

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Να σχεδιάσετε την καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} = x + 2y$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία τέμνει :
 - i) τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη -3,
 - ii) την ευθεία $x = 5$ σε σημείο με τεταγμένη 4 και την ευθεία $y = -2$ σε σημείο με τετμημένη -1,
 - iii) την ευθεία $y = 2x - 1$ σε σημείο με τετμημένη 4 και την ευθεία $y = x + 1$ σε σημείο με τεταγμένη -2.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών:
 $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:
 - α) παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$
 - β) κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$
 - γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - δ) παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - ε) παράλληλη στον άξονα $y'y$
 - στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
 - ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων
4. Δίνονται τα σημεία A (1, 3), B (-1, 0) και Γ (3, -2).
 - i) Να δείξετε ότι ορίζουν τρίγωνο ABΓ,
 - ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του AB, ΑΓ,
 - iii) Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών ΒΔ και ΓΕ,
 - iv) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου Η,
 - v) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Η από την πλευρά ΑΓ.
5. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Μ (5, -4) ως προς την ευθεία $4x - 3y + 2 = 0$.
6. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ(1,2) και τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(1, 4)$ και τέμνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 4$ και $\varepsilon_2: y = 2x + 3$ στα σημεία A και B αντιστοίχως, έτσι ώστε το M να είναι το μέσον του AB .
8. Δίνονται οι εξισώσεις: $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ δύο πλευρών ενός παραλληλογράμμου και η εξίσωση $3x + 2y + 3 = 0$ μιας διαγωνίου του. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.
9. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ του οποίου η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(2, 3)$ το ύψος AD έχει εξίσωση $3x - 5y + 6 = 0$ και η διάμεσος AM εξίσωση: $x - 11y + 2 = 0$.
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$. Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι $x - 2y + 1 = 0$, και το ύψος του BD έχει εξίσωση $x + 2y + 3 = 0$, να βρείτε τις κορυφές B και Γ .
11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$ και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις: $y = 3$ και $2x - y + 1 = 0$. Να βρείτε τις κορυφές B και Γ .
12. Δυο από τα ύψη ενός τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν εξισώσεις: $y = -3x + 11$ και $y = x + 3$. Αν $A(2, 1)$, να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών και οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με ορθόκεντρο το σημείο $H(1, 3)$. Αν οι εξισώσεις των πλευρών του AB και AG είναι $x + y - 3 = 0$ και $y = 2x$ αντίστοιχα να βρείτε τις κορυφές του A και B .
14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB: y = 3x$ και $AG: x - y + 2 = 0$. Αν το σημείο $M(1, 2)$ είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
15. Τριγώνου $AB\Gamma$ η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(-3, 1)$, η ευθεία του ύψους BE έχει εξίσωση $-x + 3y - 1 = 0$ και η διχοτόμος BD έχει εξίσωση $2x - 3y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του
16. Τριγώνου $AB\Gamma$ η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 2)$, η ευθεία του ύψους BE έχει εξίσωση $\varepsilon_1: x + 3y = 3$ και η ευθεία της διαμέσου GM έχει εξίσωση $\varepsilon_2: x - y - 11 = 0$. Να βρείτε τις δύο άλλες κορυφές του
17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$ και $B(-1, 0)$. Αν η εξίσωση της διχοτόμου AD είναι $y = 2x$, Να βρείτε:
 - α) Το συμμετρικό σημείο του B ως προς την ευθεία AD ,
 - β) Την εξίσωση της πλευράς AG .
18. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$ και ορθόκεντρο $H(3, 0)$ και βαρύκεντρο $\Theta(1, 4)$. Να βρείτε:
 - α) Το μέσον M της πλευράς $B\Gamma$,
 - β) Την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.

19. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α(1, 2) και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$ και $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.
20. Δίνονται τα σημεία Α (4, 2), Β (3, -1) και η ευθεία ε: $y = -3x$. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.
21. Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται το ύψος του ΑΔ: $3x + 2y - 11 = 0$, η διάμεσός του ΑΜ : $4x + y - 13 = 0$ και το μέσο Λ (2, -2) της πλευράς του ΑΓ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
22. Οι δύο πλευρές παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: 2x + y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 8x + 3y + 1 = 0$, ενώ μία διαγώνιός του έχει εξίσωση δ: $3x + 2y + 3 = 0$. Να βρεθούν οι κορυφές του.
23. Ενός παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ ανήκει στην ευθεία $3x - 7y + 27 = 0$ και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία $4x + y + 5 = 0$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K\left(2, \frac{5}{2}\right)$.
Α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (6,2).
Β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.
Γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.
24. Δίνονται τα σημεία Β(-3,7), Γ(3,1) και οι ευθείες (ε_1): $3x - y + 2 = 0$ και (ε_2): $2x + y - 7 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Να βρεθούν :
α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ, η γωνία που σχηματίζει η ΒΓ με τον άξονα x'x και η εξίσωση της ΒΓ.
β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α.
γ) Η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία των ευθειών ΑΜ, ΒΓ.
δ) η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.
25. Δίνεται η ευθεία ε: $y = -x + 3$. Να βρείτε τη συμμετρική ευθεία τη ε, ως προς:
α) το σημείο Μ(3,1) β) την ευθεία $\varepsilon_1: y = -2x$.
26. Μια κορυφή ενός τετραγώνου είναι το σημείο τομής των ευθειών : $2x - 3y + 20 = 0$ και $3x + 5y - 27 = 0$ και η μια διαγώνιός του βρίσκεται επί της ευθείας $x + 7y - 16 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου καθώς και η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.

27. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α (1, 2) και οι εξισώσεις $x - 3y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.
28. Το σημείο Α (3, - 1) είναι κορυφή του τετραγώνου ΑΒΓΔ, του οποίου μία πλευρά έχει εξίσωση: $3x - 2y - 5 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
29. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 3 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου και Α (2, -1) μια κορυφή του να βρεθούν οι άλλες κορυφές και το εμβαδόν του.
30. Δίνονται τα σημεία Α (λ, 0), Β (2λ, 3λ), $\lambda \neq 0$. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία $x = -2\lambda$ στο Γ, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
31. Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - 3y + 1 = 0$, $\varepsilon_2: -x + 4y + 3 = 0$ και το σημείο Α (1, -2). Να βρεθεί σημείο Μ της ε_2 , ώστε το μέσο του ΑΜ να ανήκει στην ε_1 .
32. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon: ax + by + \gamma = 0$, $\varepsilon_1: ax - by + \gamma = 0$, $\varepsilon_2: ax - by - \gamma = 0$ και $\varepsilon_3: ax + by - \gamma = 0$ ($a, b, \gamma \neq 0$). Να αποδείξετε ότι:
 α) η ε_1 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$
 β) η ε_2 είναι συμμετρική της ε ως προς άξονα συμμετρίας τον $\gamma'\gamma$
 γ) η ε_3 είναι συμμετρική της ε ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή 0 των αξόνων
33. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $\chi + \psi = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Ρ (2, 3) ως προς άξονα συμμετρίας την (ε).

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

34. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
 Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
35. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x + (\lambda^2 - 1)y + (\lambda + 3) = 0$ παριστάνει ευθεία. Πότε η ευθεία αυτή είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$ και πότε είναι παράλληλη στον $\gamma'\gamma$
36. Να δείξετε ότι, η εξίσωση $(\lambda + 2)x + (\lambda - 3)y + (3\lambda^2 - 8\lambda + 5) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία. Πότε η ευθεία είναι παράλληλη στον $\chi'\chi$, πότε παράλληλη στον $\gamma'\gamma$ και πότε διέρχεται από το Ο(0,0)
37. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda^2 - 1 = 0$. Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι ώστε : Η εξίσωση αυτή να παριστάνει ευθεία, έστω (ε). Η ευθεία (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

