

Άλγεβρα Β' Λυκείου
Σημειώσεις στα Συστήματα Εξισώσεων

Γρηγόρης Προτσώνης

Πάτρα 2023

Περιεχόμενα

1 Γραμμικά Συστήματα	3
1.1 Στοιχεία Θεωρίας	3
1.1.1 Προσδιορισμός όλων των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$	4
1.1.2 Γεωμετρική (ανά)παράσταση της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$	5
1.1.3 Σχεδιασμός του γραφήματος της $ax + by = \gamma$	5
1.1.4 Γεωμετρική διερεύνηση της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$	6
1.1.5 Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας	8
1.1.6 Πλήθος Λύσεων ενός Γραμμικού 2×2 Συστήματος	10
1.2 Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων	13
1.2.1 Η μέθοδος της αντικατάστασης	13
1.2.2 Η Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών	15
1.2.3 Ορίζουσες	17
1.2.4 Επίλυση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος με την μέθοδο των ορίζουσών	18
1.2.5 Παραμετρικά Συστήματα	21
1.2.6 Σχέσεις μεταξύ ορίζουσών	23
1.2.7 Γραμμικά Συστήματα Τριών Εξισώσεων με Τρεις Αγνώστους	24
1.2.8 Συστήματα που λύνονται με τεχνάσματα	27
1.3 Ασκήσεις	29
2 Μη Γραμμικά Συστήματα	34
2.1 Στοιχεία Θεωρίας	34
2.2 Μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων	37
2.2.1 Η μία από τις δύο εξισώσεις επιλύεται ως προς τον ένα άγνωστο	37
2.2.2 Μετατροπή ενός μη γραμμικού συστήματος σε απλούστερο με την χρήση βοηθητικών αγνώστων	39
2.2.3 Συστήματα που ανάγονται σε δύο ή περισσότερα απλούστερα συστήματα	41
2.2.4 Κατασκευάζοντας Βοηθητική Εξίσωση	44
2.3 Ασκήσεις	48
3 Προβλήματα που λύνονται με συστήματα	50
3.1 Μεθοδολογία	50
3.2 Ασκήσεις	51
4 Βιβλιογραφία	52

1 Γραμμικά Συστήματα

1.1 Στοιχεία Θεωρίας

- Μία εξίσωση με δύο αγνώστους x, y είναι μία ισότητα που περιέχει τις μεταβλητές x και y .
- Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ με ένα τουλάχιστον από τα a, b διάφορο του μηδενός καλείται **γραμμική εξίσωση** με αγνώστους τα x και y . Οι αριθμοί a και b καλούνται **συντελεστές** των αγνώστων και ο αριθμός γ καλείται **σταθερός όρος** της εξίσωσης.
- Ένα ζεύγος (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών καλείται **λύση της εξίσωσης** αν $ax_0 + by_0 = \gamma$

1.1 Παράδειγμα. Οι εξισώσεις $2x+3y=5$, $-x+2y+2=0$, $\sqrt{2}x=2y$, $x-2=0$ είναι γραμμικές, ενώ οι εξισώσεις $x^2+y^2=1$, $y=\frac{1}{x}$, $2x+xy=1$ δεν είναι γραμμικές.

1.2 Παράδειγμα.

- α)** Το ζεύγος $(x, y) = (-2, 3)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $2x + 3y = 5$ γιατί $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 5$, ενώ το ζεύγος $(x, y) = (2, 1)$ δεν αποτελεί λύση αυτής της εξίσωσης γιατί $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 5$.
- β)** Το ζεύγος $(x, y) = (5, -7)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $x = 5$, ενώ το ζεύγος $(x, y) = (2, 5)$ δεν αποτελεί λύση αυτής της εξίσωσης γιατί $2 \neq 5$.
- Αν $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ είναι ένα ζεύγος γραμμικών εξισώσεων, θα λέμε ότι έχουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** (τους x, y) ή πιο απλά θα λέμε ότι έχουμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα.
 - Ένα ζεύγος (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών καλείται **λύση του συστήματος** αν είναι λύση και των δύο εξισώσεων του συστήματος, δηλαδή αν:

$$\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 = \gamma_1 \text{ και } \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 = \gamma_2$$

1.3 Παράδειγμα.

Τα συστήματα

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x + \frac{2}{3}y = -6 \end{cases}, \begin{cases} \sqrt{5}x + 3y = 3 \\ 2x - 7y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

είναι 2×2 γραμμικά συστήματα, ενώ τα συστήματα

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 3x + \frac{2}{3}y = -6 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y = 1 \\ xy^2 = -1 \end{cases} \text{ δεν είναι γραμμικά.}$$

1.4 Παράδειγμα. Το ζεύγος $(1, 0)$ είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ γιατί $\begin{cases} 1 + 0 = 1 \\ 1 - 0 = 1 \end{cases}$ είναι λύση και των δύο εξισώσεων του συστήματος, ενώ το ζεύγος $(0, 1)$ δεν αποτελεί λύση του συστήματος αφού δεν είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης.

1.1.1 Προσδιορισμός όλων των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση $x - 4y = 2$ τότε για να βρούμε μία λύση αυτής της εξίσωσης μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής:

Δίνοντας μία οποιαδήποτε τιμή σε μία από τις δύο μεταβλητές, για παράδειγμα $x = -2$ και λύνοντας την εξίσωση που προκύπτει με άγνωστο την μεταβλητή y , έχουμε:

$$-2 - 4y = 2 \Rightarrow -4y = 4 \Rightarrow y = -1$$

Συνεπώς το ζεύγος $(x, y) = (-2, -1)$ είναι λύση της εξίσωσης. Όμοια για $y = 1$, βρίσκουμε $x = 6$. Συνεπώς και το ζεύγος $(x, y) = (6, 1)$ είναι λύση της εξίσωσης. Με αυτό τον τρόπο παρατηρούμε ότι αυτή η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Για να τις προσδιορίσουμε όλες εργαζόμαστε ως εξής:

1. Λύνουμε την εξίσωση ως προς το ένα άγνωστο (όποιον εμείς θέλουμε), στην περίπτωση μας λύνοντας ως προς x έχουμε: $x = 4y + 2$
2. Θέτουμε την άλλη μεταβλητή ίση με μία παράμετρο έστω $y = k$ και στην συνέχεια εκφράζουμε και την μεταβλητή x συναρτήσει της παραμέτρου k , δηλαδή $x = 4k + 2$.
Συνεπώς οι λύσεις της εξίσωσης $x - 4y = 2$ είναι:

$$(x, y) = (4k + 2, k), k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Παρατήρηση: Ο ρόλος της παραμέτρου k είναι ο εξής: Δίνοντας μία οποιαδήποτε τιμή στην παράμετρο k τότε έχουμε και μία λύση της εξίσωσης. Για παράδειγμα για $k = 1$, βρίσκουμε την λύση $(6, 1)$, ενώ για $k = \frac{1}{4}$ έχουμε την λύση $(3, \frac{1}{4})$ και ούτω καθεξής.

Αν τώρα είχαμε επιλέξει να επιλύσουμε την εξίσωση ως προς την μεταβλητή y θα είχαμε $y = \frac{1}{4}x - 2$ και θέτοντας $x = k$ θα είχαμε ότι $y = \frac{1}{4}k - 2$ και συνεπώς οι λύσεις της εξίσωσης $x - 4y = 2$ είναι:

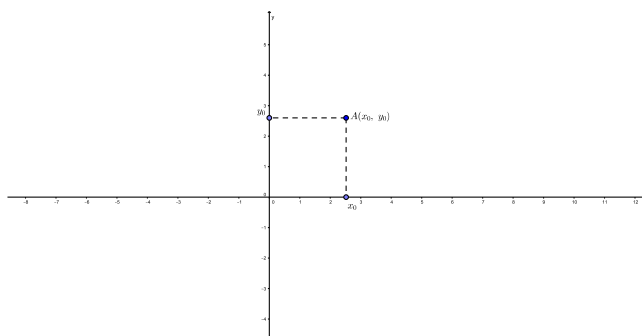
$$(x, y) = (k, \frac{1}{4}k - 2), k \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Οι εκφράσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες με την έννοια ότι προσδιορίζουν το ίδιο σύνολο λύσεων. Για παράδειγμα η λύση $(10, 2)$ προκύπτει για $k = 2$ στην έκφραση (1) και η ίδια λύση προκύπτει για $k = 10$ στην έκφραση (2).

1.1.2 Γεωμετρική (ανά)παράσταση της γραμμικής εξίσωσης

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

Αν Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τότε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (x_0, y_0) , παριστάνει ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου και αντίστροφα.



Σχήμα 1: Το σημείο A του επιπέδου παριστάνεται από το ζεύγος (x_0, y_0)

Όπως είδαμε η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ έχει ως λύσεις, άπειρα ζεύγη πραγματικών αριθμών. Αν όλα αυτά τα ζεύγη τα τοποθετήσουμε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τότε θα σχηματιστεί μία ευθεία γραμμή. Γι' αυτό ακριβώς το λόγο η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ λέγεται γραμμική. Επιπλέον χρησιμοποιούμε και την έκφραση ότι η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει μία ευθεία γραμμή.

Λέγοντας ότι η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει μία ευθεία εννοούμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης αυτής ως σημεία του καρτεσιανού επιπέδου σχηματίζουν μία ευθεία γραμμή.

Παρατήρηση: Συμβολίζουμε συνήθως τις ευθείες του επιπέδου με μικρά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, π.χ ϵ , η , Για να δηλώσουμε ότι μία ευθεία ϵ είναι η ευθεία που παριστάνεται από τις λύσεις μίας γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, θα γράφουμε $\epsilon : \alpha x + \beta y = \gamma$ και θα χρησιμοποιούμε την έκφραση: η ευθεία ϵ έχει εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$.

1.1.3 Σχεδιασμός του γραφήματος της $\alpha x + \beta y = \gamma$

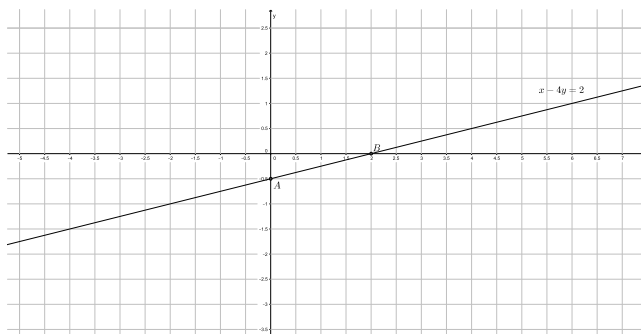
Έστω ότι θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά την εξίσωση $x - 4y = 2$.

Δεδομένου ότι για να σχεδιάσουμε μία ευθεία γραμμή χρειάζεται να γνωρίζουμε δύο σημεία από τα οποία αυτή διέρχεται, και δεδομένου ότι τα σημεία τα οποία αποτελούν την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση, είναι οι λύσεις αυτής της εξίσωσης, για να σχεδιάσουμε την ευθεία δουλεύουμε ως εξής:

- Βρίσκουμε δύο οποιεσδήποτε λύσεις της εξίσωσης.
- Από τα δύο παραπάνω ζεύγη λύσεων κατασκευάζουμε στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα σημεία που αντιστοιχούν.

- Ενώνουμε τα δύο αυτά σημεία με μία ευθεία γραμμή και προεκτείνουμε.

Οπότε, για $x = 0$ βρίσκουμε $y = -\frac{1}{2}$ άρα ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία είναι το $A(0, -\frac{1}{2})$ (το οποίο είναι και το σημείο τομής με τον $y'y$). Αν θέσουμε τώρα στην εξίσωση όπου $y = 0$ βρίσκουμε ότι $x = 2$, άρα άλλο ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία είναι το $B(2, 0)$ (το οποίο είναι και το σημείο τομής με τον $x'x$). Σχεδιάζοντας τώρα σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy , έχουμε:



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση των λύσεων της εξίσωσης $x - 4y = 2$

Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της παραπάνω ευθείας τότε οι συντεταγμένες αυτού του σημείου θα αποτελούν λύση της εξίσωσης $x - 4y = 2$. Αντίστροφα τώρα, αν (x_0, y_0) μία λύση της εξίσωσης $x - 4y = 2$, τότε το σημείο $A(x_0, y_0)$, θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία του παραπάνω σχήματος.

Παρατήρηση: Θα μπορούσαμε αντί για τις παραπάνω λύσεις να βρούμε δύο οποιεσδήποτε άλλες λύσεις της εξίσωσης και στην συνέχεια να σχεδιάσουμε.

1.1.4 Γεωμετρική διερεύνηση της γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$

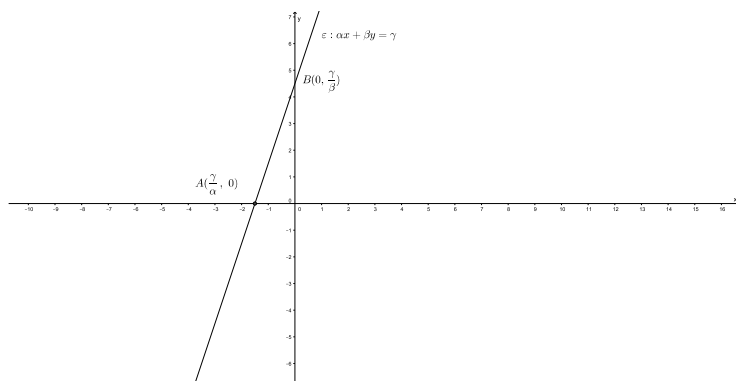
- Αν $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ τότε επιλύοντας την εξίσωση ως προς y έχουμε:

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$$

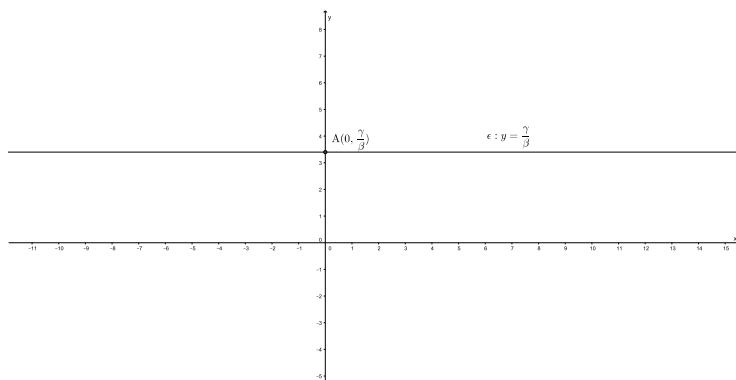
Ο αριθμός $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ (ο συντελεστής του x όταν επιλύσουμε την εξίσωση ως προς y) καλείται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας.

