'}$, άρα με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή με βάσεις τις $ΒΓ$ και $Β'Γ'$ έχουν τις γωνίες

της βάσης τους ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{B'}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma'}$. Όμως $\hat{B} = \hat{B'}$, άρα

$\hat{\Gamma} = \hat{B} = \hat{B'} = \hat{\Gamma'}$.

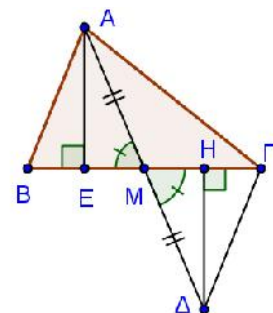
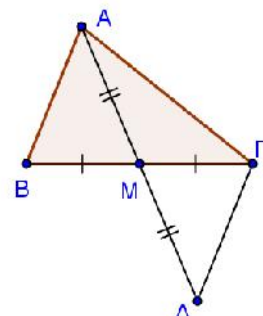
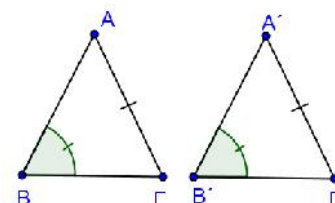
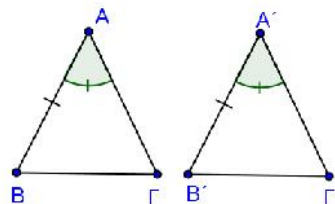
Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ έχουν:

1) $ΑΓ = Α'Γ'$

2) $ΑΒ = Α'Β'$ και

3) $\hat{A} = \hat{A'}$ γιατί $\hat{\Gamma} = \hat{B} = \hat{B'} = \hat{\Gamma'}$ (έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες των τριγώνων είναι ίσες)

Άρα με βάση το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.



27. α) Τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΜΓΔ$ έχουν:

1) $ΑΜ = ΜΔ$

2) $ΒΜ = ΜΓ$ γιατί το $Μ$ είναι μέσο της $ΒΓ$ και

3) $\hat{A} \hat{M} B = \hat{\Delta} \hat{M} \Gamma$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Έστω $ΑΕ$ και $ΔΗ$ οι αποστάσεις των $Α, Δ$ από τη $ΒΓ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΕΜ$ και $ΜΔΗ$ έχουν:

1) $ΑΜ = ΜΔ$

2) $\hat{A} \hat{M} B = \hat{\Delta} \hat{M} \Gamma$

Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου τριγώνου είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΕ = ΔΗ$.

28. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΗ$ και $ΕΖΓ$ έχουν:

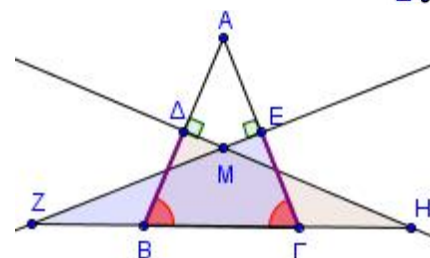
1) $ΔΒ = ΕΓ$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$

2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $ΔΒΗ$ και $ΕΓΖ$ είναι ίσα, έχουν και $\hat{Z} = \hat{H}$.

Το τρίγωνο $ΜΖΗ$ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.



29. α) Έστω ότι $\hat{A} \hat{O} B = \hat{B} \hat{O} \Gamma = \hat{\Gamma} \hat{O} \Delta = \hat{\phi}$.

Τα τρίγωνα $ΑΟΓ$ και $ΒΟΔ$ έχουν:

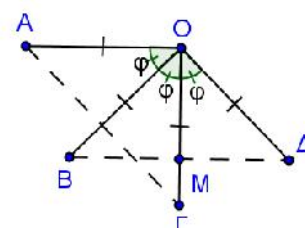
1) $ΟΑ = ΟΒ$

2) $ΟΓ = ΟΔ$ και

3) $\hat{A} \hat{O} \Gamma = \hat{B} \hat{O} \Delta = 2\hat{\phi}$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΓ = ΒΔ$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $ΒΟΔ$ η $ΟΜ$ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής



του, άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΔ.

30. α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:

1) την πλευρά ΑΕ κοινή

2) $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και

3) $AB = AG$.

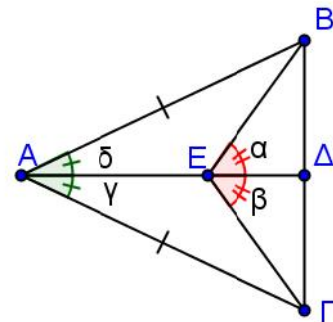
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $EB = EG$, άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $AB = AG$, δηλαδή το

Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή $EB = EG$, το Ε ισαπέχει από τα Β,Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ.

Επειδή τα Α,Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.



31. α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

1) $OA = OB = \rho_2$

2) $OK = OL = \rho_1$ και

3) τη γωνία $\hat{O}$ κοινή

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, οπότε έχουν και $AL = BK$.

β) Επειδή $OA = OB$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, άρα $\hat{OAB} = \hat{OBA}$ (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, ισχύει ότι: $\hat{OAL} = \hat{OBK}$ (2)

Από (1)-(2) έχουμε: $\hat{OAB} - \hat{OAL} = \hat{OBA} - \hat{OBK} \Leftrightarrow \hat{PAB} = \hat{PBA}$, οπότε το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.

γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

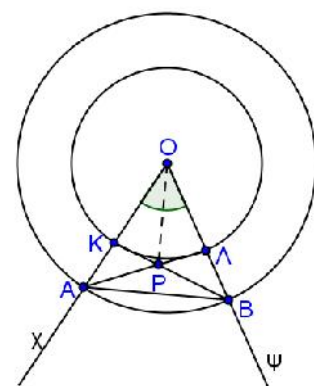
1) $OA = OB$

2) τη πλευρά ΟΡ κοινή και

3) $PA = PB$ (τρίγωνο ΑΡΒ ισοσκελές)

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα οπότε έχουν και $\hat{AOP} = \hat{BOP}$,

δηλαδή η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$



Στέλιος Μιχαήλογλου