Συνδυαστικά θέματα στον κύκλο

1. Δίνεται ο κύκλος C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο A(-3,4).Να βρείτε :

   i) εξίσωση του κύκλου

   ii) την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A,

   iii) την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσο το σημείο B(1,-2)

   iv) τη σχετική θέση της ευθείας ε: y=x-10 ως προς τον κύκλο και μετά ,τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε,

   v) το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, από τα οποία οι εφαπτομένες προς τον κύκλο είναι κάθετες.

2. Δίνεται ο κύκλος C που έχει το κέντρο του στην ευθεία ε: y=x-1 και διέρχεται από τα σημεία $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου

   ii) Να δείξετε ότι το σημείο P(4,0) είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου και μετά να βρείτε την εφαπτομένη ζ του κύκλου που διέρχεται από το P,

   iii) Να δείξετε ότι η ευθεία ζ του ii) ερωτήματος εφάπτεται στον κύκλο

   $C_1:\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ και ότι ο κύκλος C εφάπτεται του C_1

   iv) να δείξετε ότι τα σημεία M του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση : $\overrightarrow{M\Gamma}=3\overrightarrow{K\Gamma}$,όπου Γ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του κύκλου C ,ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

3. Οι ευθείες ε_1 :λx+(1-λ)y-13=0 και ε_2 : (λ+2)x+(λ+4)y-22=0 είναι κάθετες και το σημείο K(μ,μ+1) ανήκει στην ευθεία ε_2.

   α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

   β) Έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο K και αποκόπτει από την ευθεία ε_1 χορδή με μήκος 8.Να βρείτε :

   i) την εξίσωση του κύκλου C

   ii) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A(6,17)

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(\lambda+3)x+\mu y+\lambda=0$ (1)

   α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C για οποιεσδήποτε τιμές των λ ,μ ϵR .

   β) Έστω ότι ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο A(6,-1) και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία ε : 3x+y-7=0.Να βρείτε :

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:ΠΑΤΣΙΜΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

i) τις τιμές των λ και μ

ii) την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του A

iii) τα σημεία τομής B και Γ του κύκλου C και της ευθείας ε, καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

5. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τη γραμμή με εξίσωση : $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

α)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C ,του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

γ) Έστω A το αντιδιαμετρικό σημείο του O(0,0) στον κύκλο C.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου C στο σημείο A.

iii) Αν το σημείο B(2,α) ανήκει στον κύκλο C να βρείτε τον αριθμό α,καθώς και την απόσταση του σημείου B από την εφαπτομένη ε

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \alpha x - 4y - 15 = 0$ (1) .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε α ϵR

β) Έστω C ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1) .K το κέντρο του και ρ η ακτίνα του. Αν ισχύει ότι $|\overrightarrow{OK}| = \frac{\rho}{2}$,όπου O η αρχή των αξόνων και το K ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο ,να βρείτε :

i)τον αριθμό α

ii) τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$

7. Δίνονται τα σημεία A(1,3),B(-1,0) και Γ(3,-1).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

β) Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο A και ακτίνα ρ =$|\overrightarrow{AB}|$.Να βρείτε :

i) τις συντεταγμένες των σημείων τομής του κύκλου C με την ευθεία ΒΓ

ii) τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Δ(6,4)

8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda(x - y + 2) = 2$ (1), λ ϵR.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο

β) Για λ≠2,να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1):

i) έχουν τα κέντρα τους σε μία ευθεία

ii) διέρχονται από σταθερό σημείο

iii) εφάπτονται στην ευθεία η : x-y+2=0,

iii) Εφάπτονται μεταξύ τους .

γ) Να δείξετε ότι για κάθε λ≠2,το σύστημα : $\begin{cases} x^2+y^2+\lambda x-\lambda y=-2(\lambda-1) \\ x-y=-2 \end{cases}$.

έχει μοναδική λύση.

