

2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

Άσκηση 1: Δίνονται τα σημεία $A(-3,2)$, $B(1,6)$ και $\Gamma(-13,-7)$.

- α.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .
β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
γ. Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

Άσκηση 2: Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

- α.** Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .
β. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση 3: Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.
β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.
γ. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

Άσκηση 4: Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1,5)$ και $B(2,1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 4$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4,0)$.
β. Να βρείτε:
i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$
ii. την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

Άσκηση 5: Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.

- α.**
i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3,2)$.
β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

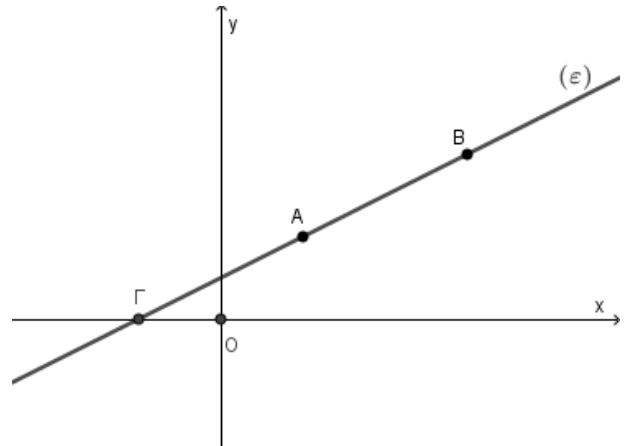
Άσκηση 6: Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε) .

α. Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε) .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

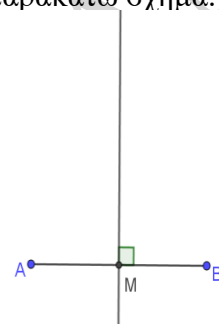


Άσκηση 7: Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3,5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

γ. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .



Άσκηση 8: Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5,2)$. Αν το σημείο $M(3, \frac{1}{2})$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.

β. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AG .

Άσκηση 9: Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha + 1, 1 - \alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in P$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β. Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 10: Δίνονται τα σημεία $A(-1,5)$, $B(3,3)$. Να υπολογίσετε:

α. Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

β. Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

γ. Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

Άσκηση 11: Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

β. Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii. Να αποδείξετε ότι $\overline{A\Delta} = 2\overline{\Delta B}$ και $\overline{A\Gamma} = 2\overline{E\Gamma}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

Άσκηση 12: Δίνονται το σημείο $A(4,-2)$ και η ευθεία (ϵ_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α. την ευθεία (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1) .

β. το σημείο τομής B , των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) : $y = -x + 2$.

γ. το συμμετρικό Γ του σημείου A , ως προς την ευθεία (ϵ_1) .

Άσκηση 13: Δίνονται τα σημεία $A(2,-4)$ και $B(0,-2)$

α. Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB .

β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

γ. Αν (ζ) : $y = x - 4$ και (ϵ) : $y = 2 \cdot x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (ϵ) .

Άσκηση 14: Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1,2)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$.

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $\Gamma(5, 3)$.

β. Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

Άσκηση 15: Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma O$ με κορυφές τα σημεία $A(0,4)$, $B(4,4)$, $\Gamma(4,0)$, $O(0,0)$. Στην διαγώνιο $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε $\overline{AZ} = \frac{3}{4}\overline{A\Gamma}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της $B\Gamma$.

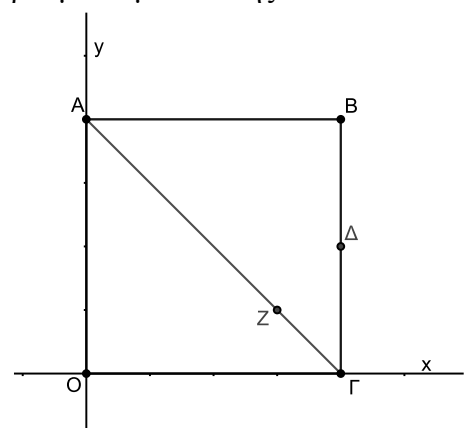
α. Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Z .

β. Αν το σημείο Δ είναι το $(4,2)$ και το σημείο Z το $(3,1)$,

να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$.



Άσκηση 16: Έστω η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $M(1 - 2\alpha, 3\alpha - 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε .

β. Αν επιπλέον η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $N(2,1)$, να βρείτε:

- i. Τη τιμή του α
- ii. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε
- iii. Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ε και τους άξονες.

Άσκηση 17: Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1,2)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(3,6)$. Να βρείτε την εξίσωση:

- i. Της μεσοκαθέτου της πλευράς $B\Gamma$
- ii. Του ύψους BE
- iii. Της διαμέσου BM

Άσκηση 18: Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,4)$. Αν η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι $y = 2x - 1$ και του ύψους BD είναι $y = x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ .

Άσκηση 19: Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$. Να βρείτε:

- α.** την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ε
- β.** το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ
- γ.** το πλησιέστερο σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 20: Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της ευθείας $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 1$ από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια την ελάχιστη απόσταση του σημείου O από τα σημεία της ευθείας ε .

Άσκηση 21: Να βρείτε το συμμετρικό σημείο B του σημείου $A(1,2)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: y = x + 5$.

Άσκηση 22: Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων

- i.** $M = (\lambda - 1, 2\lambda - 3)$ **ii.** $M(\lambda - 1, 2\lambda), \lambda \geq 0$ **iii.** $M(\text{συν}\lambda, 3), \lambda \in \mathbb{R}$ **iv.** $M(3, \lambda^2 + 1), \lambda \in \mathbb{R}$

Άσκηση 23: Αν $A(\lambda - 1, 2)$, $B(2\lambda - 3, \lambda + 1)$ και $\Gamma(3\lambda, 2\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , ώστε $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$.

Άσκηση 24: Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(1 + \eta\mu^2\theta, 2 - \sigma\upsilon\nu^2\theta), \theta \in \mathbb{R}$, κινείται σε σταθερή ευθεία.

Άσκηση 25: Αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ κινείται στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x - 6$, να βρείτε πού κινείται το σημείο $N\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$