2.1. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μίας ευθείας ε η οποία:

- σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω είναι
$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega$$
- είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι
$$\lambda = \lambda_{\vec{\delta}}$$
- διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, $(x_1 \neq x_2)$ είναι
$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
- είναι παράλληλη στην ευθεία ζ είναι
$$\lambda = \lambda_\zeta$$
- είναι κάθετη στην ευθεία ζ είναι
$$\lambda = -\frac{1}{\lambda_\zeta}, (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \lambda \cdot \lambda_\zeta = -1)$$

2. Συνθήκη παραλληλίας και Συνθήκη καθετότητας

Έστω δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα.

Συνθήκη παραλληλίας: Αν $\varepsilon_1 \mathbin{//} \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2$

Συνθήκη καθετότητας: Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ τότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 - 1$.

3. Εξίσωση ευθείας με γνωστό ένα σημείο της και το συντελεστή διεύθυνσης

Αν σε μία ευθεία ε γνωρίζουμε ένα σημείο της $A(x_0, y_0)$ και το συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η ευθεία ε έχει εξίσωση
$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

4. Συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = \alpha x + \beta$

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ είναι $\lambda = \alpha$.

5. Σημείο τομής δύο ευθειών – Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Αν οι ευθείες ε_1: $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και ε_2: $y = \lambda_2 x + \beta_2$ τέμνονται, τότε το σημείο τομής τους έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος με εξισώσεις, τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Δηλαδή, τη λύση του συστήματος $\begin{cases} y = \lambda_1 x + \beta_1 \\ y = \lambda_2 x + \beta_2 \end{cases}$.

- Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (x_0, y_0)$, τότε οι ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο τομής), το $A(x_0, y_0)$.
- Αν το σύστημα είναι αδύνατο, τότε το οι ευθείες δεν έχουν κοινά σημεία ($\varepsilon_1 \mathbin{//} \varepsilon_2$)
- Αν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε οι δύο ευθείες συμπίπτουν.

6. Σημείο τομής των ευθειών με τους άξονες

Έστω η ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda \neq 0$.

- Για να βρούμε το σημείο τομής της ε με τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y = 0$. Έτσι, έχουμε:

$$0 = \lambda x + \beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\lambda}$$

  Άρα, η ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{\lambda}, 0\right)$.

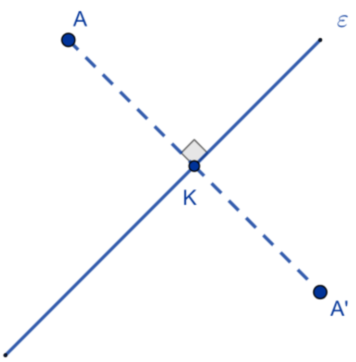
- Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, θέτομε $x = 0$. Έτσι, έχουμε:

$$0 = \lambda x + \beta \ \Leftrightarrow y = \beta.$$

  Άρα, η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$.
- Μια ευθεία $\varepsilon: y = y_0$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, y_0)$, ενώ είτε δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ (αν $y_0 \neq 0$) είτε ταυτίζεται με αυτόν (αν $y_0 = 0$).

- Μια ευθεία $\varepsilon: x = x_0$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_0, 0)$, ενώ είτε δεν τέμνει τον άξονα $y'y$ (αν $x_0 \neq 0$) είτε ταυτίζεται με αυτόν (αν $x_0 = 0$).

6. Συμμετρία ως προς ευθεία



Έστω A' (α, β) το συμμετρικό σημείο ενός σημείου $A(x_0, y_0)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$. Το A' βρίσκεται στην κάθετη ευθεία ζ από το A στην ε και το σημείο τομής K των ε και ζ είναι μέσον του τμήματος $A'A$.

7. Σημείο που ανήκει σε γνωστή ευθεία

Αν γνωρίζουμε ότι το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$y_1 = \lambda x_1 + \beta$$

Άρα, το σημείο M είναι της μορφής $M(x_1, \lambda y_1 + \beta)$.

8. Ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης που ικανοποιεί μια ιδιότητα

Όταν μια ευθεία ε έχει γνωστό το συντελεστή διεύθυνσης λ και ικανοποιεί μια ιδιότητα I, τότε για να βρούμε την εξίσωσή της, υποθέτουμε ότι αυτή είναι της μορφής $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$.

Μοναδικός άγνωστος είναι ο β, τον οποίο θα υπολογίσουμε θεωρώντας ότι η ε ικανοποιεί την ιδιότητα I.

9. Ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο και ικανοποιεί μια ιδιότητα

Όταν μια ευθεία ε διέρχεται από ένα γνωστό σημείο $A(x_0, y_0)$ και επιπλέον έχει μια ιδιότητα I, τότε για να βρούμε την εξίσωσή της, εργαζόμαστε ως εξής:

- Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $x = x_0$ ή $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
- Εξετάζουμε αν η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ έχει την ιδιότητα I. Αν την έχει, τότε η $x = x_0$ είναι μία από τις ζητούμενες ευθείες.
- Θεωρούμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ έχει την ιδιότητα I και βρίσκουμε (αν υπάρχουν) τις τιμές του λ και τις αντίστοιχες ευθείες.

10. Γεωμετρικός τόπος σημείων της μορφής $M(f(\lambda), g(\lambda))$

➢ Αν θέλουμε να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων

- $M(f(\lambda), g(\lambda)), \lambda \in \mathbb{R}$**,** όπου $f(\lambda), g(\lambda)$ συναρτήσεις με μεταβλητή το λ, τότε:

  ✓ Υποθέτουμε ότι είναι C ο γεωμετρικός τόπος και ότι $M(x, y)$ οπότε έχουμε:

$$M(x, y) \in C \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(\lambda) \\ y = g(\lambda) \end{cases}$$

  ✓ Μετά κάνουμε απαλοιφή του λ, λαμβάνουμε υπόψη τους περιορισμούς για τα x, y που προκύπτουν από τα $f(\lambda), g(\lambda)$ και βρίσκουμε τη γραμμή C.

➢ Αν θέλουμε να βρούμε που κινείται ένα σημείο $M(\alpha + \beta\eta\mu\theta, \gamma + \delta\sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \mathbb{R}$, τότε υποθέτουμε ότι $M(x, y)$ και έχουμε:

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta\eta\mu\theta \quad (1) \\ y = \gamma + \delta\sigma\upsilon\nu\theta \ (2) \end{cases}$$

Στη συνέχεια, λύνουμε τις εξισώσεις (1) και (2) ως προς $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$ αντιστοίχως και αντικαθιστούμε αυτά στην ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$.