Επιπλέον

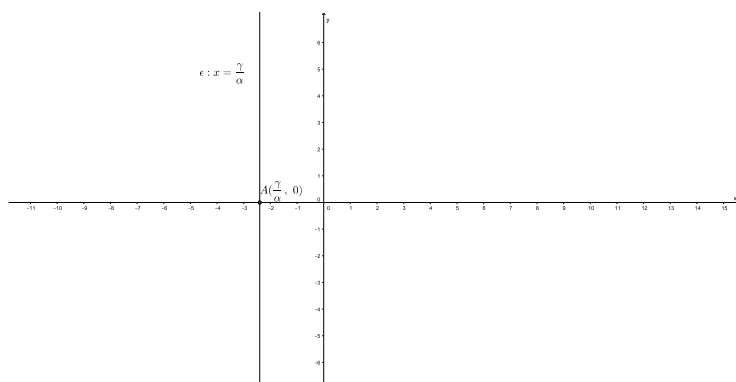
- για $x = 0$ έχουμε $y = \frac{\gamma}{\beta}$, συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$.
- για $y = 0$ έχουμε $x = \frac{\gamma}{\alpha}$, συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$.



- Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε έχουμε την εξίσωση: $y = \frac{\gamma}{\beta}$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει μία ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \frac{\gamma}{\beta})$. Ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής της ευθείας είναι $\lambda = 0$.



- Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$ τότε έχουμε την εξίσωση: $x = \frac{\gamma}{\alpha}$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει μία ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$. Για την ευθεία αυτή δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.



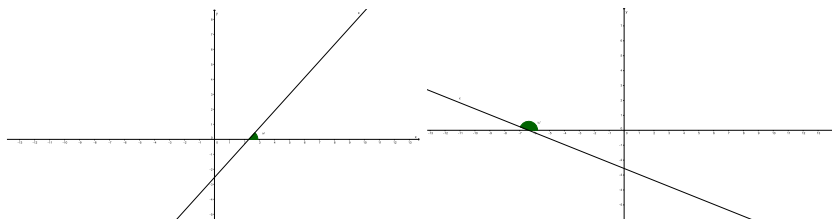
Γενικότερα έχουμε ότι:

- Κάθε ευθεία η οποία δεν είναι παράλληλη στον $y'y$ παριστάνεται από μία εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$.
- Κάθε ευθεία η οποία είναι παράλληλη στον $y'y$ παριστάνεται από μία εξίσωση της μορφής $x = x_0$.

Παρατήρηση: Η εξίσωση $y = 0$, παριστάνει σ' ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy τον άξονα $x'x$ και η εξίσωση $x = 0$ τον άξονα $y'y$.

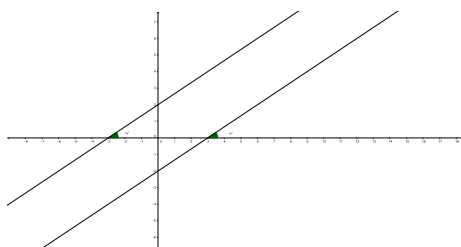
1.1.5 Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας

Αν $\epsilon : y = \lambda x + \beta$ μία (εξίσωση) ευθείας η οποία δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, τότε όπως έχουμε πει, ο αριθμός λ ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης της ϵ . Ο συντελεστής διεύθυνσης ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζεται από τον άξονα $x'x$ και την ευθεία ϵ . Ως γωνία ω θεωρούμε την γωνία που σχηματίζετε αν ο άξονας $x'x$ περιστραφεί με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ϵ .



Παρατήρηση: Από το γεγονός ότι δύο εντός εκτός και επί τ' αυτά γωνίες μεταξύ δύο παραλλήλων είναι ίσες, έχουμε ότι¹:

Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.



¹Με την προϋπόθεση ότι οι δύο ευθείες δεν είναι παράλληλες στον $y'y$ και συνεπώς θα ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών.

1.5 Παράδειγμα. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\epsilon_1 : x - 2y + 6 = 0$ και $2x - 4y = 7$ είναι παράλληλες.

Λύση

Φέρνουμε τις εξισώσεις και των δύο ευθειών στην μορφή $y = \alpha x + \beta$ (Λύνουμε ως προς y έτσι ώστε να προσδιορίσουμε τον συντελεστή διεύθυνσης).

$$x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ϵ_1 είναι $\lambda_{\epsilon_1} = \frac{1}{2}$

$$2x - 4y = 7 \Leftrightarrow 4y = 2x - 7 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ϵ_2 είναι $\lambda_{\epsilon_2} = \frac{1}{2}$

Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες, αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

1.6 Παράδειγμα. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : 4\mu^2x - 2y = \mu$ και $2\mu x + y = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$:

- α) Οι ευθείες είναι παράλληλες και δεν ταυτίζονται,
- β) Οι ευθείες ταυτίζονται,
- γ) Οι ευθείες τέμνονται σε μοναδικό σημείο του επιπέδου.

Λύση

Λύνοντας ως προς y τις εξισώσεις των ευθειών έχουμε: $\epsilon_1 : y = 2\mu^2x - \frac{\mu}{2}$ και $\epsilon_2 : y = -2\mu x$. Συνεπώς έχουμε:

- Η ευθεία ϵ_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\epsilon_1} = 2\mu^2$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0, -\frac{\mu}{2})$
- Η ευθεία ϵ_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\epsilon_2} = -2\mu$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $O(0, 0)$.

Άρα:

α) Οι ευθείες είναι παράλληλες και δεν ταυτίζονται, όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης και τέμνουν τον άξονα $y'y$ σε διαφορετικά σημεία. Άρα:

$$\lambda_{\epsilon_1} = \lambda_{\epsilon_2} \Leftrightarrow 2\mu^2 = -2\mu \Leftrightarrow \mu^2 + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\mu + 1) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ ή } \mu = -1$$

και

$$-\frac{\mu}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 0$$

Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες και δεν ταυτίζονται, όταν $\mu = -1$

β) Οι ευθείες ταυτίζονται, όταν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης και τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο. Άρα:

$$\lambda_{\epsilon_1} = \lambda_{\epsilon_2} \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ ή } \mu = -1$$

και

$$-\frac{\mu}{2} = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$$

Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες και δεν ταυτίζονται, όταν $\mu = 0$

γ) Οι ευθείες τέμνονται σε μοναδικό σημείο του επιπέδου όταν δεν είναι παράλληλες και δεν ταυτίζονται, δηλαδή όταν

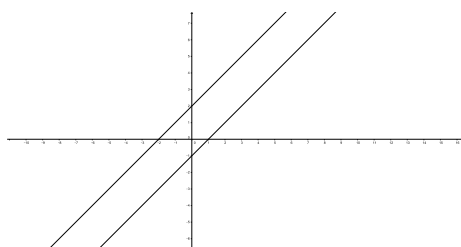
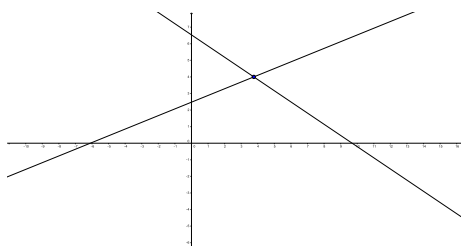
$$\mu \neq -1 \text{ και } \mu \neq 0$$

1.1.6 Πλήθος Λύσεων ενός Γραμμικού 2×2 Συστήματος

Από το γεγονός ότι η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει μία ευθεία γραμμή, έχουμε ότι η επίλυση ενός γραμμικού 2×2 συστήματος γεωμετρικά θα σήμαινε την εύρεση (αν υπάρχουν) των σημείων τομής των ευθειών που παριστάνει η κάθε εξίσωση του συστήματος. Δεδομένου τώρα ότι δύο ευθείες του επιπέδου μπορεί ή να τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου ή να είναι παράλληλες (κανένα σημείο τομής) ή να ταυτίζονται έχουμε ότι:

Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ έχει:

- είτε μοναδική λύση (x_0, y_0) (οι ευθείες τέμνονται),
- είτε καμία λύση (οι ευθείες είναι παράλληλες),
- είτε άπειρες λύσεις (οι ευθείες ταυτίζονται).



Παρατήρηση: Όταν ένα σύστημα δεν έχει καμία λύση λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**, ενώ όταν ένα σύστημα έχει άπειρες λύσεις λέμε ότι το σύστημα είναι **αόριστο**.

1.7 Παράδειγμα. Να επιλυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

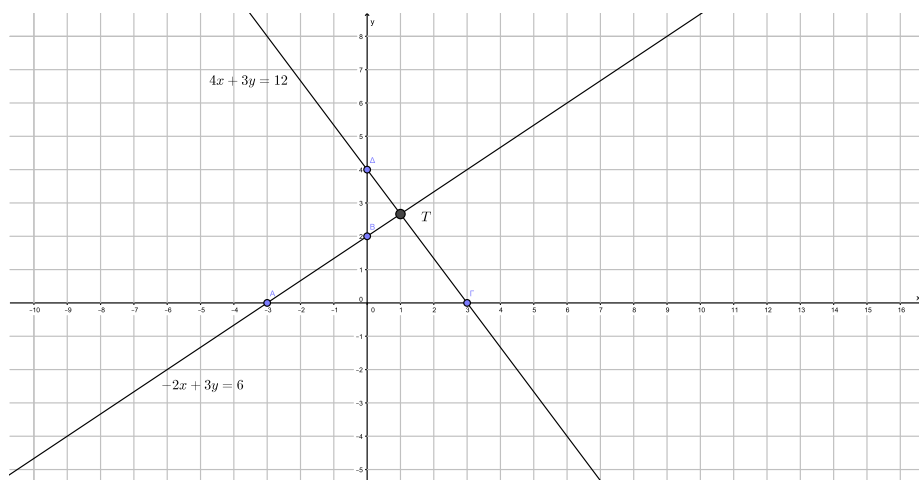
$$\alpha) \begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad \gamma) \begin{cases} y = -2 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad \delta) \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Λύση

α) Για να σχεδιάσουμε την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση $-2x + 3y = 6$ βρίσκουμε που τέμνει τους άξονες:

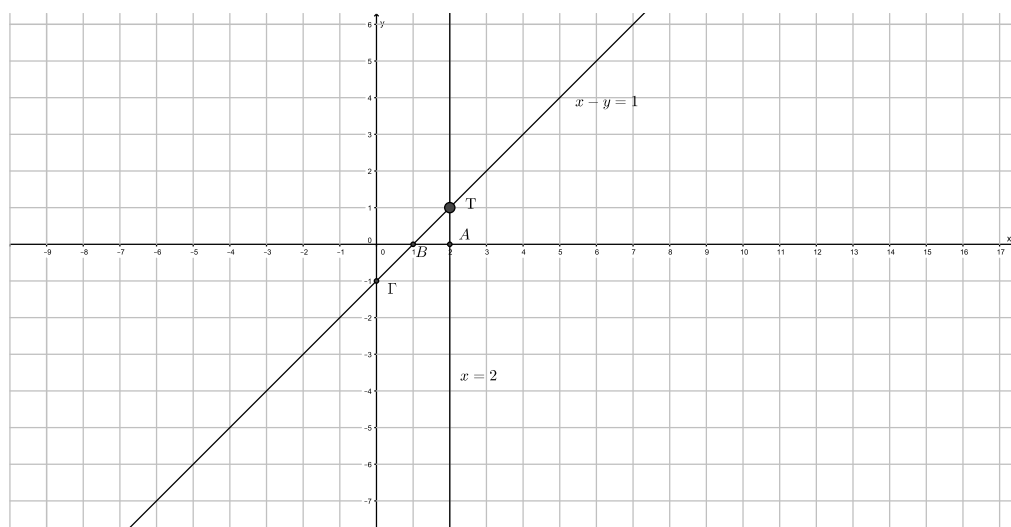
- Για $y = 0$ στην εξίσωση της ευθείας, βρίσκουμε ότι $x = -3$. Συνεπώς το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $A(-3, 0)$
- Για $x = 0$ στην εξίσωση της ευθείας, βρίσκουμε ότι $y = 2$. Συνεπώς το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $B(0, 2)$

Όμοια βρίσκουμε ότι η ευθεία που παριστάνει η εξίσωση $4x + 3y = 12$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(3, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0, 4)$. Σχεδιάζοντας τώρα σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έχουμε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των ευθειών:



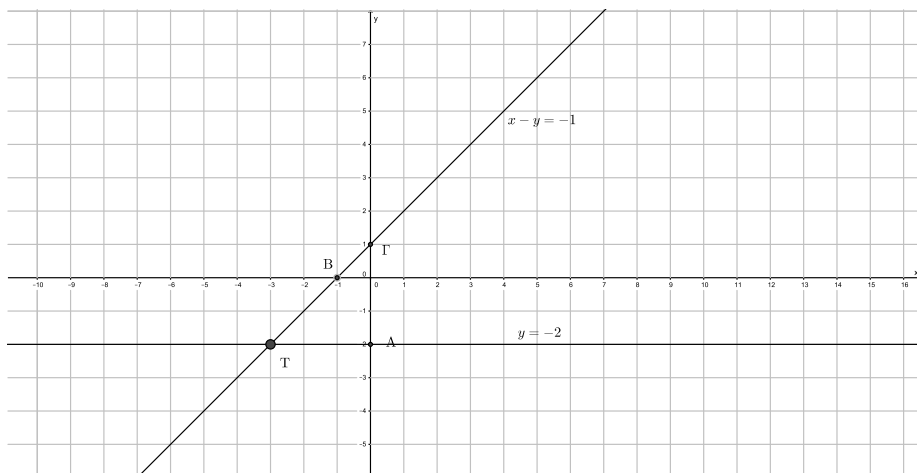
β) Η εξίσωση $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ παριστάνει μία ευθεία παράλληλη στον $y'y$ η οποία τέμνει τον $x'x$ στο $A(2, 0)$.

