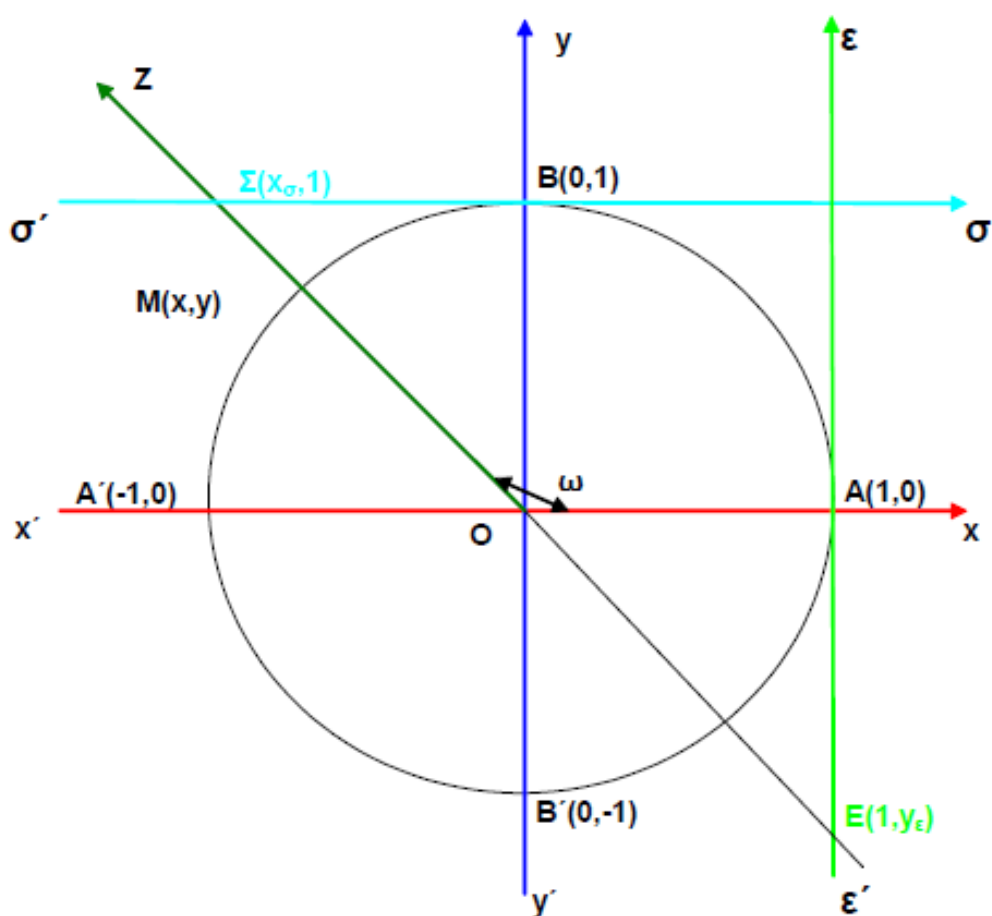


ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ



$\eta\mu\omega = y$ (Τεταγμένη του σημείου M)

$\sigma\upsilon\nu\omega = x$ (Τετμημένη του σημείου M)

$\epsilon\phi\omega = y/x = y_\epsilon$ (Τεταγμένη του σημείου E)

$\sigma\phi\omega = x/y = x_\sigma$ (Τετμημένη του σημείου Σ)

Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών:

Γωνία ω	0° ή 360°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\sigma\phi\omega$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΡΩΤΟΣ:

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο [$\sin(-\omega) = \sin \omega$],
και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς [$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu \omega$ κ.τ.λ.].

ΚΑΝΟΝΑΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ:

Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή
 $180^\circ \pm \omega$ [$\pi \pm \omega$] ή $360^\circ \pm \omega$ [$2\pi \pm \omega$],
έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω
με πρόσημο (+) ή (-) ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο η τελική πλευρά της
γωνίας τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΡΙΤΟΣ:

Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή
 $90^\circ \pm \omega$ [$\frac{\pi}{2} \pm \omega$] ή $270^\circ \pm \omega$ [$\frac{3\pi}{2} \pm \omega$],
εναλλάσσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω , δηλαδή το
ημίτονο γίνεται συνημίτονο ή αντίστροφα και εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη
ή αντίστροφα με πρόσημο (+) ή (-) ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο η
τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΕΤΑΡΤΟΣ:

Οι γωνίες της μορφής ή που μπορούν να πάρουν τη μορφή
 $\kappa 360^\circ + \omega$ [$2\kappa\pi + \omega$]
έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω .

1. Τι ονομάζουμε περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική όταν υπάρχει πραγματικός
αριθμός T , $T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $\chi \in A$ να ισχύει

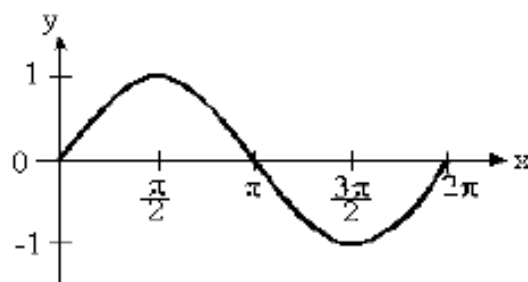
$$\alpha) \chi + T \in A, \chi - T \in A$$

$$\beta) f(\chi + T) = f(\chi - T) = f(\chi)$$

Ο πραγματικός αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

*Σχόλιο: Η μελέτη αυτών των συναρτήσεων δεν χρειάζεται να γίνει σε όλο το πεδίο ορισμού
αλλά μπορεί να περιοριστεί μόνο στο διάστημα της περιόδου(αφού σε όλο το υπόλοιπο
πεδίο ορισμού επαναλαμβάνεται)*

2. Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$



Το πεδίο Ορισμού είναι το $\mathbb{R}$

Ισχύει $\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu(x-2\pi) = \eta\mu x$ Δηλαδή η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π γι' αυτό την μελετάμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π π.χ $[0, 2\pi]$

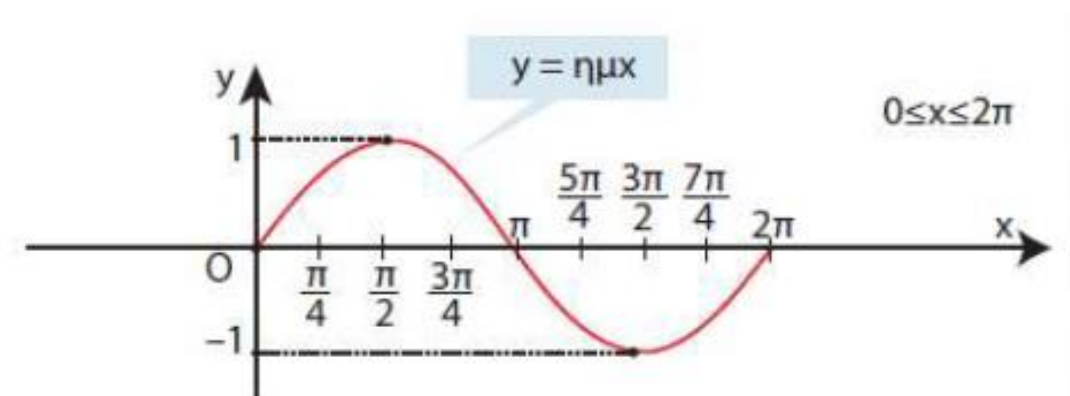
Είναι αυξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, Είναι φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Έχει μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$ το 1, Έχει ελάχιστο στο $\frac{3\pi}{2}$ το -1

Επίσης είναι περιττή αφού $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$

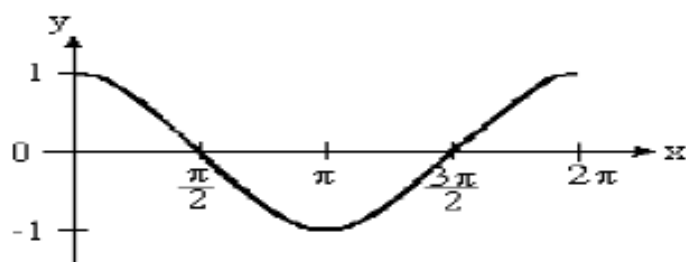
Ο πίνακας μεταβολών στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει την ακόλουθη μορφή

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$		↗	↘	↘	↗
	0	1	0	-1	0



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
		↗	↘	↘	↗
		μεγ.		ελαχ.	