38. Δίνεται η εξίσωση: $(\kappa^2+\kappa-2)x+(\kappa^2-4)y+2\kappa+4=0$ (1)
 α) Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία
 β) Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες αυτές περνούν από το σημείο $A(4,2)$
39. Δίνονται οι εξισώσεις $\varepsilon_1: (\kappa+1)(x+y)+(\kappa-2)(3x-4y)+\kappa=0$ και $\varepsilon_2: x-2y+3=0$
 α) Ναδειχθεί ότι η ε_1 παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
 β) Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
40. α) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $(\lambda^2+2\lambda+2)x+(2\lambda^2+3\lambda+3)y-2\lambda^2-\lambda-1=0$ (1) παριστάνει ευθεία που περνάει από σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί
 β) Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η ε_1 τέμνει την ευθεία $\varepsilon_2: 2x+y-5=0$
41. Δίνεται η εξίσωση $(\varepsilon): (1-2\lambda)x+(1+\lambda)y+8\lambda-1=0$. Να αποδειχθεί ότι:
 α) Η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β) Η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο, όταν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.
42. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(x+2y-5)+\lambda(3x-2y+1)=0$ (1) παριστάνει ευθεία. Στη συνέχεια να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
 Τέλος να βρείτε ποια από τις παραπάνω ευθείες της εξίσωσης (1):
 i) Διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$ ii) Είναι παράλληλη στον $x'x$
 iii) Είναι παράλληλη στον $y'y$ iv) Είναι παράλληλη στην ευθεία $4x+3y-5=0$
 v) Είναι κάθετη στην ευθεία $x+3y+7=0$
43. Να δείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ οι ευθείες: $(2a^2+a+1)x-(a^2-a+1)y-(a^2+2a)=0$ (1), διέρχονται από το ίδιο σημείο
44. Να δείξετε ότι η γραμμή με εξίσωση $(2\eta\mu^2\alpha)x+(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha)y+\sigma\upsilon\nu 2\alpha-1=0$ (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in (0, \pi)$. Βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1).
45. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες $(\varepsilon_\lambda): (3\lambda-1)x+(\lambda-1)y+4-8\lambda=0$ διέρχονται από σταθερό σημείο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
46. Να αποδειχθεί ότι, οι ευθείες της οικογένειας $(\varepsilon): (1+\mu)x+(1-\mu)y-(1+5\mu)=0$, $\mu \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

47. Να αποδειχθεί ότι, η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda - 3)x + (-\lambda^2 + 2\lambda + 1)y - \lambda^2 - 3 = 0$ είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
48. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1). Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;
49. Να αποδειχθεί ότι, η εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda + 3)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y + (3\lambda + 1) = 0$ είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
50. Να εξετάσετε αν η ευθεία $2\lambda x + 2\lambda y + 5\lambda = 3y - x + 7$ διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
51. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta - 1 = 0, \theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
52. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x + 1998y = 4$ ανήκει στην οικογένεια ευθειών που έχει εξίσωση $(x+y-4) + \lambda (x-3y-4) = 0$.
53. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $(\alpha^2 + 1)x + (\alpha - 1)y - 3\alpha^2 + \alpha - 4 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
54. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x + (\lambda - 5)y - \lambda + 8 = 0$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό (ανεξάρτητο του λ) σημείο. Για ποια τιμή του λ η ευθεία αυτή απέχει από την αρχή των αξόνων τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση;
55. Δίνεται η εξίσωση $(2\kappa - \mu)x + (\kappa + \mu - 6)y + 5\kappa - \mu - 6 = 0$ (1)
 i) Να βρείτε για ποιες τιμές των κ, μ η σχέση (1) παριστάνει ευθεία,
 ii) Αν τα κ, μ μεταβάλλονται έτσι, ώστε η σχέση (1) να παριστάνει ευθεία, να αποδείξετε ότι αυτή διέρχεται από σταθερό σημείο.
56. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $\eta \mu^2 \theta \cdot (1 - x) - \sigma \nu^2 \theta \cdot (1 + y) + x + y = 0$ παριστάνει ευθεία και ότι η ευθεία αυτή διέρχεται από σταθερό σημείο, όταν το θ μεταβάλλεται. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ η εξίσωση $2x \eta \mu^2 \frac{\theta}{2} + 2y \sigma \nu^2 \frac{\theta}{2} + \cos \theta - 1 = 0$ παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο, όταν το θ μεταβάλλεται.
57. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda y + 2 = 0$ (1).
 α) Να βρείτε για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία γραμμή