Όμοια τώρα με το προηγούμενο ερώτημα βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $x - y = 1$ τέμνει τον $x'x$ στο $B(1, 0)$ και τέμνει τον $y'y$ στο $\Gamma(0, -1)$. Σχεδιάζοντας τώρα σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έχουμε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των ευθειών:

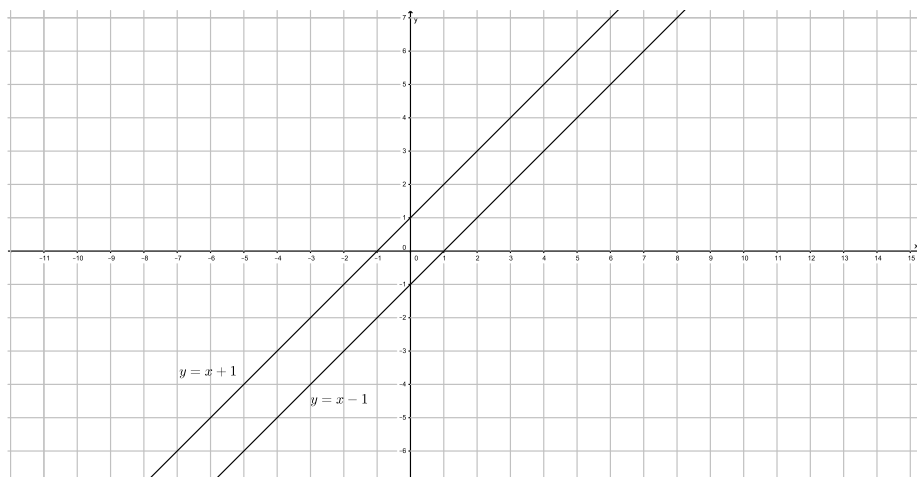


γ) Η εξίσωση $y = -2$ παριστάνει μία ευθεία παράλληλη στον $x'x$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο $A(0, -2)$.

Η ευθεία με εξίσωση $x - y = -1$ τέμνει τον $x'x$ στο $B(-1, 0)$ και τέμνει τον $y'y$ στο $\Gamma(0, 1)$. Σχεδιάζοντας τώρα σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έχουμε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των ευθειών:



δ) Οι εξισώσεις $2x - 2y = -2 \Leftrightarrow y = x + 1$ και $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$ παριστάνουν δύο παράλληλες ευθείες (έχουν και οι δύο συντελεστή διεύθυνσης 1). Σχεδιάζοντας έχουμε ότι οι ευθείες δεν τέμνονται σε κανένα σημείο:



1.2 Αλγεβρική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Δύο συστήματα εξισώσεων καλούνται **ισοδύναμα** αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Για την αλγεβρική επίλυση ενός γραμμικού 2×2 συστήματος έχουμε τρεις μεθόδους. Οι δύο πρώτες (η μέθοδος της αντικατάστασης και η μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών) δουλεύουν ως εξής:

Σε κάθε βήμα της μεθόδου μετατρέπουμε το δοσμένο σύστημα σ' ένα ισοδύναμό του μέχρι που να καταλήξουμε στην λύση του.

1.2.1 Η μέθοδος της αντικατάστασης

Έστω
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$
 ένα 2×2 γραμμικό σύστημα. Για να το επιλύσουμε με την μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Μέθοδος της αντικατάστασης

1. Λύνουμε την μία εξίσωση (όποια θέλουμε) ως προς τον ένα άγνωστο (όποιον θέλουμε).
2. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση τον άγνωστο ως προς τον οποίο επιλύσαμε και έτσι προκύπτει μία εξίσωση μ' ένα άγνωστο την οποία και επιλύουμε.
3. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση τον άγνωστο τον οποίο βρήκαμε και έτσι προκύπτει μία εξίσωση ως προς τον άλλο άγνωστο την οποία και επιλύουμε βρίσκοντας έτσι και τον άλλο άγνωστο.

1.8 Παράδειγμα. Να επιλυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τα παραπάνω βήματα έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{8} \\ x + y = 45 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ y = 45 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7(45 - x) \\ y = 45 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 315 - 7x \\ y = 45 - x \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 15x = 315 \\ y = 45 - x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 45 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 45 - 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (21, 24)$

Παρατήρηση: Μπορούμε να επαληθεύσουμε αν η λύση που βρήκαμε είναι η σωστή ελέγχοντας αν η λύση που βρήκαμε είναι λύση και των δύο εξισώσεων του συστήματος. Στο προηγούμενο παράδειγμα για $x = 21$ και $y = 24$

- Στην πρώτη εξίσωση έχουμε $\frac{21}{7} = \frac{24}{8} \Leftrightarrow 3 = 3$
- Στην δεύτερη εξίσωση έχουμε $21 + 24 = 45 \Leftrightarrow 45 = 45$

Άρα το ζεύγος $(21, 24)$ είναι λύση του συστήματος.

Παρατήρηση: Αν σε κάποιο βήμα της επίλυσης του συστήματος προκύψει μία ισότητα που δεν ισχύει ποτέ (π.χ $3=0$ ή ...), αυτό θα σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει καμία λύση (αδύνατο)

1.9 Παράδειγμα. Να επιλυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2 = 2(y - 1) \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} x - 2 = 2(y - 1) \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2y - 2 \\ x = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3 - 2 = 2y - 2 \\ x = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$$

Αφού καταλήξαμε σε μία αδύνατη ισότητα, έχουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρατήρηση: Αν σε κάποιο βήμα της επίλυσης του συστήματος προκύψει μία ισότητα που ισχύει πάντα (π.χ $3=3$ ή $0=0$ ή $2y = 2y$ ή ...), αυτό θα σημαίνει ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και σε αυτή τις περίπτωση οι εξισώσεις είναι ουσιαστικά ίδιες (η μία θα είναι ένα πολλαπλάσιο της άλλης). Άρα ουσιαστικά έχουμε μόνο μία εξίσωση από την οποία και προσδιορίζουμε την απειρία των λύσεων του συστήματος.

1.10 Παράδειγμα. Να επιλυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Λύση

$$\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ \frac{1}{2}(2y - 2) - y + 1 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ y - 1 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Το ότι καταλήξαμε σε μία ισότητα που ισχύει πάντα σημαίνει ότι οι δύο εξισώσεις του συστήματος είναι ίδιες. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την δεύτερη εξίσωση, έχουμε:

$$\frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y = x + 2$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για να προσδιορίσουμε τις λύσεις έχουμε:

$$2y = x + 2 \Leftrightarrow x = 2y - 2$$

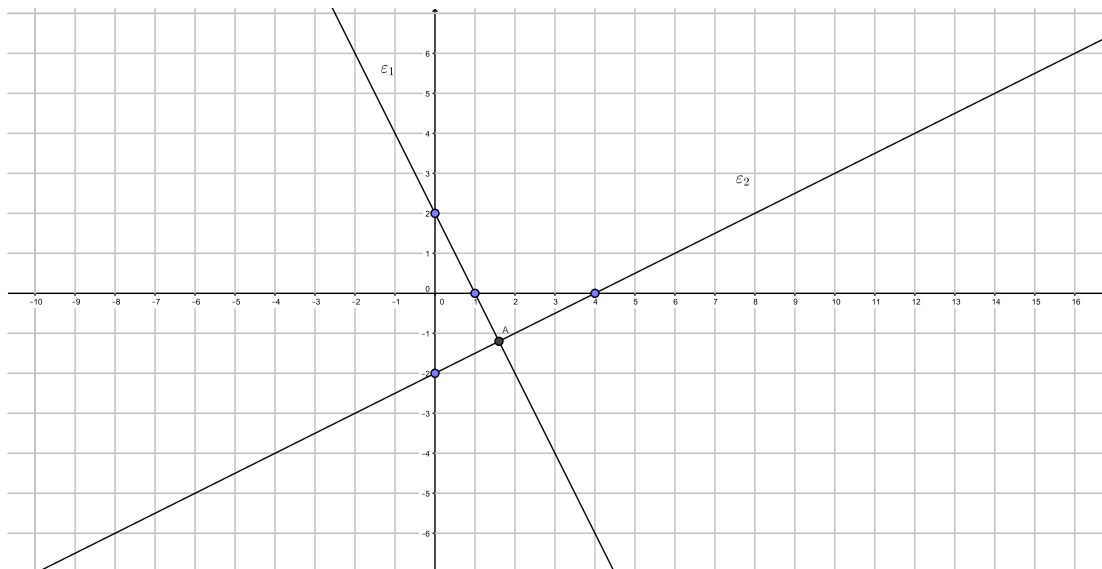
Θέτουμε $y = k$ οπότε $x = 2k - 2$. Συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι της μορφής:

$$(x, y) = (k, 2k - 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

1.11 Παράδειγμα.

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών του παρακάτω σχήματος.

β) Να προσδιοριστούν αλγεβρικά οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους.



Λύση

α) Αν $\epsilon_1 : y = \alpha x + \beta$ (αφού $\epsilon_1 \nparallel y'y$), τότε αφού η ϵ_1 διέρχεται από τα σημεία $(1, 0)$ και $(0, 2)$ έχουμε ότι:

$$0 = \alpha + \beta \quad (1) \quad \text{και} \quad 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε: $\alpha = -2$, $\beta = 2$, άρα η ευθεία ϵ_1 έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

Όμοια βρίσκουμε ότι η ευθεία ϵ_2 έχει εξίσωση $y = \frac{1}{2}x - 2$. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 2 \\ -2x + 2 = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 2 \\ -4x + 4 = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 2 \\ -5x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y = -2x + 2 \\ x = \frac{8}{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\frac{8}{5} + 2 \\ x = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{6}{5} \\ x = \frac{8}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $A(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$

1.2.2 Η Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Όπως έχουμε αναφέρει και πιο πάνω δύο συστήματα εξισώσεων καλούνται ισοδύναμα αν έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Αν τώρα έχουμε ένα γραμμικό σύστημα, τότε κάθε μία από τις παρακάτω ενέργειες οδηγούν σ' ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα.

- Αντικατάσταση μίας εξίσωσης του συστήματος με την εξίσωση που προκύπτει αν η εξίσωση πολλαπλασιαστεί μ' ένα μη μηδενικό αριθμό.
- Αντικατάσταση μίας εξίσωσης του συστήματος με την εξίσωση που προκύπτει αν η εξίσωση προστεθεί σε μία άλλη εξίσωση του συστήματος.

Με βάση τα παραπάνω για να λύσουμε ένα γραμμικό 2×2 σύστημα χρησιμοποιούμε μία μέθοδο η οποία καλείται η **μέθοδος των αντίθετων συντελεστών** η οποία περιγράφεται με τα παρακάτω βήματα:

Μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών

1. Πολλαπλασιάζουμε κατάλληλα μία οι και τις δύο εξισώσεις του συστήματος έτσι ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις δύο εξισώσεις, να είναι αντίθετοι.
2. Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη και έτσι προκύπτει μία καινούρια εξίσωση η οποία θα περιέχει μόνο τον ένα άγνωστο. Επιλύουμε αυτή την εξίσωση και βρίσκουμε τον ένα άγνωστο.
3. Αντικαθιστούμε τον άγνωστο τον οποίο βρήκαμε σε μία από τις αρχικές μας εξισώσεις και έτσι προκύπτει μια εξίσωση με μόνο ένα άγνωστο την οποία επιλύουμε.

1.12 Παράδειγμα. Να επιλυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$$

Λύση

Αρχικά μετασχηματίζουμε το σύστημα σ' ένα ισοδύναμό του που έχει την γενική

μορφή
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot 14 \\ \cdot 6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \\ 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε τώρα την μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με 3 και την δεύτερη εξίσωση με 4 έτσι ώστε οι συντελεστές του αγνώστου y να είναι αντίθετοι.

$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 12y = 15 \\ 8x - 12y = 72 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τώρα τις δύο εξισώσεις κατά μέλη έχουμε:

$$29x = 87 \Leftrightarrow x = 3.$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή που βρήκαμε για τον άγνωστο x στην εξίσωση $7x + 4y = 5$ έχουμε:

$$7 \cdot 3 + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y = -16 \Leftrightarrow y = -4$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (3, -4)$

1.2.3 Ορίζουσες

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέσσερις πραγματικοί αριθμοί, τότε γράφοντας $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ εννοούμε τον αριθμό $\alpha\delta - \beta\gamma$. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Η ποσότητα $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ονομάζεται **ορίζουσα** 2×2 .

1.13 Παράδειγμα. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \beta) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}, \gamma) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \delta) \begin{vmatrix} \sqrt{8} - \sqrt{3} & -1 \\ -5 & \sqrt{8} + \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 10 - 3 = 7$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 6 = -15 - 12 = -27$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 4 + 12 = 16$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \sqrt{8} - \sqrt{3} & -1 \\ -5 & \sqrt{8} + \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{8} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3}) - (-1)(-5) = 8 - 3 + 5 = 0$$

1.14 Παράδειγμα. Να επιλυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix} = 0, \beta) \begin{vmatrix} t & -2 \\ 8 & t \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x-5) + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης είναι $\Delta = 1$. Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \text{ ή } x = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\beta) \begin{vmatrix} t & -2 \\ 8 & t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow t^2 = -16. \text{ Η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύσεις.}$$

1.2.4 Επίλυση ενός 2×2 γραμμικού συστήματος με την μέθοδο των οριζουσών

Αν $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$, ένα γραμμικό 2×2 σύστημα με αγνώστους τα x, y , τότε

η ποσότητα $D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$ καλείται **ορίζουσα του συστήματος**.

Επιπλέον:

- Αν στην ορίζουσα D αντί για τους συντελεστές του αγνώστου x βάλουμε τους σταθερούς όρους των εξισώσεων τότε η ορίζουσα που προκύπτει συμβολίζεται με D_x , δηλαδή:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \beta_2 - \beta_1 \gamma_2$$

- Αν στην ορίζουσα D αντί για τους συντελεστές του αγνώστου y βάλουμε τους σταθερούς όρους των εξισώσεων τότε η ορίζουσα που προκύπτει συμβολίζεται με D_y , δηλαδή:

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \gamma_2 - \gamma_1 \alpha_2$$

Για ένα 2×2 γραμμικό σύστημα, ισχύουν τα εξής:

- Αν $D \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση και η μοναδική αυτή λύση δίνεται από τους τύπους:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

- Αν $D = 0$ τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο είτε έχει άπειρες λύσεις.

