

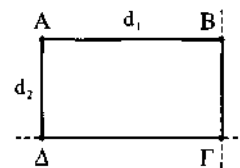
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ από την ευθεία:
i) $\varepsilon : y = -x\epsilon\phi\theta$
ii) $\varepsilon : x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta = 2$
2. α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $M(2,-3)$ από την ευθεία $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
β) Να βρεθεί η απόσταση της αρχής O των αξόνων από την ίδια ευθεία $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$
3. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ και απέχουν από το σημείο $A(1,2)$ απόσταση ίση με 1
4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ και απέχει από την αρχή των αξόνων 2 μονάδες
5. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η ευθεία $\varepsilon : (3a-5)x + (a-3)y - 4a + 8 = 0$ ισαπέχει από τα σημεία $A(4,-3)$ και $B(3, 2)$.
6. Τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(3, 6)$ ισαπέχουν από το σημείο $\Gamma(-4, \lambda)$. Να υπολογιστεί η τιμή του λ .
7. Να βρεθεί το σημείο του άξονα $y'y$ που ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y + 24 = 0$.
8. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $\varepsilon : x + y - 2 = 0$ που απέχουν από την ευθεία $\zeta : 3x + 4y - 10 = 0$ απόσταση ίση με 2.
9. Δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$, $B(3, -1)$ και η ευθεία $\varepsilon : y = -3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με κορυφή το B .
10. Δίνονται οι εξισώσεις $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ δύο πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η κορυφή του $A(2, -3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών του, τις κορυφές και το εμβαδόν του.
11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y + 10 = 0$ και απέχει από το σημείο $M(6, 2)$ απόσταση ίση με 1.
12. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ και ισαπέχει από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(1, 8)$.
13. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : x - 3y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + 5y - 9 = 0$, και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση $d = 2$

14. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(4, 1)$ και απέχει από το σημείο $N(5, 3)$ απόσταση ίση με 1.
15. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες με την ευθεία $\epsilon: 3x-4y+12=0$ και απέχουν από το σημείο $A(2, 1)$ απόσταση ίση με 1.
16. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $\epsilon: x+y-1=0$ που απέχουν από την ευθεία $\zeta: 3x+4y-2=0$ απόσταση ίση με 2.
17. Να διατάξετε με φθίνουσα σειρά τις αποστάσεις των σημείων $A(2, 5)$, $B(-3, -6)$, $\Gamma(-1, 4)$ από την ευθεία $4x-3y=0$.
18. Έστω τα σημεία $A(0, -4)$ και $B(3, 0)$. Να βρεθεί αν υπάρχουν οι ευθείες που περνάνε από το A και απέχουν από το B απόσταση: α) $d=3$, β) την μέγιστη απόσταση, γ) $d=6$.
19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στην συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.
20. Τα σημεία $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(3, -1)$ είναι τρεις κορυφές ενός παραλληλογράμμου. Να βρεθούν:
α) οι συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής του
β) οι συντεταγμένες του κέντρου του
γ) το εμβαδόν του
21. Οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:
α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου
β) το εμβαδόν του
22. Να υπολογισθεί το μήκος του ύψους AD τριγώνου $AB\Gamma$ στο οποίο $A(4,13)$, $B(10,1)$, $\Gamma(-2,5)$
23. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα $A(\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega)$ και $B(\eta\mu\phi, \sigma\upsilon\nu\phi)$. Να βρεθεί η απόσταση του $O(0,0)$ από αυτήν. $(0 \leq \omega \neq \phi < \frac{\pi}{2})$.
24. α) Να βρεθεί ποια από τις ευθείες της οικογένειας $a(2x+y+4)+(x-2y-3)=0$, $a \in \mathbb{R}$, απέχει από το σημείο $M(2,-3)$ απόσταση ίση με $\sqrt{10}$
β) Να δειχθεί ότι καμία ευθεία της οικογένειας $(2x-y-6)+\kappa(x-y-4)=0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ δεν απέχει από το σημείο $P(3,-1)$ απόσταση ίση με 3

25. Οι δύο πλευρές ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ, με Α(5, 2), βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{4}{3}x - 8$ και $y = -\frac{4}{3}x + 2$. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού.



ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

26. Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ευθεία ζ: $3x + y - 2011 = 0$ και απέχουν από το σημείο Α(-4,2) απόσταση ίση με $2\sqrt{10}$.
27. Να βρείτε τις ευθείες που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και απέχουν από το σημείο Α(2,5) απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$.
28. Δίνεται η ευθεία ζ: $x + 2y - 15 = 0$ και το σημείο Α(3,1): Να βρείτε:
i) την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ζ,
ii) τις ευθείες που είναι κάθετες στη ζ και απέχουν από το Α απόσταση ίση με $\sqrt{20}$.
29. Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Ρ(6,5) και απέχουν από το σημείο Α(3,-1) απόσταση ίση με 3.
30. Να βρείτε την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην ευθεία ζ: $6x - 3y - 13 = 0$ και ισαπέχει από τα σημεία Α(1,-4) και Β(5,2).
31. Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Ρ(2,1) και ισαπέχουν από τα σημεία Α(1,3) και Β(3,7).
32. Δίνονται τα σημεία : Α(α, β) και Β(β-1, 2α), με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB} = (4, -8)$.
Να βρείτε :
i) τους αριθμούς α και β
ii) τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Ρ(-2,-3) και ισαπέχουν από τα σημεία Α και Β.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

33. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των παράλληλων ευθειών, $\varepsilon_1: ax + by + \gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: ax + by + \gamma_2 = 0$ είναι ίση με: $\frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου βρίσκονται στις ευθείες με εξισώσεις: $5x - 12y - 65 = 0$ και $5x - 12y + 26 = 0$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

34. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x-y+1=0$ και $\varepsilon_2: 3x-4y-1=0$. Να βρείτε σημείο M της ε_1 που απέχει από την ε_2 απόσταση ίση με 1 μονάδα
35. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: 4x-6y+5=0$ και $\varepsilon_2: y=\frac{2}{3}x+1$
36. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: y=\frac{3}{4}x-2$ και απέχουν από αυτή απόσταση ίση με 2.
37. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=3x-4$ και $\varepsilon_2: y=3x+20$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε , η οποία απέχει από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα αποστάσεις με λόγο $\frac{2}{3}$.
38. Η μια πλευρά τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, με $A(2, -1)$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: 3x-4y+20=0$. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.
39. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon: 5x-12y-60=0$ και $\zeta: 5x-12y+31=0$.
40. Οι δύο πλευρές ενός τετραγώνου βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: ax+\beta y+\gamma_1=0$ και $\varepsilon_2: ax+\beta y+\gamma_2=0$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του τετραγώνου ισχύει $E=\frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{a^2+\beta^2}$
41. i) Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών που παριστάνει η εξίσωση $x^2+2xy+y^2-2x-2y-\mu^2=0$
 ii) Για ποια τιμή του μ η απόσταση των παραπάνω ευθειών είναι ίση με $\sqrt{10}$;
42. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1: x+\mu y+1=0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x+2y+\lambda=0$ είναι παράλληλες και η απόσταση τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ-ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΗ -ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

43. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $\varepsilon_1: y=\frac{3}{2}x-2$ και $\varepsilon_2: y=\frac{3}{2}x+4$.

44. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1: 2x+y-8=0$ και $\varepsilon_2: 4x+2y-8=0$
45. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1: y=3x-1$ και $\varepsilon_2: y=3x+9$
46. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών: $2x-3y+5=0$ και $4x-6y+9=0$.
47. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:
 α) $\varepsilon_1: 3x-y+1=0$ και $\varepsilon_2: -6x+2y-3=0$
 β) $\varepsilon_1: x=4$ και $\varepsilon_2: x=-6$
 γ) $\varepsilon_1: y=x$ και $\varepsilon_2: y=x-3$
48. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $\varepsilon_1: ax + by + \gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: ax + by + \gamma_2 = 0$, με $\gamma_1 \neq \gamma_2$, είναι η $ax + by + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 0$.
49. Η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{5}{12}x + 3$ είναι η μεσοπαράλληλος δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με 8. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών αυτών.
50. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x-4y+1=0$ και $\varepsilon_2: 8x-6y+5=0$. Να βρείτε :
 i) τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2
 ii) ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2
51. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$ και $B(13,6)$. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3, 6)$ και ε_2 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B. Να βρείτε :
 i) τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2
 ii) την απόσταση του σημείου B από την ευθεία ε_1
 iii) τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2
52. α) Να βρεθούν οι εξισώσεις της διχοτόμου των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες:
 $\varepsilon_1: 3x-4y+1=0$ $\varepsilon_2: 5x+12y+4=0$
 β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1: 2x+y-8=0$ και $\varepsilon_2: 4x+2y-8=0$
53. Οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda - 1)x + \lambda y + 1 - 3\lambda = 0$ και $\varepsilon_2: (4 - \lambda)x + (6 - \lambda)y - \lambda = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε :
 i) τον αριθμό λ
 ii) ευθεία ε_3 , ώστε η ε_2 να είναι η μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 .
54. Δύο παράλληλες ευθείες απέχουν απόσταση ίση με 8 και έχουν ως μεσοπαράλληλη την ευθεία $\zeta: 3x-4y+12=0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

55. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 12)y - 2\lambda = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 2)x + (\lambda - 6)y + 3\lambda + 1 = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε :
- τον αριθμό λ
 - τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $d(M, \varepsilon_1) = 2d(M, \varepsilon_2)$.
56. Θεωρούμε τα σημεία $A(3,2)$, $B(-1,-2)$ και $\Gamma(5,0)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$.
57. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων. τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x-2y+4=0$ και $3x-2y+6=0$.
58. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων. τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x-2y+4=0$ και $3x-2y+6=0$.
59. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $\varepsilon_1: x-2y=0$ και $\varepsilon_2: x+2y=0$ αντίστοιχα είναι ίσος με 2.
60. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+y=0$ και $\varepsilon_2: x-y-4=0$. Να βρείτε :
- το σημείο τομής A των ε_1 και ε_2 ,
 - τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα είναι ίσος με 2.
61. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda - 1$ και $(\lambda + 2)x + \lambda y = \lambda$ τέμνονται για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής τους
62. Σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς Oxy δίνεται το ορθογώνιο $OAB\Gamma$, του οποίου οι κορυφές A και Γ κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα και είναι $B(\alpha, \beta)$ με $\alpha - \beta = 1$. Να δείξετε ότι η κάθετη που φέρουμε από το B στην $A\Gamma$ διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί
63. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των δύο αυτών ευθειών.
64. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(-1, 2)$ έχουν σταθερή διαφορά c είναι ευθεία κάθετη στην AB .

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

65. Δίνονται τα σημεία $A(-2,1)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(1,-6)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
66. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου που έχει κορυφές τα σημεία $A(1, -2)$, $B(-2, 3)$, $\Gamma(-1, -4)$ και $\Delta(5, 0)$.
67. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ που έχει κορυφές τα σημεία $A(4,2)$, $B(6,0)$, $\Gamma(1,-2)$, $\Delta(-2,2)$
68. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ που έχει κορυφές τα σημεία $A(-1,2)$, $B(2,4)$, $\Gamma(3,-2)$, $\Delta(-2,-1)$
69. Ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ οι τρεις κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3,1)$, $(-2,3)$ και $(4,-5)$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου
70. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία $A(-1, 5)$, $B(5, -3)$, $\Gamma(-2, 3)$.
71. Δίνονται τα σημεία $A(8,3)$ και $B(6,-1)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα x' , ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει εμβαδόν 7 τ.μ.
72. Έστω τα σημεία $A(1,1)$ και $B(5,5)$ και η ευθεία $\varepsilon: x-2y-1=0$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι ίσο με 4 τ.μ.
73. Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(4,5)$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας $\varepsilon: 2x - y - 1 = 0$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι ίσο με 4 τ.μ..
74. Θεωρούμε τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(4, 6)$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας $\varepsilon: x - 2y + 2 = 0$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι ίσο με 4 τ.μ..
75. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(\lambda + 1, \lambda^2 + 2)$, $x \in \mathbb{R}$
i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου,
ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{5}{2}$.
76. Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 8 τ.μ. και οι δύο κορυφές του A και B έχουν συντεταγμένες $(1, -2)$, και $(2, 3)$ αντιστοίχως. Η τρίτη κορυφή του Γ είναι σημείο της ευθείας $2x+y-2=0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ .
77. Δίνεται το σημείο $A(2, 1)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .
Α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA .

- Β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ.
- Γ) Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΑΒ που διέρχεται από την κορυφή Α.
- Δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.
78. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο Μ (2, 3) όταν:
 α) Το Μ είναι το μέσον του ΑΒ όπου τα Α και Β είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα,
 β) Σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{3}{2}$.
79. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: x+y-2=0$ και $\epsilon_2: 2x-y-1=0$. Να βρείτε ευθείες που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{v} = (2, 2)$ και σχηματίζουν με τις ϵ_1 και ϵ_2 τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.
80. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (8, 4)$ και $\overrightarrow{AM} = (1, -3)$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
81. Δίνονται τα σημεία Α(1,-2) και Β(3,4). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.
82. Δίνονται τα σημεία Α(3,-4), Β(1,6) και Γ(-5,2). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MAB) = \frac{(AB\Gamma)}{2}$.
83. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\epsilon: 2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12τμ.
84. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο Ρ(-2, 6) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3.
85. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την $\epsilon: 2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 12 τ.μ.
86. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου, του οποίου οι πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $x = a$, $y = \beta$ και $y = \lambda x$ (όπου $\lambda \neq 0$ και $\beta \neq \lambda a$), είναι $E = \frac{(\beta - \lambda a)^2}{2|\lambda|}$.
87. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία $\epsilon: 6x - 3y + 10 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 9$.

88. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(1, -4)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E=1$.
89. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που περνάει από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με την ευθεία $x+y=3$ και τον άξονα $y'y$ τρίγωνο εμβαδού 9 τ.μ.
90. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 4y + 3 = 0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.
91. Δίνονται τα σημεία $A(\eta\mu\frac{\theta}{2}, \sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2})$ και $B(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}, \eta\mu\frac{\theta}{2})$ με $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε:
- την εξίσωση της ευθείας AB ,
 - την τιμή του θ για την οποία το τρίγωνο OAB έχει το μέγιστο εμβαδόν.
92. Έστω τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $\Gamma(2\lambda+1, -\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Να δειχθεί ότι τα σημεία A , B , Γ είναι κορυφές τριγώνου με σταθερό εμβαδό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι το σημείο Γ κινείται πάνω σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση
 - Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $\Gamma(2\lambda+1, -\lambda+1)$ να απέχει από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη απόσταση

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ

93. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x+2y-6=0$. Να βρείτε :
- τη μικρότερη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων,
 - ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $M(2,-3)$
94. Δίνονται τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(8,-1)$.
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων.
 - Έστω η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B . Να βρείτε :
 - την εξίσωση της ευθείας ε
 - ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $\Gamma(5,3)$.
95. Θεωρούμε τα σημεία $M(\lambda-4, 3\lambda-2)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του λ τα σημεία M κινούνται σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση

- ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων.
96. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 1)y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda + 1)x - (\lambda + 4)y - 15 = 0$ είναι κάθετες. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ
 - το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2
 - την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε_1 από την αρχή των αξόνων, καθώς και ποιο είναι το σημείο αυτό.
97. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x - y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, και τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(-7, -1)$, τα οποία απέχουν από την ε αποστάσεις $2\sqrt{10}$ και $\sqrt{10}$ αντίστοιχα.
- Να βρείτε τον αριθμό α
 - Αν Γ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να βρείτε ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

98. Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(5, \lambda)$ και $\Gamma(\lambda - 6, 5)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει ότι $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = -35$. Να βρείτε :
- τον αριθμό λ
 - την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB
 - τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και ισαπέχουν από τα σημεία B και Γ
99. Οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda x + \lambda$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + 2$ απέχουν απόσταση ίση με 1.
- Να βρείτε τον αριθμό λ
 - Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2
 - Έστω ε_3 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(4, 2)$ και τέμνει την ε_1 σε σημείο με τετμημένη 7. Να βρείτε :
 - την εξίσωση της ευθείας ε_3
 - τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_2 και ε_3 .
100. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 4)y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 3 = 0$ είναι κάθετες. Να βρείτε :
- τον αριθμό λ
 - τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο $P(2, -1)$ και σχηματίζουν με τις ε_1 και ε_2 τρίγωνο με εμβαδόν 1 τ.μ.
101. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\Gamma(-2, -1)$, στο οποίο η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x + y - 10 = 0$ και το ύψος AD βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x + 3y - 15 = 0$. Να βρείτε :
- τις συντεταγμένες της κορυφής A
 - τις εξισώσεις των πλευρών AG και $B\Gamma$