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda x+(\lambda-2)y-4-3\lambda=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ ϵR

β) Έστω ότι το κέντρο Κ του κύκλου C, που ορίζεται από την εξίσωση (1),ανήκει στην ευθεία : ε : 3x+y-9=0

i) Να βρείτε τον αριθμό λ ,καθώς και το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C.

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,5) ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{KA}$

iii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β(4,2) ανήκει στον κύκλο C και να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ζ του κύκλου C στο Β με την ευθεία ε.

10. Δίνεται ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(3,3) και ακτίνα $R=\sqrt{8}$,το σημείο Γ(1,5) και τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας ε: y=x με τον κύκλο.

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου

ii)Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ είναι σημείο του κύκλου και να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο αυτό

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

iv) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα

v) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Δ(7,3)

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x-2\lambda y=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε λ ϵ R η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο ,του οποίου να εκφράσετε το κέντρο και την ακτίνα συναρτήσει του λ.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε λ ϵ R ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Αν ο κύκλος C που παριστάνει η εξίσωση (1) εφάπτεται στην ευθεία $\zeta: x-y-4=0$,τότε

i) να βρείτε τον αριθμό λ

ii) να αποδείξετε ότι ο κύκλος C τέμνει τους άξονες χ΄χ και y΄y σε σημεία Α και Β αντίστοιχα ,διαφορετικά από την αρχή Ο τέτοια, ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές

iii) να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ζ

12. Δίνεται η εξίσωση : $x^2+y^2+\lambda x+(\lambda+2)y-\lambda-13=0$ (1) ,όπου λ ϵR.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ ϵR

β) Έστω ότι ο κύκλος C, που ορίζεται από την εξίσωση (1) διέρχεται από το σημείο A(-3,2)

i) Να βρείτε τον αριθμό λ , καθώς και το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου C,οι οποίες έχουν ως ένα άκρο τους το σημείο A(-3,2)

13. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο ,δίνεται η εξίσωση :

$x^2+y^2-2\lambda x+\lambda^2=5$ (1) ,όπου λ ϵR.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ ϵR

β) Έστω ότι το κέντρο του κύκλου C, που ορίζεται από την εξίσωση (1),ανήκει στην ευθεία : ζ : x+y-1=0

i) Να βρείτε τον αριθμό λ , καθώς και.

ii) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου C στο σημείο του A(2,2)

iv) Αν η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B και την ευθεία ζ στο σημείο Γ,να βρείτε τη γωνία $\left(\overrightarrow{BK},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$

14. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=4$ και το σημείο M(4ημθ,4συνθ).

α)Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι εξωτερικό του κύκλου C

β) Έστω MA και MB τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το M προς τον κύκλο C.

i) Να βρείτε του σημείου M από την ευθεία AB

ii) Να βρείτε το μήκος της χορδής AB.

iii) Να αποδείξετε ότι : $\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\pm 6\sqrt{3}$

15. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ και C_2: $(x+2\kappa)^2+(y-\lambda)=25$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1

β) Αν οι κύκλοι C_1 και C_2 είναι ομόκεντροι ,τότε :

i)να βρείτε τους αριθμούς λ και κ

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(-1,5) ανήκει στον κύκλο C_2 και να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο του B του A στον κύκλο C_2

iii) να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου C_2 στο σημείο του B

iv) να αποδείξετε ότι το σημείο Γ(6,4) ανήκει στον κύκλο C_2 και να βρείτε την απόσταση του από την ευθεία ε