Παρατήρηση: Για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των οριζουσών για να την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος πρέπει να φέρουμε και τις δύο εξισώσεις του συστήματος στην γενική τους μορφή που είναι η: $\alpha x + \beta y = \gamma$.

1.15 Παράδειγμα. Να επιλυθεί με την μέθοδο των οριζουσών το σύστημα: $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{4-5x}{6} \\ 2y - x = 3 \end{cases}$

Λύση

Μετατρέπουμε τις εξισώσεις του συστήματος στην μορφή $\alpha x + \beta y = \gamma$

- Η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{4-5x}{6} \Leftrightarrow 3x - 2y = 4 - 5x \Leftrightarrow 8x - 2y = 4 \Leftrightarrow 4x - y = 2$$

- Η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$2y - x = 3 \Leftrightarrow -x + 2y = 3$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 8 - 1 = 7$$

Αφού $D = 7 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Για να προσδιορίσουμε τώρα την μοναδική λύση του συστήματος, υπολογίζουμε τις ορίζουσες D_x και D_y .

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 4 + 3 = 7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 12 + 2 = 14$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι:

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = (1, 2)$$

Παρατήρηση: Αν η ορίζουσα ενός συστήματος είναι 0, τότε το σύστημα θα είναι ή αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε πάντα αν πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλους αριθμούς την μία ή και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, να καταλήξουμε σ' ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma_1 \\ \alpha x + \beta y = \gamma_2 \end{cases}$$

δηλαδή σ' ένα σύστημα όπου τα πρώτα μέλη και των δύο εξισώσεων είναι ίδια. Διακρίνουμε τότε δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Αν $\gamma_1 \neq \gamma_2$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο,

2η Περίπτωση: Αν $\gamma_1 = \gamma_2$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, αφού έχουμε μία μόνο γραμμική εξίσωση. Στην περίπτωση αυτή δεν ξεχνάμε να προσδιορίσουμε τις άπειρες αυτές λύσεις.

1.16 Παράδειγμα. Να επιλύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} y - 1 = x - 1 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} y - 1 = x - 1 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι: $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$.

Αφού $D = 0$ το σύστημα είναι είτε αδύνατο είτε έχει άπειρες λύσεις.

Μετασχηματίζοντας το σύστημα έχουμε:

$$\begin{cases} -x + y = -2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ \cdot (1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\beta) \text{ Η ορίζουσα του συστήματος } \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ είναι:}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} - 1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} + 1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) - 2 \cdot 1 = \sqrt{3}^2 - 1^2 - 2 = 0$$

Αφού $D = 0$ το σύστημα είναι είτε αδύνατο είτε έχει άπειρες λύσεις.

Μετασχηματίζοντας το σύστημα έχουμε:

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ x + (\sqrt{3} + 1)y = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \begin{matrix} \cdot (1) \\ \cdot (\sqrt{3} - 1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \\ (\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{3} - 1)x + 2y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}x - 2$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Θέτουμε $x = k$, οπότε $y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}k - 2$. Συνεπώς το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x, y) = (k, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}k - 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{1.17 \text{ Παράδειγμα.}} \text{ Δίνεται το σύστημα } \begin{cases} -2x + 3y = \mu^2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = \mu \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα δεν έχει μοναδική λύση για καμία τιμή του πραγματικού αριθμού μ .

β) Για ποιες τιμές του μ το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες λύσεις και για ποιες τιμές του μ είναι αδύνατο.

Λύση

$$\alpha) \text{ Η ορίζουσα του συστήματος είναι: } D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = -2 \cdot (-\frac{3}{4}) - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

Αφού $D = 0$ το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση.

β) Μετασχηματίζοντας το σύστημα έχουμε:

$$\begin{cases} -2x + 3y = \mu^2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = \mu \end{cases} \begin{matrix} \cdot (1) \\ \cdot (-4) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = \mu^2 \\ -2x + 3y = 4\mu \end{cases}$$

Άρα:

- Αν $\mu^2 = 4\mu \Leftrightarrow \mu^2 - 4\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\mu - 4) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ ή $\mu = 4$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
- Αν $\mu^2 \neq 4\mu \Leftrightarrow \mu \neq 0$ και $\mu \neq 4$ το σύστημα είναι αδύνατο.

1.2.5 Παραμετρικά Συστήματα

Ένα σύστημα στο οποίο οι συντελεστές ή οι σταθεροί όροι του συστήματος εξαρτώνται από μία ή περισσότερες παραμέτρους, ονομάζεται **παραμετρικό**.

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα τι ακριβώς εννοούμε λέγοντας παράμετρο και τι παραμετρικό σύστημα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 2)y = 2 \\ x - 4y = \lambda^2 \end{cases}$$
 με αγνώστους τα x και y .

Αφού τα x, y είναι οι άγνωστοι του συστήματος, έχουμε ότι το λ είναι μία παράμετρος του συστήματος με την έννοια ότι δίνοντας τιμές στο λ θα προκύπτει κάθε φορά και ένα καινούριο σύστημα. Για παράδειγμα:

Για $\lambda = 1$ έχουμε το σύστημα
$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x - 4y = 4 \end{cases},$$

Για $\lambda = 0$ έχουμε το σύστημα
$$\begin{cases} 2y = 2 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$
 και ούτω καθεξής.

Διερεύνηση- Λύση Παραμετρικού Συστήματος

Όταν έχουμε ένα παραμετρικό σύστημα τότε για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος λ προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα το οποίο όπως έχουμε πει μπορεί είτε να έχει μία μόνο λύση, είτε να είναι αδύνατο, είτε να έχει άπειρες λύσεις. Για να διερευνήσουμε αναλυτικά τι συμβαίνει ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου λ , ακολουθούμε συνήθως την παρακάτω μέθοδο.

1. Βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος ως συνάρτηση της παραμέτρου και τις παραγοντοποιούμε.
2. Βρίσκουμε για ποιες τιμές της παραμέτρου έχουμε $D = 0$.
3. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
 - α)** Για τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες $D \neq 0$ έχουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και βρίσκουμε (ως συνάρτηση της παραμέτρου) από τους τύπους $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$.
 - β)** Για τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες $D = 0$ έχουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Για κάθε μία από αυτές τις τιμές την αντικαθιστούμε στο αρχικό σύστημα και ελέγχουμε αν είναι αδύνατο ή αν έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση που έχει άπειρες λύσεις τις προσδιορίζουμε.

1.18 Παράδειγμα. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda^2 x + 2(y - 1) = \lambda \\ \lambda(2x + 1) + \lambda(y - 3) = 0 \end{cases}$$
 για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

Λύση

Μετασχηματίζουμε αρχικά τις εξισώσεις του συστήματος στην γενική μορφή γραμμικών εξισώσεων.

$$\begin{aligned}\lambda^2 x + 2(y - 1) &= \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 x + 2y - 2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 x + 2y = \lambda + 2 \\ \lambda(2x + 1) + \lambda(y - 3) &= 0 \Leftrightarrow 2\lambda x + \lambda + \lambda y - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x + \lambda y = 2\lambda\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} \lambda^2 x + 2y = \lambda + 2 \\ 2\lambda x + \lambda y = 2\lambda \end{cases}$. Βρίσκουμε πρώτα

τις ορίζουσες αυτού του συστήματος:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2) - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda + 2 \\ 2\lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^3 - 2\lambda(\lambda + 2) = 2\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 2\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση $D = 0$ βρίσκουμε $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$. Άρα αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση η οποία είναι:

$$\begin{aligned}x &= \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)} = \frac{1}{(\lambda+2)} \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)} = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+2)}\end{aligned}$$

Ελέγχουμε τώρα χωριστά τις περιπτώσεις $\lambda = 0$, $\lambda = 2$, $\lambda = -2$.

- Για $\lambda = 0$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Άρα για $\lambda = 0$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Για $\lambda = 2$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4x + 2y = 4 \Leftrightarrow 2x + y = 2$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για να προσδιορίσουμε τις άπειρες αυτές λύσεις, έχουμε:

$2x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2x$. Θέτοντας τώρα $x = k$ έχουμε ότι $y = 2 - 2k$. Άρα για $\lambda = 2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(k, 2 - 2k)$, $k \in \mathbb{R}$.

- Για $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -4x - 2y = -4 \end{cases} \cdot (-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$

Άρα για $\lambda = -2$ το σύστημα είναι αδύνατο.

1.19 Παράδειγμα. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \mu x + y = 1 \\ x + \mu y = -1 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D , D_x , D_y .

β) Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} = 8$.

Λύση

α) Οι εξισώσεις του συστήματος είναι στην γενική τους μορφή όποτε υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$\bullet D = \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 1 = (\mu - 1)(\mu + 1)$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \mu \end{vmatrix} = \mu + 1$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mu - 1 = -(\mu + 1)$$

β) Για $\mu \neq 1$ και $\mu \neq -1$ η ορίζουσα D του συστήματος είναι διαφορετική από το 0 οπότε σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα θα έχει μοναδική λύση. Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος, έχουμε ότι:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{\mu-1}, \quad y_0 = \frac{D_y}{D} = -\frac{1}{\mu-1}$$

Άρα για $\mu \neq 1$ και $\mu \neq -1$, έχουμε:

$$\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{(\mu-1)^2}} + \frac{1}{\frac{1}{(\mu-1)^2}} = 8 \Leftrightarrow 2(\mu-1)^2 = 8 \Leftrightarrow (\mu-1)^2 = 4$$

Άρα: $\mu - 1 = 2 \Leftrightarrow \mu = 3$ ή $\mu - 1 = -2 \Leftrightarrow \mu = -1$.

Η λύση $\mu = -1$ δεν είναι δεκτή λόγω των περιορισμών. Άρα η ζητούμενη λύση είναι η $\mu = 3$.

1.2.6 Σχέσεις μεταξύ οριζουσών

1.20 Παράδειγμα. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y ενός 2×2 γραμμικού συστήματος ισχύει η σχέση:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 + 21 = 2D - 4D_x + 8D_y$$

Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση και στην συνέχεια να βρεθεί η μοναδική λύση του συστήματος αυτού.

Λύση

Παρατηρούμε ότι αν μεταφέρουμε όλους τους όρους της παραπάνω ισότητας στο αριστερό μέλος και γράψουμε το 21 ως $1+4+16$ θα δημιουργηθούν 3 τέλεια τετράγωνα.

$$\begin{aligned} D^2 + D_x^2 + D_y^2 + 21 &= 2D - 4D_x + 8D_y \Leftrightarrow \\ D^2 - 2D + 1 + D_x^2 + 4D_x + 4 + D_y^2 - 8D_y + 16 &= 0 \Leftrightarrow \\ (D-1)^2 + (D_x+2)^2 + (D_y-4)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Άρα: ²

$$D - 1 = 0 \Leftrightarrow D = 1 \quad \text{και} \quad D_x + 2 = 0 \Leftrightarrow D_x = -2 \quad \text{και} \quad D_y - 4 = 0 \Leftrightarrow D_y = 4$$

Από το γεγονός ότι $D = 1 \neq 0$, έχουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Η μοναδική λύση αυτού του συστήματος είναι: $x = \frac{D_x}{D} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = 4$.

²Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ και $\gamma = 0$.

1.21 Παράδειγμα. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων, με αγνώστους x και y έχει μοναδική λύση και επιπλέον για τις ορίζουσες D , D_x , D_y ισχύει ότι:

$$5D_x + 4D_y = 7D \text{ και } 4D_x + 5D_y = 2D$$

Να κατασκευάσετε το σύστημα και στην συνέχεια να το επιλύσετε.

Λύση

Αφού το σύστημα έχει μοναδική λύση έχουμε ότι $D \neq 0$. Επιπλέον $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$. Διαιρώντας τώρα τις δοσμένες ισότητες με $D \neq 0$, έχουμε:

$$5D_x + 4D_y = 7D \Leftrightarrow 5\frac{D_x}{D} + 4\frac{D_y}{D} = 7 \Leftrightarrow 5x + 4y = 7 \quad (1)$$

$$4D_x + 5D_y = 2D \Leftrightarrow 4\frac{D_x}{D} + 5\frac{D_y}{D} = 2 \Leftrightarrow 4x + 5y = 2 \quad (2)$$

Το ζητούμενο σύστημα τώρα είναι το σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις (1) και (2). Επιλύουμε αυτό το σύστημα με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-5) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 16y = 28 \\ -20x - 25y = -10 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις, έχουμε:

$$-9y = 18 \Leftrightarrow y = -2$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$5x + 4 \cdot (-2) = 7 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (3, -2)$.

1.2.7 Γραμμικά Συστήματα Τριών Εξισώσεων με Τρεις Αγνώστους

Μία γραμμική εξίσωση με αγνώστους τα x , y , z έχει την μορφή $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Λύση μίας τέτοιας εξίσωσης ονομάζουμε κάθε τριάδα (x_0, y_0, z_0) πραγματικών αριθμών για την οποία $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \delta$.³

Ένα παράδειγμα μίας τέτοιας εξίσωσης είναι η $-2x + y + \sqrt{2}z = 4$. Μία λύση αυτής της εξίσωσης είναι η τριάδα $(x, y, z) = (1, 6, 0)$ αφού $-2 \cdot 1 + 6 + \sqrt{2} \cdot 0 = 4$. Μία άλλη λύση αυτής της εξίσωσης είναι η τριάδα $(x, y, z) = (-2, -2, \sqrt{2})$ αφού $-2 \cdot (-2) + (-2) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$.

Ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή αλλιώς ένα γραμμικό 3×3 σύστημα έχει την γενική μορφή:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε την μέθοδο της αντικατάστασης ή την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών⁴. Θα δούμε αναλυτικά πως εφαρμόζουμε αυτές τις μεθόδους για ένα 3×3 γραμμικό σύστημα.

³Χρησιμοποιούμε επίσης την έκφραση: Η τριάδα (x_0, y_0, z_0) επαληθεύει την εξίσωση $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$.