- iii) τις συντεταγμένες της κορυφής B
 i) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.
102. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση ευθείας $(2\lambda^2 + \lambda + 1)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0$, όπου $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}$, παριστάνει πορεία 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.
 α) Να βρεθεί η θέση του λιμανιού,
 β) Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο (1, 2) υπάρχει φάρος που δεν λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση κάποιο από τα πλοία να συγκρουστεί με τον φάρο,
 γ) Να εξετάσετε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση:
 $11x - 3y - 22 = 0$.
103. Στην πόλη των Μαθηματικών οι δρόμοι που έχουν εξίσωση:
 $(3\lambda + 1)x + 2(\lambda - 1)y + 7\lambda + 5 = 0$, περνούν από την πλατεία της γνώσης,
 ii) Να δείξετε ότι οι δρόμοι της εξίσωσης (1) είναι ευθείες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες της πλατείας της γνώσης (η πλατεία θεωρείται ως σημείο),
 ii) Να βρείτε τους δρόμους της εξίσωσης (1) που είναι παράλληλοι στον xx',
 iii) Αν ο δρόμος των συναντήσεων έχει εξίσωση της μορφής (1) και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$, να βρεθεί η εξίσωση του δρόμου αυτού.
104. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου είναι τοποθετημένο στο επίπεδο xOy έτσι ώστε η μεσαία γραμμή να είναι τμήμα της ευθείας $\varepsilon: 4x - 3y + 10 = 0$. Αν το σημείο του πέναλτι στην μία περιοχή, έχει συντεταγμένες (20, -20) τότε:
 i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που γίνεται η έναρξη του αγώνα,
 ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου του πέναλτι στην άλλη περιοχή.
105. Οι συντεταγμένες ενός πλοίου κάθε χρονική στιγμή είναι $\Pi (2t + 20, t + 40)$, $t \geq 0$. Το πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Λ την χρονική στιγμή $t = 0$ με προορισμό προς το λιμάνι Ο, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού επιπέδου.
 α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Λ,
 β) Να βρεθεί η απόσταση των δύο λιμανιών,
 γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοίου σε σχέση με τον προορισμό του,
 δ) Ποιο σημείο της πορείας του πλοίου απέχει από τον τελικό προορισμό την μικρότερη απόσταση και ποια είναι αυτή;
106. Σε έναν αγώνα αυτοκινήτων δύο κινητά βρίσκονται κάθε χρονική στιγμή t στα σημεία $K_1(t, t + 4)$, $K_2(1 - 2t, t + 1)$, $t \geq 0$.
 α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο κινητών την χρονική στιγμή $t = 2$,

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο κινητά,

γ) Την χρονική στιγμή $t=1$, να βρεθεί η απόσταση του K_1 από την τροχιά του K_2 .

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

107. Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

A) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

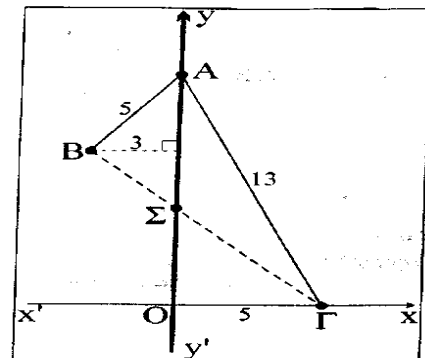
B) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OA .

Γ) Έστω τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ϵ). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{OM}^2$$

(ΘΕΤΙΚΗ 1999 3^ο ΘΕΜΑ)

108. Στο διπλανό σχεδιάγραμμα, με καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy , τα σημεία A, B και Γ παριστάνουν τις θέσεις τριών κοινοτήτων ενός δήμου. Στο ίδιο σχεδιάγραμμα, ο άξονας $y'y'$ παριστάνει μια εθνική οδό και τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$ δύο επαρχιακούς δρόμους που συνδέουν την κοινότητα A με τις κοινότητες B και Γ και έχουν μήκη 5km και 13km αντίστοιχα. Πρόκειται να κατασκευαστεί ένας επαρχιακός δρόμος $B\Gamma$ που θα συνδέει τις κοινότητες B και Γ , ο οποίος στο σχεδιάγραμμα παριστάνεται με το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$. Αν οι αποστάσεις των κοινοτήτων B και Γ από την εθνική οδό $y'y'$ είναι 3km και 5km αντίστοιχα, τότε :



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ .

β) Να βρείτε το μήκος του επαρχιακού δρόμου $B\Gamma$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες του σημείου Σ στο οποίο ο επαρχιακός δρόμος $B\Gamma$ συναντά την εθνική οδό.

(ΘΕΤΙΚΗ 1999 4^ο ΘΕΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ)

109. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , εξίσωση της ευθείας

$(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$ όπου λ πραγματικός αριθμός περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2)$, $\Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K , Λ και M .

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκονται πλησιέστερα στην φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M .

(ΘΕΤΙΚΗ 2000 4^ο ΘΕΜΑ)

110. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες.

γ) Να βρείτε ένα σημείο $M(k, \lambda)$ με $k > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{a} = (3, k)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 και το διάνυσμα $\vec{b} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων

άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο M .

(ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ 2001 3^ο ΘΕΜΑ)

111. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy του παρακάτω σχήματος δίνονται τα σημεία $A(4,0)$ και $B(0,4)$, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B και η ευθεία δ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη προς την ευθεία ϵ .

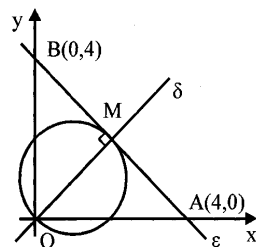
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ϵ είναι $x + y = 4$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των ευθειών δ και ϵ .

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα OM .

(4^ο Εσπερινού 2002)



112. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.
 Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.
 Β. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:
 α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1, 5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.
 (3ο 2003)
113. Δίνονται τα σημεία $A(14, 5)$ και $B(2, -1)$.
 Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι $x - 2y - 4 = 0$.
 Β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x' , y' στα σημεία $K(4, 0)$ και $\Lambda(0, -2)$ αντίστοιχα.
 (3ο 2003 επαναληπτικές)
114. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + 4y + 16 = 0$.
 Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2
 Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2
 Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα x' και αποκόπτεται από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $\delta = 4\sqrt{3}$
 (4ο 2004)
115. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις : $\varepsilon_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + 3y - 8 = 0$ αντίστοιχα.
 α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_1 είναι κάθετη στην ε_2
 β) Υποθέτουμε ότι το σημείο $A(\alpha, 2)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 και το σημείο $B(-5, \beta)$ ανήκει στην ευθεία ε_2
 i) Να βρείτε τις τιμές των α και β
 ii) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x - y + 3 = 0$
 γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2
116. Δίνεται το σημείο $A(2, 1)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy
 i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA
 ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία OA
 iii) Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x' στο σημείο B . Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου OAB που διέρχεται από την κορυφή A
 iv) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

117. Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, η πλευρά AB ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $: 3x - 7y + 27 = 0$ και η πλευρά $A\Delta$ στην ευθεία με εξίσωση $: 4x + y + 5 = 0$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma, B\Delta$ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K\left(2, \frac{5}{2}\right)$.
- i) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(6, 2)$
 - ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά $B\Gamma$
 - iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος $B\Delta$
118. Ένα επιβατηγό πλοίο εκτελεί το δρομολόγιο Πειραιάς – Ηράκλειο Κρήτης. Σε κάθε χρονική στιγμή t του ταξιδιού η θέση M του πλοίου ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι $M(2+kt, \lambda+2t)$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Τη χρονική στιγμή $t=5$ το πλοίο διέρχεται από το σημείο $A(7, 13)$.
- i) Να βρείτε τις τιμές των k και λ
 - ii) Να αποδείξετε ότι το πλοίο διαγράφει γραμμή που βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: y=2x-1$
 - iii) ένα δελφίνι κινείται παράλληλα προς το πλοίο. Να βρείτε ένα διάνυσμα μήκους 1, κάθετο προς την ευθεία πάνω στην οποία κινείται το δελφίνι