- β) Για τα λ που βρήκατε να δείξετε ότι οι ευθείες της οικογένειας δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο
- γ) Να δείξετε ότι από το τυχαίο σημείο $M(\alpha, \beta)$ του επιπέδου διέρχονται δύο το πολύ ευθείες της οικογένειας. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των α, β ώστε να διέρχεται από το M μία μόνο ευθεία;
58. α) Ναδειχθεί ότι οι ευθείες $\varepsilon_k: (k+1)x - (2k-1)y + k = 0, k \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
β) Να υπολογισθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon: \alpha x - 2y + 1 = 0$ να ανήκει στο σύνολο των ευθειών ε_k
59. Δίνεται το σύνολο των γραμμών $\Delta_\alpha: (\alpha^2 - 3\alpha + 2)x + (\alpha^2 - 1)y + \alpha^2 - 5\alpha + 4 = 0$
α) Ναδειχθεί ότι το σύνολο αποτελείται από ευθείες
β) Να προσδιορισθεί το α ώστε το σύνολο να διέρχεται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρεθεί
60. Η προβολή της αρχής των αξόνων πάνω σε μια ευθεία ε είναι το σημείο $P(3, 1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ε .
61. Φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $\Sigma(2, 3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία $\chi + \psi + 1 = 0$ μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$
Να βρεθούν οι εξισώσεις της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης ακτίνας.
62. Ένα σημείο P του επιπέδου κινείται πάνω στην ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό σημείο P' του P ως προς την ευθεία $x + 2y - 1 = 0$ κινείται πάνω στην ευθεία $7x - y - 2 = 0$.
63. Ναδειχθεί ότι κάθε ευθεία έχει το πολύ δύο σημεία της μορφής $(k, k^2), k \in \mathbb{R}$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

64. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + 8y - 4\lambda + 4 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y - 3 = 0$.
Να βρείτε τη σχετική θέση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
65. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda + 1)y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 2)x + \lambda y - 1 = 0$.
i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.
ii) Να βρείτε το λ , ώστε η ευθεία $\zeta: 3x + 2y + 3 = 0$ να διέρχεται από το μοναδικό κοινό σημείο των ε_1 και ε_2 .

66. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 3)y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y - 3 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , το σημείο τομής M των ε_1 και ε_2 κινείται πάνω σε μία ευθεία.
67. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + \lambda y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 2)x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , το σημείο τομής M των ε_1 και ε_2 απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5.
68. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 4)y - 12 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda - 1)x + (\lambda - 5)y - 4 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο M , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες συναρτήσει του λ .
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , το σημείο M :
 - απέχει από τον άξονα $y'y$ απόσταση ίση με 7
 - απέχει από τον άξονα $x'x$ απόσταση μικρότερη του 5.
69. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 2y - 4 = 0$, $\varepsilon_2 : y = -x + 1$ και $\varepsilon_3 : x + 2y = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
70. Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ η ευθεία $\varepsilon : (\mu - 10)x + (\mu + 1)y + 2 = 0$ διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1 : y = 4x - 5$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = 8$
71. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 1)y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - \lambda + 2 = 0$.
- Να βρείτε τη σχετική θέση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
 - Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται, να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται, το σημείο τομής τους ανήκει σε σταθερή ευθεία.
72. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x + \mu y = 2\mu^2$ και $\varepsilon_2 : (\mu - 3)x + (\mu + 2)y = 2\mu^2 + 2$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ για τις διάφορες τιμές του μ .
 - Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία, την οποία και να προσδιορίσετε.
73. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(2 - \mu)x - (\mu + 5)y + \mu - 1 = 0$ παριστάνει :
- ευθεία,