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ,με Γ(1,-3),του οποίου η πλευρά βρίσκεται στην ευθεία $x-7y+38=0$ και το ύψος ΑΔ βρίσκεται στην ευθεία $x+3y-12=0$..Να βρείτε :

i) τις συντεταγμένες της κορυφής Α,

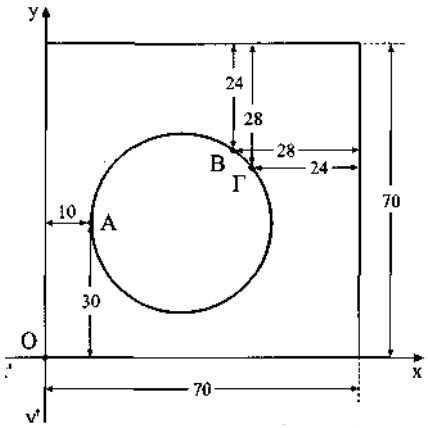
ii) την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ και τις συντεταγμένες της κορυφής Β,

iii) τις μεσοκαθέτους των πλευρών ΑΒ και ΑΓ,

iv) την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου C του τριγώνου ΑΒΓ

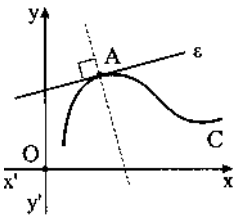
v) την εφαπτομένη ε του κύκλου C στο σημείο Α και την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ε.

17. Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70m υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος . Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης , τρεις μαθητές επέλεξαν τρία



σημεία Α, Β, Γ της περιφερειας της και μέτρησαν τις αποστάσεις απο τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα. Αν η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 1 m, να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης.

18. Έστω κύκλος C: $x^2+y^2-2x-4y=0$ και έστω Κ το κέντρο του. Μία μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Α και Β.



i) Να βρεθεί η ευθεία αν (ΑΒ)=2,

ii) Να βρεθεί η ευθεία αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΒ είναι ίσο με $\frac{3}{2}$ τ.μ.

19. Δίνονται τα σημεία Α (1, 2), Β (2, 4) και Γ (3, 1).

Να αποδειχθεί ότι: γωνία ΒΑΓ = 90^0.

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

20. Ο χώρος που χρειάζεται για να κατασκευαστεί μία πισίνα περικλείεται από την γραμμή C: $x^2+y^2-12x=0$. Στην θέση Τ (0, 3) είναι τοποθετημένος ένας προβολέας για να φωτίζει τις βραδινές ώρες.

i) Να δείξετε ότι η πισίνα είναι κυκλική και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της,

ii) Βρείτε τις εξισώσεις των δύο φωτεινών ακτίνων που εφάπτονται στην κυκλική πισίνα (Δεχτείτε ότι προβολέας και επιφάνεια πισίνας βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο).

21. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και ο κύκλος: C: $x^2+y^2=\rho^2$ και η ευθεία ε: $\beta x+\gamma y+\alpha=0$. Αν η ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου C να υπολογιστεί η ακτίνα ρ του κύκλου.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Γ=45° και Α (2, κ), Β (1, -1), Γ (3, κ) κ>0.
i) Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ,
ii) Βρείτε τις συντεταγμένες του ίχνους Δ του ύψους ΑΔ,
iii) Βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου Δ΄, του Δ ως προς την πλευρά ΑΓ,
iv) Δείξτε ότι τα σημεία Α, Δ, Γ, Δ΄ είναι ομοκυκλικά και να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

23. Έστω κύκλος C: $x^2+y^2-4x-2y=0$ και το σημείο Μ $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$,
i) Να δείξετε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου,
ii) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής ΑΒ του κύκλου που έχει μέσον το σημείο Μ,
iii) Να βρεθεί το συμμετρικό του κέντρου Κ του κύκλου, ως προς ΑΒ,
iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ.

24. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$, και το σημείο Α (2, 4),
i) Να δείξετε ότι το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C,
ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το Α,
iii) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των προηγούμενων εφαπτομένων να βρείτε την προβολή του Α στην ΒΓ,
iv) Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΓ,
v) Να βρείτε την γωνία των εφαπτομένων,
vi) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

25. i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_o : $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του Α(2, - 1).
ii) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2-5 + \lambda(2x-y-5)=0$ (1) Να αποδείξετε ότι:
α) η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ, με $\lambda\neq-2$ και να βρεθεί τι παριστάνει η (1) για λ= -2 ,
β) τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια σταθερή (ανεξάρτητη του λ) ευθεία,της οποίας να βρεθεί η εξίσωση,
γ) οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό (ανεξάρτητο του λ) σημείο, το οποίο και να βρεθεί,
δ) όλοι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους.