3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $\sin x$



Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

Ισχύει ότι $\sin(x+2\pi)=\sin(x-2\pi)=\sin x$ Δηλαδή η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π γι' αυτό την μελετάμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π π.χ $[0, 2\pi]$

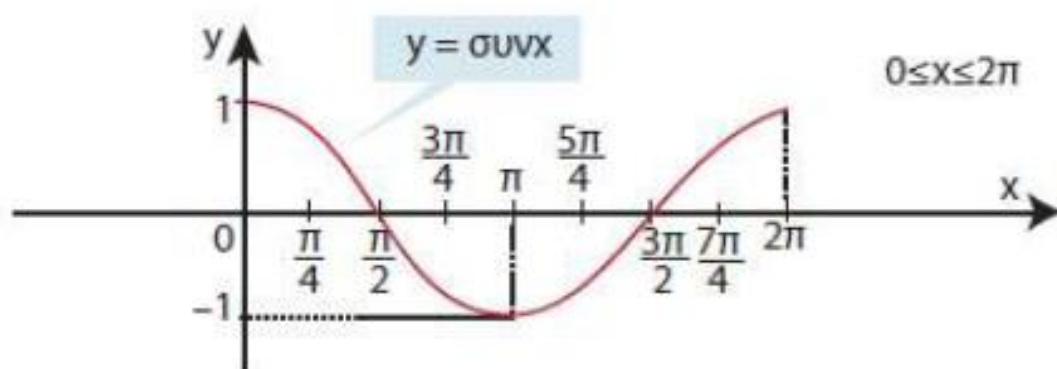
Είναι φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, είναι αύξουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

Έχει μέγιστο στο 0 και 2π την τιμή 1, έχει ελάχιστο στο π το -1

Είναι άρτια αφού $\sin(x) = \sin(-x)$

Ο πίνακας μεταβολών στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει την ακόλουθη μορφή

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	1	↘	↘	↗	↗
	1	0	-1	0	1



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	1 μεγ.	0	-1 ελαχ.	0	1 μεγ.

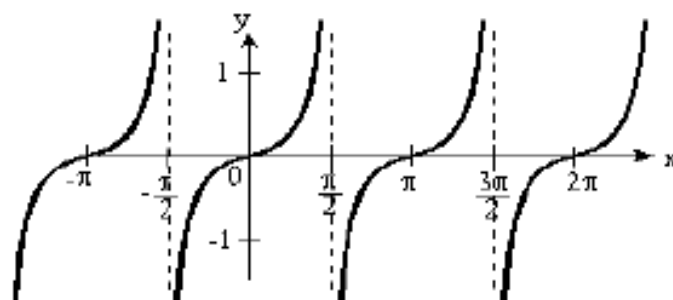
4. Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x)=\epsilon\phi x$

Το πεδίο ορισμού είναι $A=\{x/\sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \quad k \in \mathbb{Z}$

Η συνάρτηση $\epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο π γι' αυτό την μελετάμε σε ένα διάστημα πλάτους π π.χ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Είναι αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο

Οι ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = -\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης. Είναι περιττή συνάρτηση αφού $\epsilon\phi(-x) = -\epsilon\phi x$



Παρατήρηση:

- Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ ή $f(x) = \rho \sigma\upsilon\eta(\omega x)$, $\omega > 0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Έχουν μέγιστο το $|\rho|$ και ελάχιστο το $-|\rho|$
- Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x + \phi) + \kappa$ ή $f(x) = \rho \sigma\upsilon\eta(\omega x + \phi) + \kappa$, $\omega > 0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Έχουν μέγιστο το $|\rho|$ και ελάχιστο το $-|\rho|$. Έχουν γραφική παράσταση αυτήν της $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ ή $f(x) = \rho \sigma\upsilon\eta(\omega x)$ μετατοπισμένη κατά ϕ μονάδες αριστερά αν $\phi > 0$ ή δεξιά αν $\phi < 0$ και κ μονάδες πάνω αν $\kappa > 0$ και κ μονάδες κάτω αν $\kappa < 0$
- Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \rho \epsilon\phi(\omega x)$ ή $f(x) = \rho \sigma\phi(\omega x)$, $\omega > 0$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = \frac{\pi}{\omega}$ και δεν έχουν μέγιστο και ελάχιστο

A. Βασικοί τριγωνομετρικοί εξισώσεις.

$\eta\mu x = \eta\mu\theta$	$x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$	$x = 2\kappa\pi \pm \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta$	$x = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\phi x = \sigma\phi\theta$	$x = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

1. $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ 2. $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

3. $\eta\mu x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 4. $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi$
 $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$