⁴Η μέθοδος των οριζουσών μπορεί κατάλληλα να χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος, αλλά αυτό είναι κάτι που δεν θα μας απασχολήσει σε αυτό το μάθημα.

1.22 Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

Λύση

Με την μέθοδο της αντικατάστασης

Αρχικά αριθμούμε τις εξισώσεις του συστήματος έτσι ώστε να μπορούμε να αναφερόμαστε ποιο εύκολα σε αυτές:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & (1) \\ x - y + z = 0 & (2) \\ 3x - 2y + 2z = -1 & (3) \end{cases}$$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση (1) ως προς τον άγνωστο y έχουμε:

$$2x + y + z = 3 \Leftrightarrow y = -2x - z + 3 \quad (4)$$

Από την εξίσωση (4) τώρα, αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$x - (-2x - z + 3) + z = 0 \Leftrightarrow x + 2x + z - 3 + z = 0 \Leftrightarrow 3x + 2z = 3 \quad (5)$$

Από την εξίσωση (4) τώρα, αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$3x - 2(-2x - z + 3) + 2z = -1 \Leftrightarrow 3x + 4x + 2z - 6 + 2z = -1 \Leftrightarrow 7x + 4z = 5 \quad (6)$$

Οι εξισώσεις τώρα (5) και (6) αποτελούν ένα 2×2 γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x + 2z = 3 \\ 7x + 4z = 5 \end{cases}$

το οποίο και επιλύουμε με όποιο τρόπο θέλουμε.

Υπολογίζοντας τις ορίζουσες του συστήματος, έχουμε: $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -2$,

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad D_z = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -6. \text{ Άρα } x = \frac{D_x}{D} = -1 \text{ και } z = \frac{D_z}{D} = 3.$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές των x και z στην εξίσωση (4), έχουμε:

$$y = -2x - z + 3 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) - 3 + 3 \Rightarrow y = 2. \quad (3)$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$

Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 & (1) \\ x - y + z = 0 & (2) \\ 3x - 2y + 2z = -1 & (3) \end{cases}$$

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλους αριθμούς τις εξισώσεις, δημιουργούμε αντίθετους συντελεστές στην πρώτη μεταβλητή κάθε εξίσωσης. Στην συνέχεια προσθέτουμε τις εξισώσεις κατά μέλη και έτσι προκύπτει μία καινούρια εξίσωση με τους άλλους δύο αγνώστους.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη έχουμε } 3y - z = 3 \quad (4)$$

Θεωρώντας τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3), δημιουργούμε πάλι αντίθετους συντελεστές για την πρώτη μεταβλητή, έτσι ώστε προσθέτοντας κατά μέλη να

δημιουργηθεί μία νέα εξίσωση με τους δύο άλλους αγνώστους και έτσι μαζί με την προηγούμενη εξίσωση να έχουμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - 2y + 2z = -1 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot (-2) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y + 3z = 9 \\ -6x + 4y - 4z = 2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη έχουμε $7y - z = 11$ (5)

Λύνουμε τώρα το σύστημα το εξισώσεων (4) και (5) με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} 3y - z = 3 \\ 7y - z = 11 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \cdot (-3) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x - 7z = 21 \\ -21x + 3z = -33 \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$-4z = -12 \Leftrightarrow z = 3$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή που βρήκαμε για το z εξίσωση (5), έχουμε:

$$7y - 3 = 11 \Leftrightarrow 7y = 14 \Leftrightarrow y = 2$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές που βρήκαμε για τα y και z εξίσωση (1), έχουμε:

$$2x + 2 + 3 = 3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

1.23 Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Λύση

$$\text{Αριθμούμε τις εξισώσεις του συστήματος: } \begin{cases} -x + y - 2z = 1 & (1) \\ 2x + y - z = 1 & (2) \\ 2x - 2y + 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση (1) ως προς τον άγνωστο x έχουμε:

$$-x + y - 2z = 1 \Leftrightarrow x = y - 2z - 1 \quad (4)$$

Από την εξίσωση (4) τώρα, αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$2(y - 2z - 1) + y - z = 1 \Leftrightarrow 2y - 4z - 2 + y - z = 1 \Leftrightarrow 3y - 4z = 3 \quad (5)$$

Από την εξίσωση (4) τώρα, αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$2(y - 2z - 1) - 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow 2y - 4z - 2 + 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \quad (6)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη, συνεπώς το σύστημα δεν έχει καμία λύση.

1.24 Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 12y - \omega = -6 \\ x + 2y + \omega = 4 \\ 3x - y + 2\omega = 7 \end{cases}$$

Λύση

Αριθμούμε τις εξισώσεις του συστήματος:
$$\begin{cases} x - 12y - \omega = -6 & (1) \\ x + 2y + \omega = 4 & (2) \\ 3x - y + 2\omega = 7 & (3) \end{cases}$$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση (1) ως προς τον άγνωστο x έχουμε:

$$x - 12y - \omega = -6 \Leftrightarrow x = 12y + \omega - 6 \quad (4)$$

Από την εξίσωση (4) τώρα, αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$12y + \omega - 6 + 2y + \omega = 4 \Leftrightarrow 14y + 2\omega = 10 \Leftrightarrow 7y + \omega = 5 \quad (5)$$

Από την εξίσωση (4) τώρα, αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$3(12y + \omega - 6) - y + 2\omega = 7 = 0 \Leftrightarrow 35y + 5\omega = 25 \Leftrightarrow 7y + \omega = 5 \quad (6)$$

Οι εξισώσεις (5) και (6) είναι ίδιες, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Λύνοντας την (5) ως προς ω έχουμε $\omega = -7y + 5$ (7) Θέτοντας τώρα $y = k$ από την εξίσωση (7) έχουμε ότι $\omega = -7k + 5$ και αντικαθιστώντας στην (4), έχουμε: $x = 12k - 7k + 5 - 6 \Leftrightarrow x = 5k - 1$.

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x, y, \omega) = (5k - 1, k, -7k + 5), \quad k \in \mathbb{R}$$

1.2.8 Συστήματα που λύνονται με τεχνάσματα

,

1.25 Παράδειγμα. Να επιλυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y + z + \omega = -6 & (1) \\ 2x + \omega = 4 & (2) \\ 2y + \omega = 7 & (3) \\ 2z + \omega = -3 & (4) \end{cases}$$

Λύση

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (2), (3), (4) έχουμε:

$$2(x + y + z) + 3\omega = 8 \quad (5)$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε ότι:

$$x + y + z = -6 - \omega \quad (6)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (5) και (6), έχουμε:

$$2(-6 - \omega) + 3\omega = 8 \Leftrightarrow -12 - 2\omega + 3\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 20$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή που βρήκαμε για το ω στην εξίσωση (2), έχουμε:

$$2x + 20 = 4 \Leftrightarrow 2x = -16 \Leftrightarrow x = -8$$

Όμοια για $\omega = 20$ στις εξισώσεις (3) και (4), βρίσκουμε $y = -\frac{13}{2}$ και $z = -\frac{23}{2}$.

1.26 Παράδειγμα. Να επιλυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{3-\omega}{4} \\ 2x - 4y + \omega = 5 \end{cases}$$

Λύση

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να επιλυθεί πιο γρήγορα κάνοντας το εξής τέχνασμα:

Θέτουμε: $\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{3-\omega}{4} = k$, οπότε τώρα μπορούμε να εκφράσουμε και τους τρεις αγνώστους συναρτήσει του k .

$$\bullet \frac{x-5}{2} = k \Leftrightarrow x = 2k + 5 \quad (1)$$

$$\bullet \frac{y+4}{3} = k \Leftrightarrow y = 3k - 4 \quad (2)$$

$$\bullet \frac{3-\omega}{4} = k \Leftrightarrow \omega = -4k + 3 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση $2x - 4y + \omega = 5$ έχουμε:

$$2(2k+5) - 4(3k-4) - 4k + 3 = 5 \Leftrightarrow 4k + 10 - 12k + 16 - 4k + 3 = 5 \Leftrightarrow -12k = -24 \Leftrightarrow k = 2$$

Αντικαθιστώντας τώρα $k = 2$ στην εξίσωση (1) έχουμε ότι $x = 9$, στην εξίσωση (2) έχουμε ότι $y = 2$ και στην εξίσωση (3) έχουμε ότι $\omega = -5$.

1.3 Ασκήσεις

1. Να βρείτε τις λύσεις των παρακάτω γραμμικών εξισώσεων και στην συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά.

α) $2x + y = 2$, **β)** $\frac{\sqrt{3}}{2}x - y = 0$

2. Δίνεται η εξίσωση $\epsilon : 3x + 4y = 12$.

- α)** Είναι η παραπάνω εξίσωση γραμμική;
- β)** Να εξετάσετε ποια από τα ζεύγη $(-4, 6)$, $(3, 1)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$ είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση.
- δ)** Τι παριστάνει η παραπάνω εξίσωση;
- ε)** Να βρείτε τα σημεία τομής της (ϵ) με τους άξονες.
- στ)** Να σχεδιάσετε την ϵ σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

3. Δίνεται η εξίσωση $2x + 3y = 1$.

- α)** Είναι η παραπάνω εξίσωση γραμμική;
- β)** Να εξετάσετε ποια από τα ζεύγη $(2, -1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$ είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.
- γ)** Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ το ζεύγος $(2\alpha, \alpha - 1)$ είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.
- δ)** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το ζεύγος $(\frac{\lambda}{2} - 1, \frac{\lambda}{3})$ είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.
- ε)** Να λύσετε την εξίσωση.

4. Δίνεται η γραμμική εξίσωση: $\lambda x + (\lambda - 5)y = 6$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν το ζεύγος $(6, 2)$ είναι λύση της εξίσωσης, τότε:

- α)** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$,
- β)** Να σχεδιάσετε την ευθεία που παριστάνει η εξίσωση σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

5. Δίνεται η εξίσωση $3x + 5y = 7$.

- α)** Να δείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}$ το ζεύγος $(k, \frac{7-3k}{5})$ είναι λύση της εξίσωσης.
- β)** Να δείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R}$ το ζεύγος $(\frac{7-5k}{3}, k)$ είναι λύση της εξίσωσης.
- γ)** Να βρεθεί μία εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την $3x + 5y = 7$.

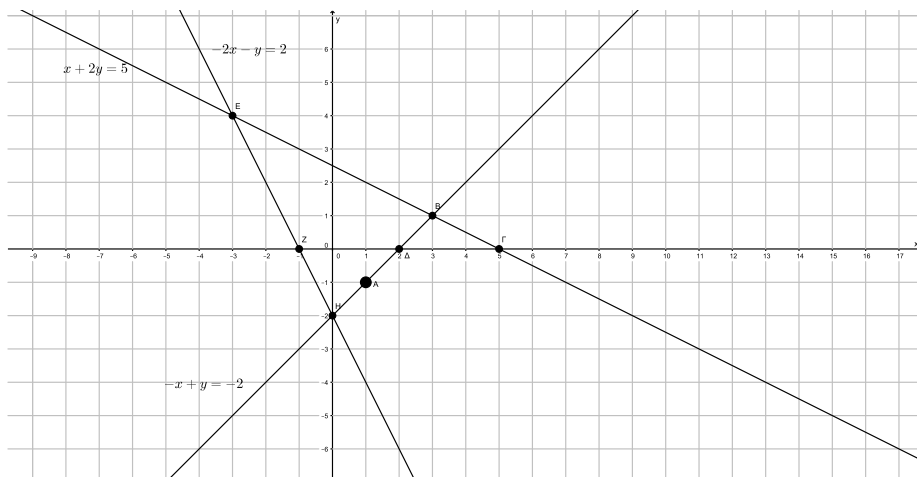
6. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

- α)** $A(1, 5)$ και $B(-1, 1)$, **β)** $A(5, -1)$ και $B(-18, 22)$,
- γ)** $A(-2, -6)$ και $B(3, -6)$, **δ)** $A(-2, 6)$ και $B(-2, 1)$.

7. Για τις παρακάτω ευθείες, να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης και τα σημεία τομής τους με τους άξονες:

$$\alpha) \epsilon_1 : 2x - y = 4, \quad \beta) \epsilon_2 : x - 2y = 5, \quad \gamma) \epsilon_3 : y + 3 = 0$$

8. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε την λύση των παρακάτω συστημάτων:



$$\alpha) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 2 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} -x - 2y = -5 \\ -x + y = -2 \end{cases}, \quad \gamma) \begin{cases} -x + y = -2 \\ -2x - y = 2 \end{cases},$$

$$\delta) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \epsilon) \begin{cases} y = 0 \\ -2x - y = 2 \end{cases}$$

9. Να λυθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = -2 \\ x - 3y = 3 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = 2x \end{cases}, \quad \gamma) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases},$$

$$\delta) \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}, \quad \epsilon) \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 3 \end{cases}, \quad \sigma\tau) \begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

10. Να λυθούν με την μέθοδο της αντικατάστασης τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} -x + 5y = 20 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases},$$

$$\gamma) \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}, \quad \delta) \begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

11. Να λυθούν με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα παρακάτω συστήματα :

$$\begin{aligned} \alpha) & \begin{cases} 7\kappa - \lambda = 1 \\ 2\kappa + \lambda = 8 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} 5x + 4y = -14 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases}, \\ \gamma) & \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{18}y = \sqrt{50} \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}, \quad \delta) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

12. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

$$\begin{aligned} \alpha) & \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{2x}{3} + \frac{1-y}{6} = \frac{3}{2} \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} \frac{x-2y}{3} - \frac{x-3y}{4} = \frac{1}{12} \\ \frac{x-y}{4} + \frac{x+2y}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}, \\ \gamma) & \begin{cases} \frac{x-\frac{y}{3}}{3} = \frac{1}{6} \\ 2(x - \frac{y}{2}) + 3(\frac{x}{3} - 1) = -2 \end{cases}, \end{aligned}$$

13. Δίνεται η ευθεία $\epsilon : y = (\lambda + \mu)x + 2\lambda - \mu$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές των λ, μ , αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : y = -2x + 2016$.

14. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$

15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - 1)x - (\beta + 1)y = -\alpha - \beta \\ (\beta + 1)x + \beta y = 3\alpha + 3 \end{cases}$ με αγνώστους τα x, y .
Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε το σύστημα να έχει λύση, τη $(x, y) = (2, 3)$.

16. Να λυθούν με την μέθοδο των οριζουσών τα παρακάτω συστήματα :

$$\begin{aligned} \alpha) & \begin{cases} 2x + 13y = 11 \\ -7x + 5y = 12 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 5 \\ \sqrt{18}x - 3y = -3 \end{cases}, \\ \gamma) & \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = 1 \\ x - (\sqrt{2} + 1)y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}, \quad \delta) \begin{cases} x + (\sqrt{7} - 1)y = -1 \\ (\sqrt{7} + 1)x + 6y = \sqrt{7} - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

17. Να διερευνήσετε και να λύσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = \lambda \\ 6x - (\lambda - 2)y = 4 \end{cases}, \quad \gamma) \begin{cases} \lambda^2 x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$

18. Να διερευνήσετε και να λύσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) \begin{cases} \mu x + 7\mu y = 35 - 2x + 21y \\ x + (\mu - 3)y = \mu \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} \mu x - 3y = 1 \\ 3x + (\mu - 6)y = 1 \end{cases}, \quad \gamma) \begin{cases} 2x - 8y = 6\mu \\ -x + 4y = 2\mu - 5 \end{cases}$$

19. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω συστήματα έχουν μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Στην συνέχεια να προσδιορίσετε την λύση αυτή.

$$\alpha) \begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} \lambda x - 3y = 1 \\ 4x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases}$$

20. Να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 2015 \\ x + \lambda y = \lambda + 2016 \end{cases}$ δεν έχει άπειρες λύσεις για καμία τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
21. Αν το σύστημα $\begin{cases} x + \lambda y = -\lambda + 1 \\ \lambda x + 4y = -6 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, να αποδείξετε ότι και το σύστημα $\begin{cases} (1 - \lambda)x - \lambda^2 y = -\frac{\lambda}{2} \\ (\lambda^3 - 1)x - 6\lambda y = \lambda - 1 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
22. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (2\mu - 3)x + y = \mu + 4 \\ 5\mu x - 3y = 3\mu + 2 \end{cases}$ με $\mu \in \mathbb{R}$. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(10, t)$, να βρείτε το t .
23. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : \alpha x + y = 1$ και $\epsilon_2 : x + \alpha y = -1$. Να βρεθεί η σχετική θέση των δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
24. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : \lambda x - 12y - 15\lambda = 0$ και $\epsilon_2 : x + \lambda y = 3 - \lambda^2$.
- Ναδειχθεί ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Για κάθε τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους ως συνάρτηση του λ .
25. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases}$
- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση.
 - β)** Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x_0 + y_0 = \frac{11}{13}$.
26. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 4 \\ x + \lambda y = -4 \end{cases}$.
- α)** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.
 - β)** i) Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) .
ii) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε να ισχύει $|x_0| + |y_0| > 1$
27. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \mu^2 x + y = 1 \\ \mu x + y = 1 \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}^*$.
- α)** Να βρεθεί η τιμή του μ έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.
 - β)** Για την τιμή του μ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:
 - i) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 4\mu - 2)y = 8\mu - 4 \\ (\lambda + \mu - 3)x + \lambda y = 1 + \mu \end{cases}$ έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)
 - ii) Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) .

iii) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε να ισχύει $|x_0 - y_0| = 12$

28. Αν D είναι η ορίζουσα του συστήματος (Σ) :
$$\begin{cases} (9 + D)x + (8 + D)y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases},$$

τότε :

α) να αποδείξετε ότι $D = -7$,

β) να λύσετε το σύστημα (Σ) ,

γ) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η λύση του (Σ) να είναι και λύση του συστήματος
$$\begin{cases} (\alpha + 1)x - 3\beta = 3 \\ 2\alpha x - (\beta + 1)y = -4 \end{cases}$$

29. Έστω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, για τις ορίζουσες του οποίου ισχύει :

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2(D + D_x - 2D_y) = -6$$

Να αποδειχθεί ότι το σύστημα έχει μοναδική μοναδική λύση, η οποία και να βρεθεί.

30. Αν ένα γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους x, y έχει μοναδική μοναδική λύση και για τις ορίζουσες συστήματος ισχύει :

$$D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 - 2D \cdot D_x + 4D \cdot D_y = 0$$

να βρεθούν τα x, y .

31. Έστω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους με μοναδική λύση (x_0, y_0) και ορίζουσες D, D_x, D_y . Αν ισχύουν οι σχέσεις $D_x + D_y = 3D$ και $x_0 - y_0 = -1$ να βρεθεί η λύση (x_0, y_0) .

32. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \begin{cases} x + y + \omega = 11 \\ 2x - y + \omega = 5 \\ 3x + 2y + \omega = 24 \end{cases} & \beta) \begin{cases} 4x + y + \omega = -1 \\ 2x + y - 3\omega = -6 \\ 2x - 4y - 5\omega = 12 \end{cases} \\ \gamma) \begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ 2x - 3y - 2\omega = 2 \\ 3x - 2y - \omega = -3 \end{cases} & \delta) \begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ x + 2y - 3\omega = 2 \\ 2x + 3y - 2\omega = 3 \end{cases} \\ \epsilon) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ 2x - 5y + 6z = 38 \end{cases} & \sigma) \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{\omega}{18} \\ 2x + 2y - \omega = 4 \end{cases} \end{array}$$

33. Να λυθεί η εξίσωση $|x - y + \omega - 7| + |x + y - \omega = 1| + (y - x + \omega - 3)^2 = 0$

2 Μη Γραμμικά Συστήματα

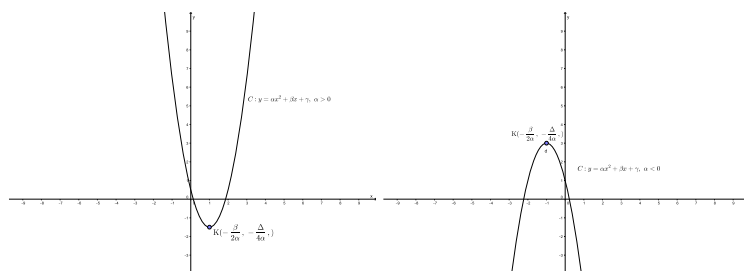
2.1 Στοιχεία Θεωρίας

- Ένα σύστημα καλείται **μη γραμμικό**, αν τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις του συστήματος είναι μη γραμμική. Για παράδειγμα τα συστήματα

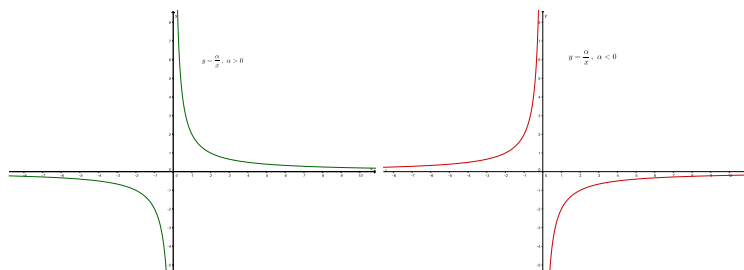
$$\begin{cases} xy = 1 \\ 3x + \frac{2}{3}y = -6 \end{cases}, \begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases} \quad \text{δεν είναι γραμμικά.}$$

- Για την επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος δεν υπάρχει γενική μέθοδος επίλυσης που να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Στην συνέχεια θα κατηγοριοποιήσουμε μερικές περιπτώσεις μη γραμμικών συστημάτων στις οποίες μπορούμε να εφαρμόζουμε συγκεκριμένες μεθόδους.
- Ένα μη γραμμικό σύστημα αν έχει λύση τότε αυτή δεν είναι απαραίτητα μοναδική.
- Για κάποιες μη γραμμικές εξισώσεις γνωρίζουμε πως να τις παραστήσουμε γραφικά.⁵ Αναφέρουμε εδώ μερικές τέτοιες εξισώσεις:

- Η εξίσωση $y = ax^2 + bx + \gamma$ παριστάνει μία παραβολή με κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$.

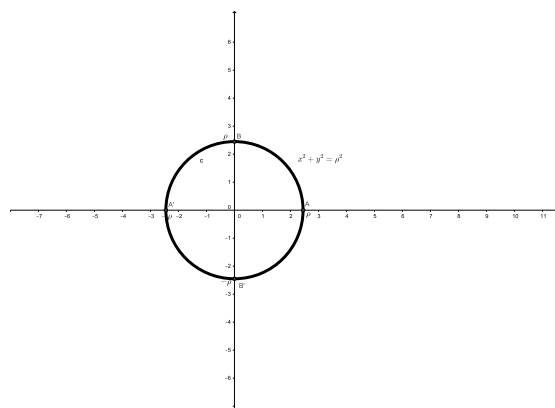


- Η εξίσωση $xy = \alpha$ με $\alpha \neq 0$ παριστάνει μία υπερβολή. Παρατηρούμε ότι $x \neq 0$ γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $0 = \alpha$. Όμοια, $y \neq 0$. Συνεπώς η εξίσωση $xy = \alpha$ με $\alpha \neq 0$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στην μορφή $y = \frac{\alpha}{x}$ και στην μορφή $x = \frac{\alpha}{y}$. Επιπλέον το γράφημα της $xy = \alpha$ με $\alpha \neq 0$ αποτελείται από δύο κλάδους.



⁵Λέγοντας να παραστήσουμε τις εξισώσεις γραφικά εννοούμε το σχήμα που προκύπτει αν τοποθετήσουμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα ζεύγη που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης.

- Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ παριστάνει ένα κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας ρ . Ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(\rho, 0)$, $(-\rho, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0, \rho)$, $(0, -\rho)$.



2.1 Παράδειγμα. Να παρασταθούν γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - y = -4 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}, \beta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 + 2x - 4 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} y = x \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

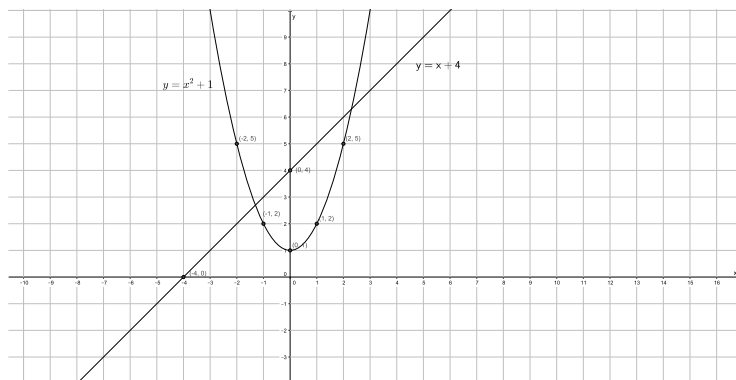
Λύση

α)

- Η εξίσωση $x - y = -4 \Leftrightarrow y = x + 4$ παριστάνει μία ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-4, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 4)$.
- Η εξίσωση $y - x^2 = 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$ παριστάνει μία παραβολή με κορυφή το σημείο $(0, 1)$ ⁶. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών για να βρούμε μερικά επιπλέον σημεία από τα οποία διέρχεται η παραβολή αυτή.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 1$	5	2	1	2	5

Σχεδιάζοντας τώρα σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy έχουμε:



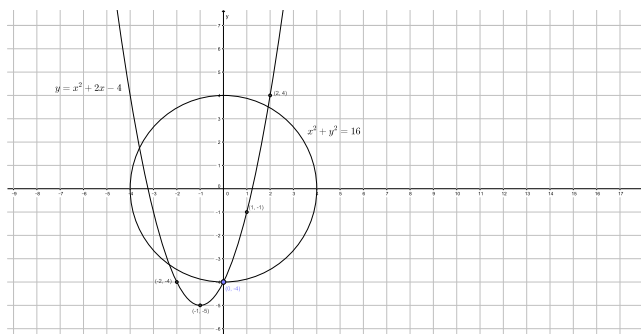
⁶Είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$

β)

- Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4.
- Η εξίσωση $y = x^2 + 2x - 4$ παριστάνει μία παραβολή με κορυφή το σημείο $(-1, -5)$. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών για να βρούμε μερικά επιπλέον σημεία από τα οποία διέρχεται η παραβολή αυτή.

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2 + 2x - 4$	-4	-5	-4	-1	4

Σχεδιάζοντας τώρα σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy έχουμε:

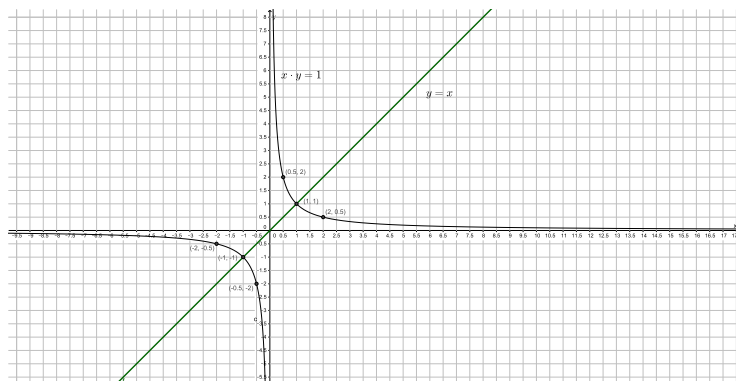


γ)

- Η εξίσωση $y = x$ παριστάνει μία ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ένα ακόμα σημείο από το οποίο διέρχεται είναι το $(1, 1)$.
- Η εξίσωση $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ παριστάνει μία υπερβολή. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών για να βρούμε μερικά σημεία από τα οποία διέρχεται η υπερβολή αυτή.

x	-2	-1	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$

Σχεδιάζοντας τώρα σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy έχουμε:



2.2 Μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων

2.2.1 Η μία από τις δύο εξισώσεις επιλύεται ως προς τον ένα άγνωστο

Όταν μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος επιλύεται ως προς τον ένα άγνωστο, αντικαθιστούμε αυτόν τον άγνωστο στην άλλη εξίσωση και έτσι δημιουργείται μία εξίσωση με μόνο τον ένα άγνωστο. Για κάθε μία λύση της εξίσωσης αυτής βρίσκουμε την αντιστοιχη τιμή του άλλου αγνώστου.