26. i) Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 : $(x+l)^2 + y^2 = 20$ και
C_2 : $x^2+y^2-8x+10y + 31=0$
ii) Να αποδείξετε ότι:

α) για κάθε $\lambda \in R$, με $\lambda \neq -1$, η εξίσωση $(x+l)^2 + y^2 - 20 + \lambda(x^2 + y^2 - 8\chi + 10y + 31)=0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος διέρχεται από δύο σταθερά (ανεξάρτητα του λ) σημεία,

β) για κάθε κ, $\mu \in R$, με $\kappa + \mu \neq 0$, η εξίσωση $\kappa[(x+l)^2 + y^2-20] + \mu[x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31] = 0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος διέρχεται από δύο σταθερά (ανεξάρτητα των κ, μ) σημεία.

27. i) Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ και $C_2 : 4x^2 + 4y^2 - 20x - 8y + 28 = 0$

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε λ, με $\lambda \neq -4$ και $\lambda \neq -2$, η εξίσωση $4x^2 + 4y^2 - 20x - 8y + 28 + \lambda(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4) = 0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος διέρχεται από σταθερό σημείο.

28. Α) Να δείξετε ότι από τις εξισώσεις: η C_1: $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$, παριστάνει ευθεία, ενώ η C_2: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, παριστάνει κύκλο.
Β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία τομής των γραμμών C_1 και C_2.

29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\theta - 2y\,\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Μ (1, 2).

Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα $\rho = 1$.

30. Δίνεται η εξίσωση του κύκλου :

$x^2 + y^2 - 2(1+\varepsilon\varphi\theta)x - 2(\varepsilon\varphi\theta - 1)y + \Gamma = 0, \theta \neq \kappa\pi + \pi/2, \kappa\pi$ και $\kappa \in Z, \Gamma \in R$.

i)Αν είναι $\rho^2 = \Gamma$,όπου ρ η ακτίνα του κύκλου ,να βρεθεί ο αριθμός Γ.

ii)Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται απο το σημείο Ο(0,0) είναι κάθετες μεταξύ τους και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

31. i) Δείξτε ότι ο κύκλος (C) $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + \alpha^2 = 0$, $\alpha \in R$ εφάπτεται στους δύο άξονες χ′χ και ψ′ψ

ii) Να βρείτε τους κύκλους που εφάπτονται στους θετικούς ημιάξονες Οχ ,Οψ και στην ευθεία : $\sqrt{3} \cdot x + y - 4 = 0$.

32. Δίνεται η εξίσωση (Ε) : $x^2 + y^2 - 5 + \lambda(x + y - 1) = 0$.

Askisopolis

i)Για κάθε $\lambda \in R$ να αποδείξετε ότι η (Ε) παριστάνει κύκλο

ii)Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της ευθείας : $x + y - 1 = 0$ και του κύκλου (C) : $x^2 + y^2 = 5$ και να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η (Ε) βρίσκονται σε σταθερή ευθεία ,η οποία να προσδιοριστεί.

iii)Αν $\kappa \neq -1$,να βρείτε το λ συναρτήσει του κ ώστε ο κύκλος της (Ε) να εφάπτεται της ευθείας (η) : $x + y + \kappa = 0$.

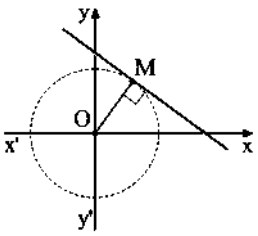
iv) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ που βλέπουν υπο ορθή γωνία το ΑΒ ,όπου Α,Β τα κοινά σημεία όλων των κύκλων που παριστάνει η (Ε) και να εξετάσετε αν ο γεωμετρικός τόπος ανήκει στους κύκλους της (Ε).