- ii) ευθεία ε παράλληλη στον άξονα $x'x$,
 iii) ευθεία ε παράλληλη στον άξονα $y'y$,
 iv) ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
74. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\mu-2)x + (\mu+1)y - \mu + 5 = 0$ παριστάνει ευθεία. Επίσης να βρείτε για ποιες τιμές του μ η ευθεία αυτή :
- i) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,
 ii) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$,
 iii) διέρχεται από το σημείο $P(3, 4)$,
 iv) διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
 v) έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2 ,
 vi) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .
75. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\mu^2 + \mu)x + (\mu^2 - 1)y + \mu^2 + 3\mu + 2 = 0$ παριστάνει:
- i) ευθεία,
 ii) ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$,
 iii) ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$,
 iv) ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
76. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\alpha^2 - 4)x + (\alpha^2 - 2\alpha)y + 3\alpha - 6 = 0$ παριστάνει:
- i) ευθεία,
 ii) ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$,
 iii) ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$,
 iv) ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
77. Να βρεθεί μια ευθεία με εξίσωση της μορφής $2x + 3y + 1 - \mu(x - y + 2) = 0$ που να είναι παράλληλη:
- i) στον άξονα $x'x$, ii) στον άξονα $y'y$.
78. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \mu x + 5$ και $\varepsilon_2 : y = (3\mu - 4)x + \mu - 1$ είναι :
- i) παράλληλες ii) κάθετες

79. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = 2$ και $\varepsilon_2 : y = (\mu - 3)x + 1$ είναι κάθετες.
80. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ευθείες: $\varepsilon_1: x + \mu y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2\mu x + 2y + \lambda = 0$, είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.
81. Δίνονται οι εξισώσεις: (ε_1) $(\kappa - 2)x - \kappa y = -2$ και (ε_2) $(\kappa + 1)x + (\kappa^2 - 4)y = -3$, με κ πραγματικό αριθμό.
α) Να αποδειχτεί ότι είναι εξισώσεις ευθειών,
β) Να βρεθεί το κ ώστε να είναι κάθετες.
82. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon : (\lambda + 2)x + \lambda y + 3\lambda - 1 = 0$ και $\zeta : (\lambda - 1)x + \lambda y + 5 = 0$. βρείτε τον λ , ώστε να είναι $\varepsilon \parallel \zeta$.
83. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (3\lambda + 2)x + (\lambda + 1)y + 7 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda + 1)x - 4\lambda y + 2\lambda = 0$. Να βρεθεί ο λ ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
84. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x + (\mu + 2)y = 0$ και $\varepsilon_2: \mu x - (3\mu + 2)y + 7 = 0$.
Να βρείτε τον μ , ώστε η γωνία των ε_1 και ε_2 να είναι 90° .
85. Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\mu + 1)x - 2\mu y = \lambda$ και $\varepsilon_2: (\mu - 1)x - 3y = 2\lambda - 1$:
α) τέμνονται,
β) είναι παράλληλες,
γ) συμπίπτουν.
86. Για τις ευθείες $\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $\varepsilon_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ να αποδείξετε ότι:
i) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$
ii) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
87. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\mu - 1)x + \mu y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\mu + 2)x + (1 - \mu^2)y + 4 = 0$ είναι κάθετες.