2.2 Παράδειγμα. Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - y = -3 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}, \quad \beta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x \cdot y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} x - y = -3 & (1) \\ y - x^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

1ος Τρόπος:

Επιλύουμε την εξίσωση (1) ως προς την μεταβλητή y και αντικαθιστούμε στην (2).
 $x - y = -3 \Leftrightarrow y = x + 3$ (3). Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$x + 3 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Η διακρίνουσα της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta = 9$. Άρα οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι:

$$x = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1-3}{2} = -1$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές του x που βρήκαμε στην εξίσωση (3) και έχουμε:
 Για $x = 2$ βρίσκουμε $y = 5$ και για $x = -1$ βρίσκουμε $y = 2$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(x, y) = (2, 5)$ και $(x, y) = (-1, 2)$.

2ος Τρόπος:

Επιλύουμε την εξίσωση (2) ως προς την μεταβλητή y και αντικαθιστούμε στην (1).
 $y - x^2 = 1 \Leftrightarrow y = x^2 + 1$ (3). Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$x - (x^2 + 1) = -3 \Leftrightarrow x - x^2 - 1 = -3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές του x που βρήκαμε στην εξίσωση (3) και έχουμε:
 Για $x = 2$ βρίσκουμε $y = 5$ και για $x = -1$ βρίσκουμε $y = 2$. Άρα, όπως και με τον πρώτο τρόπο, έχουμε ότι οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(x, y) = (2, 5)$ και $(x, y) = (-1, 2)$.

$$\beta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 & (1) \\ x \cdot y = 2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Επιλύουμε την εξίσωση (2) ως προς την μεταβλητή y και αντικαθιστούμε στην (1).
 $x \cdot y = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{x}$ (3). Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$x^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 + \frac{12}{x^2} = 7 \Leftrightarrow x^4 + 12 = 7x^2 \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x^2 (διτετράγωνη). Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$.

Η διακρίνουσα της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta = 1$. Άρα οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\omega = \frac{7+1}{2} = 4 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{7-1}{2} = 3$$
$$\text{Άρα: } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2, \quad x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}.$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις τιμές του x που βρήκαμε στην εξίσωση (3) και έχουμε:
Για $x = 2$ βρίσκουμε $y = \sqrt{3}$, για $x = -2$ βρίσκουμε $y = -\sqrt{3}$, για $x = \sqrt{3}$ βρίσκουμε $y = 2$ και για $x = -\sqrt{3}$ βρίσκουμε $y = -2$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη:

$$(x, y) = (2, \sqrt{3}), (x, y) = (-2, -\sqrt{3}), (x, y) = (\sqrt{3}, 2), (x, y) = (-\sqrt{3}, -2).$$

2.2.2 Μετατροπή ενός μη γραμμικού συστήματος σε απλούστερο με την χρήση βοηθητικών αγνώστων

Όπως έχουμε δει μπορούμε πάντα να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα. Μερικές φορές όταν έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα, τότε θέτοντας κατάλληλες ποσότητες που περιέχουν τις αρχικές μας μεταβλητές με άλλες μεταβλητές το σύστημα ανάγεται σ' ένα γραμμικό σύστημα ως προς τις καινούριες μεταβλητές, το οποίο μπορούμε να επιλύσουμε. Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας βρίσκουμε τις τιμές για τους αρχικούς μας αγνώστους.

2.3 Παράδειγμα. Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y} = 7 \\ \frac{4}{x-1} + \frac{3}{y} = 6 \end{cases}, \beta) \begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 9 \\ 3x^2 - 2y^2 = 8 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} 3x + |2y - 2| = 5 \\ 4x + |y - 1| = -5 \end{cases}, \delta) \begin{cases} 2x - 4y + \frac{1}{x-y} = 2 \\ x - 2y + \frac{1}{x-y} = 4 \end{cases}$$

Λύση

α) Αρχικά θέτουμε περιορισμούς για του αγνώστους του συστήματος. Θα πρέπει:

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } y \neq 0$$

Θέτοντας τώρα $\frac{1}{x-1} = \omega$ και $\frac{1}{y} = \phi$ το σύστημα $\begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{y} = 7 \\ \frac{4}{x-1} + \frac{3}{y} = 6 \end{cases}$, μετατρέπεται

στο σύστημα $\begin{cases} \omega - 2\phi = 7 \\ 4\omega + 3\phi = 6 \end{cases}$, το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα. Επιλύοντας το σύστημα με μία από τις μεθόδους που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο (π.χ με την μέθοδο της αντικατάστασης), βρίσκουμε ότι $\omega = 3$ και $\phi = -2$. Αντικαθιστώντας τώρα έχουμε:

$$\frac{1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ και } \frac{1}{y} = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{2})$.

β) Θέτοντας $x^2 = \omega$ και $y^2 = \phi$ το σύστημα $\begin{cases} 2x^2 - 5y^2 = 9 \\ 3x^2 - 2y^2 = 8 \end{cases}$, μετατρέπεται στο

σύστημα $\begin{cases} 2\omega - 5\phi = 9 \\ 3\omega - 2\phi = 8 \end{cases}$ το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα. Επιλύοντας το σύστημα, βρίσκουμε ότι $\omega = 2$ και $\phi = -1$. Όμως $\phi = y^2 \geq 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Θέτοντας $|y - 1| = \omega$ το σύστημα $\begin{cases} 3x + |2y - 2| = 5 \\ 4x + |y - 1| = -5 \end{cases}$, μετατρέπεται στο

σύστημα $\begin{cases} 3x + 2\omega = 5 \\ 4x + \omega = -5 \end{cases}$ το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα. Επιλύοντας το σύστημα, βρίσκουμε ότι $x = -3$ και $\omega = 7$. Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή που βρήκαμε για το ω έχουμε:

$$|y - 1| = 7 \Leftrightarrow y - 1 = 7 \text{ ή } y - 1 = -7 \Leftrightarrow y = 8 \text{ ή } y = -6$$

Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις $(x, y) = (-3, 8)$ και $(x, y) = (-3, -6)$.

δ) Αρχικά θέτουμε περιορισμούς για τους αγνώστους του συστήματος. Θα πρέπει:

$$x - y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq y$$

Έχουμε τώρα: $\begin{cases} 2x - 4y + \frac{1}{x-y} = 2 \\ x - 2y + \frac{1}{x-y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 2y) + \frac{1}{x-y} = 2 \\ x - 2y + \frac{1}{x-y} = 4 \end{cases}$. Άρα, θέτο-

ντας $x - 2y = \omega$ (1) και $\frac{1}{x-y} = \phi$ (2) το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} 2\omega + \phi = 2 \\ \omega + \phi = 4 \end{cases}$, το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα. Λύνοντας το σύστημα αυτό, βρίσκουμε ότι:

$$\omega = -2 \text{ και } \phi = 6$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ \frac{1}{x-y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - y = \frac{1}{6} \end{cases}$.

Επιλύοντας το τελευταίο σύστημα, βρίσκουμε ότι:

$$x = \frac{7}{3} \text{ και } y = \frac{13}{6}$$

Άρα το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (\frac{7}{3}, \frac{13}{6})$ η οποία είναι δεκτή αφού ικανοποιεί τον περιορισμό $x \neq y$.

2.2.3 Συστήματα που ανάγονται σε δύο η περισσότερα απλούστερα συστήματα

Σε κάποια μη γραμμικά συστήματα μπορούμε να φτιάσουμε στην λύση τους αν ανάγουμε την λύση τους στην επίλυση δύο η περισσότερων συστημάτων τα οποία είναι απλούστερα να επιλυθούν. Οι λύσεις του αρχικού μας συστήματος θα είναι οι λύσεις όλων των επιμέρους συστημάτων.

2.4 Παράδειγμα. Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} |2x - 1| = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}, \beta) \begin{cases} (2x - 5y - 9)(6x - 4y + 1) = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} x^2 - x + y^2 - y = 2 - 2xy \\ y^2 - 2xy = 1 - x^2 \end{cases},$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} |2x - 1| = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 5 \text{ ή } 2x - 1 = -5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με τα εξής δύο συστήματα:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} 2x - 1 = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} 2x - 1 = -5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Επιλύουμε το κάθε σύστημα χωριστά και έχουμε:

- Για το $\Sigma_1 : \begin{cases} 2x - 1 = 5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Από την εξίσωση (1) του συστήματος έχουμε:

$$2x - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (2), έχουμε:

$$9 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα το σύστημα Σ_1 έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (3, 0)$.

- Για το $\Sigma_2 : \begin{cases} 2x - 1 = -5 & (1) \\ x^2 + y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Από την εξίσωση (1) του συστήματος έχουμε:

$$2x - 1 = -5 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (2), έχουμε:

$$4 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt{5} \text{ ή } y = -\sqrt{5}$$

Άρα το σύστημα Σ_2 έχει λύση τα ζεύγη $(x, y) = (-2, \sqrt{5})$ και $(x, y) = (-2, -\sqrt{5})$.

Άρα το αρχικό μας σύστημα έχει λύση τα ζεύγη:

$$(x, y) = (3, 0), (x, y) = (-2, \sqrt{5}) \text{ και } (x, y) = (-2, -\sqrt{5}).$$

β)

$$\begin{cases} (2x - 5y - 9)(6x - 4y + 1) = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \text{ ή } 6x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \text{ ή } 6x - 4y + 1 = 0 \\ x = y \text{ ή } x = -y \end{cases}$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με τα εξής τέσσερα συστήματα:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \\ x = y \end{cases}, & \Sigma_2 : \begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \\ x = -y \end{cases}, \\ \Sigma_3 : \begin{cases} 6x - 4y + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}, & \Sigma_4 : \begin{cases} 6x - 4y + 1 = 0 \\ x = -y \end{cases} \end{aligned}$$

Επιλύουμε το κάθε σύστημα χωριστά και έχουμε:

- Το $\Sigma_1 : \begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \\ x = y \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (-3, -3)$.
- Το $\Sigma_2 : \begin{cases} 2x - 5y - 9 = 0 \\ x = -y \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (\frac{9}{7}, -\frac{9}{7})$.
- Το $\Sigma_3 : \begin{cases} 6x - 4y + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
- Το $\Sigma_4 : \begin{cases} 6x - 4y + 1 = 0 \\ x = -y \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$.

Άρα το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις:

$$(x, y) = (-3, -3), (x, y) = (\frac{9}{7}, -\frac{9}{7}), (x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \text{ και } (x, y) = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}).$$

γ) Η εξίσωση $x^2 - x + y^2 - y = 2 - 2xy$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$x^2 - x + y^2 - y = 2 - 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - (x+y) - 2 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ένα τριώνυμο ως προς $x + y$. Θέτοντας $\omega = x + y$ έχουμε: $\omega^2 - \omega - 2 = 0$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι $\omega = 2$ ή $\omega = -1$. Συνεπώς από την εξίσωση $x^2 - x + y^2 - y = 2 - 2xy$ έχουμε ότι $x + y = 2$ ή $x + y = -1$.

Η εξίσωση $y^2 - 2xy = 1 - x^2$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$y^2 - 2xy = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 1 \Leftrightarrow x-y = 1 \text{ ή } x-y = -1$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με τα εξής τέσσερα συστήματα:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}, & \Sigma_2 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}, & \Sigma_3 : \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}, \\ & \Sigma_4 : \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Επιλύουμε το κάθε σύστημα χωριστά και έχουμε:

- Το $\Sigma_1 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.
- $\Sigma_2 : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
- Το $\Sigma_3 : \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (0, -1)$
- Το $\Sigma_4 : \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (-1, 0)$

Άρα το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις:

$(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $(x, y) = (0, -1)$ και $(x, y) = (-1, 0)$.

2.2.4 Κατασκευάζοντας Βοηθητική Εξίσωση

Σε πολλά συστήματα είναι δύσκολο ή και αδύνατο να λύσουμε κάποια εξίσωση του συστήματος ως προς ένα άγνωστο. Μπορεί όμως με κατάλληλο συνδυασμό των εξισώσεων του συστήματος ⁷ να προκύψει μία καινούρια εξίσωση η οποία να μπορεί να επιλυθεί ως προς τον ένα άγνωστο.

2.5 Παράδειγμα. Να λύσετε το σύστημα:

$$\alpha) \begin{cases} 6x^2 - 2y^2 + x - y = 4 \\ -3x^2 + y^2 + 2x - y = -1 \end{cases} \quad , \quad \beta) \begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = 6 \end{cases}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{cases} 6x^2 - 2y^2 + x - y = 4 & (1) \\ -3x^2 + y^2 + 2x - y = -1 & (2) \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2) επί 2 και προσθέτοντας στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$6x^2 - 2y^2 + x - y - 6x^2 + 2y^2 + 4x - 2y = 4 - 2 \Leftrightarrow 5x - 3y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3y+2}{5} \quad (3)$$

Από την εξίσωση (3) τώρα, αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$6 \frac{(3y+2)^2}{25} - 2y^2 + \frac{3y+2}{5} - y = 4 \Leftrightarrow 6(3y+2)^2 - 50y^2 + 5(3y+2) - 25y = 100 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y^2 + 13y - 14 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι $y = 1$, $y = 14$. Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (3), έχουμε:

- Για $y = 1$, έχουμε ότι: $x = \frac{3+2}{5} = 1$. Άρα μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (1, 1)$.
- Για $y = 14$, έχουμε ότι: $x = \frac{3 \cdot 14 + 2}{5} = \frac{44}{5}$. Άρα μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (\frac{44}{5}, 14)$.
Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη: $(x, y) = (1, 1)$ και $(x, y) = (\frac{44}{5}, 14)$.

β)

1ος Τρόπος:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 3 & (1) \\ y^2 + xy = 6 & (2) \end{cases} \quad \text{Προσθέτοντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 9 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 9 \Leftrightarrow x+y = 3 \quad (3) \text{ ή } x+y = -3 \quad (4)$$

- Επιλύοντας την εξίσωση (3) ως προς y , έχουμε $y = 3 - x$ (5). Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1), έχουμε:

$$x^2 + x(3-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x^2 = 3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (5), έχουμε ότι $y = 3 - 1 = 2$.

Άρα μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (1, 2)$.