33. Σε κυκλικό ρολόι όταν ο ωροδείκτης δείχνει το 12, η προέκταση του τέμνει τον κύκλο του ρολογιού στο σημείο Α(3,4) (σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων). Το κέντρο του ρολογιού αντιστοιχεί στο σημείο Κ(1,2).

i) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου του ρολογιού.

ii) Να βρείτε τα σημεία που θα τέμνει η προέκταση του ωροδείκτη τον κύκλο του ρολογιού, όταν δείχνει το 3 και όταν δείχνει το 9.

34. Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις $\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 1$, όπου τα α, β μεταβάλλονται έτσι, ώστε $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\kappa^2}$ όπου κ θετική σταθερά. Να αποδείξετε ότι η προβολή της αρχής Ο των



αξόνων πάνω στις παραπάνω ευθείες κινείται (ανήκει) σε σταθερό (ανεξάρτητο των α, β) κύκλο του οποίου να βρεθεί η εξίσωση.

35. Δίνονται οι κύκλοι C_1 :$x^2 + y^2+Ax + By + Γ = 0$ και C_2: $x^2 + y^2 + αx + βy + γ = 0$ που εφάπτονται (εσωτερικά ή εξωτερικά) στο Μ. Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των C_1 και C_2 προκύπτει η εξίσωση $(A-α)x + (B-β)y + Γ-γ = 0$ (1)

Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία, η οποία :

i) διέρχεται από το Μ,

ii) είναι κάθετη στη διάκεντρο (δηλαδή στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των δύο κύκλων),

iii) είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων στο Μ.

36. i) Έστω κύκλος C και σημείο P εκτός αυτού, το οποίο κινείται πάνω σε ευθεία ζ, η οποία δεν διέρχεται από το κέντρο του C. Να αποδείξετε ότι η πολική ε του P ως προς τον κύκλο C διέρχεται από σταθερό σημείο.

ii) Αντιστρόφως, έστω σημείο Σ εντός κύκλου C και $ε_1$, $ε_2$ οι εφαπτόμενες του C στα άκρα A, B χορδής, η οποία διέρχεται από το Σ και δεν είναι διάμετρος. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των $ε_1$, $ε_2$ κινείται σε σταθερή ευθεία.

37. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $λ \in R$ η εξίσωση $x^2+y^2 + (2-4λ)x + 2λy + 5λ^2-4λ-3 = 0$ παριστάνει κύκλο με σταθερή (ανεξάρτητη του λ) ακτίνα.

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

iii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες των οποίων οι εξισώσεις να βρεθούν.

38. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Οxψ με Μ (x, ψ) παριστάνουμε τα σημεία μιας περιοχής. Στο Κ (12, 6) είναι τοποθετημένος ένας πομπός κινητής τηλεφωνίας. Η λήψη σε ένα σημείο της περιοχής θεωρείται "πολύ καλή", αν αυτό βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο που ορίζεται από τον κύκλο C_1, ο οποίος έχει κέντρο Κ και ακτίνα $ρ_1=\sqrt{10}$, ενώ η λήψη θεωρείται "καλή", να το σημείο είναι εξωτερικό του C_1 και εσωτερικό του C_2, που γράφεται με κέντρο Κ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

Α. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κύκλων.

Β. Να εξετάσετε αν στα σημεία Α (10, 7) και Β (9, 4) η λήψη είναι "καλή' ή "πολύ καλή".

Γ. Ένας αυτοκινητόδρομος της περιοχής (θεωρούμενος ως ευθεία) έχει εξίσωση ε: x-ψ-1=0. Να εξετάσετε αν υπάρχει τμήμα του αυτοκινητοδρόμου στο οποίο η λήψη είναι "καλή" ή "πολύ καλή".

39. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1.999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό n = 1,2,3 …, 1.999 και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x – 1)^2 + y^2 = 2n (x + y – 1)$. Να δείξετε ότι:
Α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του

κέντρου του.

Β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

Γ) Οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται στην ευθεία $x+y-1=0$ στο σημείο Α.

Askisopolis