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ Η ΚΑΘΕΤΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

88. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 3)y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 3)x + (\lambda - 4)y + 2 = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει :
i) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ ii) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

89. Οι ευθείες : $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 3)y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 4)x + (2 - \lambda)y + 14 = 0$ είναι κάθετες .
 Να βρείτε :
 i) τον πραγματικό αριθμό λ
 ii) το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 .
90. Οι ευθείες : $\varepsilon_1: (\lambda - 6)x + \lambda y + 21 = 0$ και $\varepsilon_2: \lambda x + (\lambda + 2)y + 2 = 0$ είναι παράλληλες ,
 ενώ οι ευθείες $\varepsilon_3: (\mu - \lambda)x - \mu y - 9 = 0$ και $\varepsilon_4: (\mu + 2\lambda)x - (\mu - \lambda^2)y + 27 = 0$ είναι
 κάθετες . :
 i) Να βρείτε τις τιμές των λ και μ
 ii) Αν A είναι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 και B είναι το σημείο τομής των ε_3 και ε_4
 να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
91. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 1)y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda - 4)x + (\lambda - 3)y + 2 = 0$ οι οποίες
 είναι παράλληλες
 i) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ
 ii) έστω ότι η ε_1 τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία A και B αντίστοιχα και η ε_2
 τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα .Να βρείτε το εμβαδόν
 του τετραπλεύρου ABΓΔ.
92. Οι ευθείες : $\varepsilon_1: (\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y - 4 = 0$ και $\varepsilon_2: \lambda x + (5 - \lambda)y - 7 = 0$ είναι κάθετες .
 α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ
 β) Θεωρούμε την εξίσωση : $(\mu^2 - 3\mu + 2)x + (\mu^2 - 1)y - 2\mu^2 + 2\mu = 0$ (1)
 i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία
 ii) Να βρείτε τον αριθμό μ ,ώστε η ευθεία ζ που έχει εξίσωση την (1) να διέρχεται
 από το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .
93. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $N(x_0, y_0)$ και είναι
 παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\alpha, \beta)$ έχει εξίσωση $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$
94. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από το σημείο $N(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη
 στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (\alpha, \beta)$ έχει εξίσωση $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \beta & -\alpha \end{vmatrix} = 0$.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

95. Να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: \mu x - y = \mu - 2$ και $\varepsilon_2: 3x - y = 1$ για τις διάφορες
 τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε_2 σχηματίζει με την ε_1 γωνία ίση με:
 α) $\frac{\pi}{2}$, και β) $\frac{\pi}{4}$.
96. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: x = 2$ και $\varepsilon_2: x\sqrt{3} + 3y - k = 0$.

97. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: \sqrt{3} \cdot x - y + 7 = 0$ και $\varepsilon_2: \sqrt{3} \cdot x - 3y + 13 = 0$.
98. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: x = 3$ και $\varepsilon_2: x + y + 1 = 0$
99. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: y = 2x - 5$ και $\varepsilon_2: y = -3x + 1$
100. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0$ και $\varepsilon_2: (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \kappa = 0$
101. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \alpha x + (\beta - 1)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2: \beta x + (\alpha + 1)y + 6 = 0$ τέμνονται στο σημείο $M(1, -2)$. Να βρείτε :
 i) τους αριθμούς α και β
 ii) την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 .
102. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (\lambda - 6)y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda + 5)x + (\lambda - 7)y + 13 = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε :
 i) τον πραγματικό αριθμό λ
 ii) την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και $\varepsilon_3: 3x + 2y - 5 = 0$.
103. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \alpha x + (\alpha - 8)y + 7 = 0$ και $\varepsilon_2: (\alpha + 5)x + (\alpha - 11)y - 13 = 0$ είναι παράλληλες, ενώ οι ευθείες $\varepsilon_3: \beta x + (5 - \beta)y - 21 = 0$ και $\varepsilon_4: (\beta - 3)x + (\beta - 8)y + 4 = 0$ είναι κάθετες. Να βρείτε :
 i) τους αριθμούς α και β
 ii) την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_3
104. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \alpha x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: 5x - 3y + 8 = 0$. Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να σχηματίζουν γωνία 45° .
105. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \sqrt{3} \cdot x - 3y + 5 = 0$ και το σημείο $P(\sqrt{3}, 4)$. Να βρείτε ευθεία ζ που διέρχεται από το σημείο P και σχηματίζει με την ευθεία ε γωνία ίση με 60° .
106. Να βρείτε για ποια τιμή του α οι ευθείες $\varepsilon_1: x + \alpha y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2: \alpha x + y - 3 = 0$ σχηματίζουν:
 i) γωνία ίση με 90° ,
 ii) οξεία γωνία ίση με 45° .
107. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: -2x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: y = (\lambda - 1)x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σχηματίζουν γωνία 45°
108. Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: x \sin \varphi + y \eta \mu \varphi + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: y = x \epsilon \varphi \theta - 3$ όπου $0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$.

109. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ζ , η οποία διέρχεται από το σημείο $P(1,2)$ και σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon : x = 4$ οξεία γωνία θ ίση με 60° .
110. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ζ , η οποία διέρχεται από το σημείο $P(1, 2)$ και σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon: y = - 2x + 6$ οξεία γωνία θ ίση με 45° .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

111. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(6 - 3\lambda, 1 + 2\lambda)$, όταν το λ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές.
112. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(5-2\mu, 3\mu+4)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
113. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων
 i. $M(\lambda-1, 2\lambda+3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ii. $K(\lambda+2, 1-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 iii. $A(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ iv. $X(\lambda^2, 2\lambda^2 - 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
114. Να δείξετε ότι τα σημεία $M(2t-1, 5-6t)$, $t \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση
115. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\lambda+3, 3\lambda)$. Από τα προηγούμενα σημεία να βρείτε το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.
116. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\beta-1, \alpha+1)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν το σημείο $P(\alpha, \beta)$ ανήκει στην ευθεία $x+y-2=0$.
117. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(x,y)$ για το οποίο είναι

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha(1+t^2)-2t}{1+t^2} \vec{i} + \frac{\beta t}{1+t^2} \vec{j}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } O \text{ η αρχή των αξόνων}$$
118. Να βρεθεί η θέση των ευθειών $\varepsilon_1: kx+(k-8)y-2=0$ και ε_2 , όπου ε_2 η ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο $A(3k-1, k+2)$, $k \in \mathbb{R}$
119. Τριγώνου $AB\Gamma$ οι κορυφές είναι $A(-2, 2k)$, $B(2k, k)$ και $\Gamma(k-2, -k)$, $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου βάρους του τριγώνου.
120. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(5, 3)$, $B(0, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$. Φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Δ αντιστοίχως. Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των $B\Delta$ και ΓE .
121. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x+(\lambda-2)y=\lambda-1$ και $\varepsilon_2: (\lambda+2)x+\lambda y=\lambda$. Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής τους

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $Ax^2 + By^2 + \Gamma xy + \Delta x + E y + Z = 0$

122. Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 - 2y^2 - 3xy - 7x - y + 3 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ,οι οποίες είναι κάθετες.

ii) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών του ερωτήματος (i)

123. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 3 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 .

ii) Έστω ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B και έστω M το μέσο του AB .Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη στις ε_1 και ε_2 .

124. Δίνεται η εξίσωση : $6x^2 - y^2 - xy - x - 2y - 1 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 .

ii) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

iii) Αν η ευθεία ζ : $4x+3y-7=0$ τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B αντίστοιχα ,να βρείτε την απόσταση AB

125. Δίνεται η εξίσωση : $3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 .

ii) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες του ερωτήματος (i).

126. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 .

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ ,η οποία διέρχεται από το σημείο P(-3,1)και τέμνει τις παραπάνω ευθείες στα σημεία A και B ,ώστε το P να είναι μέσο του AB.

127. Δίνεται η εξίσωση : $4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y - 8 = 0$ (1)

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 .

ii) Έστω A,B,Γ,Δ τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABΓΔ που έχει κορυφές τα σημεία A,B,Γ,Δ.

128. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο κάθετων μεταξύ τους ευθειών, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
129. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες ε_1 , ε_2 και ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία (ανεξάρτητη του λ) καθώς το λ μεταβάλλεται.
130. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες.
131. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4y^2 - 9xy + 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;
132. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = x \cdot y$.
- α) Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες, έστω ε_1 και ε_2 , που τέμνονται στην αρχή των αξόνων,
- β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 ,
- γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2 .

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

133. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_1 : ax + y + \sqrt{12} = 0$ και $\varepsilon_2 : -\sqrt{3}x + by - 18 = 0$, με $a, b \neq 0$. Έστω A το σημείο τομής της ε_1 με τον $\chi'\chi$ και B το σημείο τομής με τον $\gamma'\gamma$. Αν το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M(1,3)$, να βρείτε :
- i) τους αριθμούς a και b
- ii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .
134. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda + 4)x - \lambda y + \lambda + 3 = 0$. (1)
- i) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθείες οι οποίες διέρχονται από σταθερό σημείο.
- ii) Να βρείτε την ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1) και τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\gamma'\gamma$ στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι, ώστε να ισχύει $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 4$
135. Έστω A, B δύο κινητά σημεία των θετικών ημιαξόνων Ox και Oy αντίστοιχα τέτοια ώστε $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = 2$. Θεωρούμε το τετράγωνο $OB\Gamma\Delta$ εκτός του τριγώνου OAB και φέρνουμε την $A\Gamma$. Να δείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από σταθερό σημείο.

136. Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x + (2\lambda - 5)y - 8\lambda + 15 = 0$. (1)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρείτε.
 - Έστω οι ευθείες ε_1 και ε_2 οι ευθείες με εξισώσεις που προκύπτουν από την (1) για $\lambda=2$ και $\lambda=3$ αντίστοιχα .Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .
137. Δίνεται η εξίσωση : $\lambda x + (\lambda + 1)y + \lambda - 4 = 0$. (1)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρείτε.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1), και η ευθεία $\zeta : 3x + y - 4 = 0$ σχηματίζουν οξεία γωνία ίση με 45° .
138. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,6)$ και $B(-4,2)$ και ε_2 η ευθεία που είναι παράλληλη στη διχοτόμο του $1^{ου} - 3^{ου}$ τεταρτημορίου και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(-3,-1)$.
- Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2
 - Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής M των ευθειών ε_1 και ε_2 από την αρχή των αξόνων
 - Έστω ευθεία ζ που διέρχεται από το σημείο $P(-1,3)$ και τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα ,ώστε το P να είναι το μέσο του ΔZ . Να βρείτε ;
 - την εξίσωση της ευθείας ζ
 - την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ζ
139. Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-1,3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα ,ώστε το σημείο P να είναι μέσο του AB .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1
 - Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(-5,1)$ και $\Delta(2\alpha-7,5-4\alpha)$. Αν το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ε_1 ,να βρείτε :
 - τον αριθμό α
 - τη μεσοκάθετο ε_2 του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$
 - την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2
140. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon : x + \lambda y = \lambda + 3$ και $\zeta : y = \lambda x - 3\lambda - 1, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- καθεμιά από τις ε, ζ διέρχεται από σταθερό σημείο (ανεξάρτητο του λ)
 - $\varepsilon \perp \zeta$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,
 - το σύστημα $\begin{cases} x + \lambda y = \lambda + 3 \\ y = \lambda x - 3\lambda - 1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση και οι ευθείες ε, ζ έχουν μοναδικό κοινό σημείο M

δ) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M όταν το λ μεταβάλλεται.

141. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2

β) Έστω η ευθεία $\zeta : x + 2y - 3\lambda = 0$ τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B . Αν

M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB , τότε :

i) να βρείτε τις συντεταγμένες του M συναρτήσει του λ

ii) να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, το σημείο M κινείται πάνω σε μία ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.