- Επιλύοντας την εξίσωση (4) ως προς y , έχουμε $y = -3 - x$ (6). Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1), έχουμε:

$$x^2 + x(-3 - x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - x^2 = 3 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1 \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (6), έχουμε ότι $y = -3 - (-1) = -2$.

Άρα μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-1, -2)$.

Συνεπώς οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη: $(x, y) = (1, 2)$ και $(x, y) = (-1, -2)$.

2ος Τρόπος:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y) = 3 \quad (1) \\ y(y + x) = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Έχουμε ότι $y \neq 0$ γιατί αν ίσχυε $y = 0$, τότε από την εξίσωση (2) θα προέκυπτε $0 = 6$, το οποίο είναι αδύνατο. Όμοια μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x + y \neq 0$. Άρα διαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow y = 2x \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην εξίσωση (1), έχουμε:

$$x(x + 2x) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

- Αντικαθιστώντας $x = 1$ στην εξίσωση (3), , έχουμε ότι $y = 2$.
Άρα μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (1, 2)$.
- Αντικαθιστώντας $x = -1$ στην εξίσωση (3), , έχουμε ότι $y = -2$.
Άρα μία λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (-1, -2)$.

Συστήματα με τεχνάσματα

2.6 Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση του συστήματος είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0$. Όταν έχουμε μία εξίσωση αυτής της μορφής τότε μπορούμε να βρούμε τις δυνατές τιμές για τον λόγο $\frac{x}{y}$ (ή τον λόγο $\frac{y}{x}$) δουλεύοντας ως εξής: Διαιρούμε την εξίσωση με y^2 (ή με x^2), και προκύπτει η εξίσωση $\alpha(\frac{x}{y})^2 + \beta\frac{x}{y} + \gamma = 0$, η οποία είναι μία δευτεροβάθμια ως προς $\frac{x}{y}$. Θέτουμε $\omega = \frac{x}{y}$ και λύνουμε την δευτεροβάθμια που προκύπτει.

Από το σύστημα μας προκύπτει ότι $y \neq 0$, γιατί αν $y = 0$ από την εξίσωση (1) έχουμε ότι και $x = 0$, ενώ από την εξίσωση έχουμε ότι $y = \pm\sqrt{10}$. Διαιρώντας τώρα την εξίσωση (1) με y^2 , έχουμε:

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 6 = 0$$

Θέτουμε στην παραπάνω εξίσωση $\omega = \frac{x}{y}$ και έχουμε:

$$\omega^2 - 5\omega + 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2, \text{ ή } \omega = 3$$

Άρα $\frac{x}{y} = 2$ ή $\frac{x}{y} = 3$. Συνεπώς το αρχικό μας σύστημα είναι ισοδύναμο με τα ακόλουθα δύο συστήματα:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Επιλύουμε το κάθε σύστημα χωριστά και έχουμε:

- Το $\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ έχει λύσεις τα ζεύγη $(x, y) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(x, y) = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
- $\Sigma_2 : \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ έχει λύσεις τα ζεύγη $(x, y) = (3, 1)$ και $(x, y) = (-3, -1)$.

Άρα το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις:

$$(x, y) = (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (x, y) = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (x, y) = (3, 1) \text{ και } (x, y) = (-3, -1).$$

2.7 Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y + \omega = 13 & (1) \\ x^2 + y^2 + \omega^2 = 91 & (2) \\ y^2 = x\omega \end{cases}$$

Λύση:

Από τις εξισώσεις (1) και (2) και την ταυτότητα

$$(x + y + \omega)^2 = x^2 + y^2 + \omega^2 + 2xy + 2x\omega + 2y\omega$$

έχουμε:

$$13^2 = 91 + 2(xy + x\omega + y\omega) \Leftrightarrow xy + x\omega + y\omega = 39 \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (3), η εξίσωση (4) γίνεται:

$$xy + y^2 + y\omega = 39 \Leftrightarrow y(x + y + \omega) = 39 \Leftrightarrow^{(1)} 13y = 39 \Leftrightarrow y = 3$$

Αφού $y = 3$ η εξίσωση (1) γίνεται $x + \omega = 10$ και η εξίσωση (3) γίνεται $x\omega = 9$.

Λύνοντας τώρα το σύστημα $\begin{cases} x + \omega = 10 \\ x\omega = 9 \end{cases}$, βρίσκουμε ότι έχει λύσεις $(x, \omega) =$

$(1, 9)$ και $(x, \omega) = (9, 1)$.

Συνεπώς οι λύσεις του αρχικού συστήματος είναι:

$$(x, y, \omega) = (1, 3, 9) \text{ και } (x, y, \omega) = (9, 3, 1)$$

2.3 Ασκήσεις

1. Να παραστήσετε γραφικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 \end{cases}, \beta) \begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} xy = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}, \delta) \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases}, \\ \epsilon) \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}, \sigma\tau) \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, \zeta) \begin{cases} y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}, \eta) \begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί το σύστημα $\begin{cases} y = x \\ xy = -1 \end{cases}$, είναι αδύνατο.

3. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα και στην συνέχεια να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα:

$$\alpha) \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}, \beta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$$

4. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \begin{cases} y = 2x^2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}, \beta) \begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ 3x - y = 10 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} y = x^2 - 6 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}, \\ \delta) \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}, \epsilon) \begin{cases} y = x^2 - 5 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases}, \sigma\tau) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}, \zeta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x^2 + 3 \end{cases}, \\ \eta) \begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 + 3xy^2 = x \end{cases} \end{aligned}$$

5. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ -|x| + 4|y| = 2 \end{cases}, \beta) \begin{cases} 2|x - 1| + 3|y| = 8 \\ |1 - x| - 2|y| = -3 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}, \\ \delta) \begin{cases} -2(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ 4(x - 1)^2 + 3(y - 3)^2 = 12 \end{cases}, \epsilon) \begin{cases} \frac{28}{7x+4y-3} + \frac{5}{2x-3y-13} = 15 \\ \frac{2}{7x+4y-3} + \frac{15}{2x-3y-13} = 4 \end{cases}, \\ \sigma\tau) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ (x^2 + y^2)(x + y) = 15 \end{cases}, \zeta) \begin{cases} -x + 2|y| = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}, \eta) \begin{cases} -xy + \frac{3x}{y} = -2 \\ 2xy - \frac{5x}{y} = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

6. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 2 \\ 8x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases}, \beta) \begin{cases} 2|x| + 3|y| = -3 \\ 3|x| - 2|y| = 15 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 7 \end{cases}$$

7. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ |x - 1| = 3 \end{cases}, \beta) \begin{cases} (x + y - 2)(x - y) = 0 \\ (2x - 3y - 1)(2x - 2y + 1) = 0 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2y - xy^2 - 3x + 3y = 0 \end{cases}, \\ \delta) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 12 \\ xy - 2(x + y) = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

8. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - y = 1 \end{cases}, \beta) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62 \\ x^2 - y^2 + x - y = 50 \end{cases}, \gamma) \begin{cases} 4x^2 - xy = 3 \\ y^2 - 3xy = -2 \end{cases},$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 + y^2 + y + x = 8 \\ x + y + 2xy = 7 \end{cases}, \epsilon) \begin{cases} y^2 + \omega^2 = x^2 \\ y\omega = 60 \\ y + \omega = x + 4 \end{cases}$$

9. Να επιλύσετε αλγεβρικά τα παρακάτω συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \frac{xy}{4y-3x} = 20 \\ \frac{2xy}{5y-2x} = 4 \end{cases}, \beta) \begin{cases} xy = \frac{2}{3} \\ yz = \frac{1}{15} \\ zx = \frac{1}{15} \end{cases}, \gamma) \begin{cases} x(y+\omega) = 5 \\ y(\omega+x) = 8 \\ \omega(x+y) = 9 \end{cases}, \delta) \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 = -y \end{cases},$$

$$\epsilon) \begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 57 \\ 3x^2 + 4xy - 24y^2 = 19 \end{cases}, \sigma\tau) \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{36}{13} \end{cases}$$

10. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{3y+1} = 3 \\ \sqrt{4x-8} - 5\sqrt{3y+1} = -8 \end{cases}$$

11. Έστω C_1 ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$ και C_2 η παραβολή που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(4, 8)$. Να βρείτε:

α) τις εξισώσεις του κύκλου C_1 και της παραβολής C_2 ,

β) τις συνεταγμένες των κοινών σημείων του του κύκλου C_1 και της παραβολής C_2 .

12. Δίνεται ο μοναδιαίος κύκλος $C : x^2 + y^2 = 1$ και η (μεταβλητή) ευθεία $\epsilon : y = 2x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ :

α) Η ευθεία ϵ τέμνει τον κύκλο C σ' ένα μόνο σημείο,

β) Η ευθεία ϵ τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία,

γ) Η ευθεία ϵ δεν τέμνει τον κύκλο C .

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες, τις:

$$\epsilon_1 : x - y - 3 = 0 \text{ και } \epsilon_2 : x + y + 1 = 0$$

β) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases},$$

γ) Να ερμηνεύσετε γραφικά τα παραπάνω αποτελέσματα.

3 Προβλήματα που λύνονται με συστήματα

3.1 Μεθοδολογία

Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα στο οποίο υπεισέρχονται δύο ή παραπάνω άγνωστες ποσότητες, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τις ποσότητες αυτές με κάποιες μεταβλητές και να δημιουργήσουμε ένα σύστημα. Γενικά για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα ακολουθούμε τα εξής βήματα :

1. Από τα ζητούμενα του προβλήματος επιλέγουμε τους αγνώστους τους οποίους ονοματίζουμε με μεταβλητές.
2. Βάζουμε περιορισμούς για τις μεταβλητές.
3. Από το κάθε δεδομένο του προβλήματος σχηματίζουμε και μία εξίσωση.
4. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που έχουμε κατασκευάσει.
5. Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς που έχουμε για τους αγνώστους (δηλαδή αν είναι δεκτές)
6. Από τις λύσεις που βρήκαμε, απαντάμε με σαφήνεια στα ζητούμενα του προβλήματος.

3.1 Παράδειγμα. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $100m^2$. Αν η μία πλευρά του είναι τετραπλάσια της άλλης, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Λύση

Αν με x και y συμβολίσουμε τα μήκη (σε μέτρα) των πλευρών του ορθογωνίου (σε μέτρα), τότε :

- Αφού τα x, y παριστάνουν μήκη, θα πρέπει $x > 0$ και $y > 0$.
- Αφού το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $100m^2$ έχουμε ότι: $xy = 100$.
- Αν θεωρήσουμε ότι x είναι το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς, έχουμε ότι $x = 4y$.

Λύνοντας τώρα το σύστημα $\begin{cases} xy = 100 \\ x = 4y \end{cases}$ βρίσκουμε $(x, y) = (20, 5)$ ή $(x, y) = (-20, -5)$. Η λύση $(x, y) = (-20, -5)$ δεν είναι δεκτή, λόγω των περιορισμών. Άρα οι διαστάσεις των πλευρών του ορθογωνίου είναι $20m$ και $5m$

3.2 Παράδειγμα. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια αργότερα, θα βασίλευε το μισό της ζωής του, ενώ αν πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, θα βασίλευε το $\frac{1}{8}$ της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια βασίλευσε ο Μέγας Αλέξανδρος.

Λύση

Έστω ότι ο Μέγας Αλέξανδρος έζησε x χρόνια και βασίλεψε y χρόνια.

- $x > 0, y > 0$

- Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια αργότερα, θα είχε ζήσει $x + 9$ χρόνια και θα είχε βασιλέψει $y + 9$ χρόνια. Άρα:

$$y + 9 = \frac{1}{2}(x + 9) \quad (1)$$

- Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, θα είχε ζήσει $x - 9$ χρόνια και θα είχε βασιλέψει $y - 9$ χρόνια. Άρα:

$$y - 9 = \frac{1}{8}(x - 9) \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε ότι έχει μοναδική λύση $(x, y) = (33, 12)$ η οποία είναι δεκτή. Άρα ο Μέγας Αλέξανδρος έζησε 33 χρόνια και βασίλεψε 12 χρόνια.

3.2 Ασκήσεις

1. Σ' ένα επιτραπέζιο παιχνίδι γνώσεων, αν κάποιος απαντήσει σωστά σε μία ερώτηση, παίρνει 10 βαθμούς, ενώ αν απαντήσει λανθασμένα χάνει 5 βαθμούς. Ο νικητής συγκέντρωσε 105 βαθμούς απαντώντας σε 15 ερωτήσεις. Σε πόσες απάντησε σωστά;
2. Ο Περικλής, κορυφαία μορφή του αρχαίου ελληνικού κόσμου, ασχολήθηκε με τα κοινά της Αθήνας από την ηλικία των 30 ετών μέχρι το θάνατό του. Αν είχε ζήσει ένα χρόνο περισσότερο, θα είχε ασχοληθεί με τα κοινά την μισή του ζωή. Πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια ασχολήθηκε με τα κοινά;
3. Αν οι μαθητές ενός τμήματος καθίσουν ένας σε κάθε θρανίο τότε θα μείνουν όρθιοι 8 μαθητές, ενώ αν καθίσουν ανά δύο, θα μείνουν κενά 4 θρανία. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές και πόσα τα θρανία.
4. Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο $16m$ και εμβαδόν $15m^2$.
5. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $1m$ και εμβαδόν $24dm^2$.
6. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $90cm^2$. Αν η μία διάστασή του ελαττωθεί κατά $4cm$, ενώ η άλλη διάστασή του αυξηθεί κατά $6cm$, τότε το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

4 Βιβλιογραφία

- Άλγεβρα Β' Λυκείου, Σχολικό Βιβλίο.
- Τεύκρος Μιχαηλίδης, Αντώνης Σκιαδάς, Άλγεβρα Β' Γενικού Λυκείου, Εκδόσεις Πατάκη.
- Βασίλης Παπαδάκης, Άλγεβρα Β' Λυκείου, Α' Τόμος, Εκδόσεις Σαββάλα.
- Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Ι. Στεργίου, Μεθοδική Άλγεβρα Β' Λυκείου, Εκδόσεις Σαββάλα.
- Αναστάσιος Μπάρλας, Άλγεβρα Β' Λυκείου, Α' Τόμος, Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική