

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A,B,Γ,Δ ισχύει ότι :

$$4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AG} - 7\overrightarrow{AA}$$

2. Αν ισχύουν $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{GP}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{BA}$

3. Αν ισχύει ότι $5\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{AA}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

4. Δίνονται τα διαφορετικά ανά δύο σημεία B,Γ,Δ,E για τα οποία ισχύει η σχέση $3\overrightarrow{AA} + 5\overrightarrow{BA} - 8\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BE} - 4\overrightarrow{GE}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του AB.

5. Έστω A,B,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά για τα οποία ισχύει ότι $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{AD}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

6. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ και Κτο κέντρο του. Αν Μ είναι το μέσο του ΚΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AG}$

7. Αν ισχύει $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BG}$, να αποδείξετε ότι $3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}$.

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και το σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{MG} = -2\overrightarrow{MB}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{BA}$.

9. Έστω A, B δύο διαφορετικά σημεία. Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία ισχύουν $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{AB}$.

10. Θεωρούμε τα διαφορετικά σημεία A και B, καθώς και σημείο Γ, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ. Να δείξετε ότι διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{GM} - 3\overrightarrow{AM} - 6\overrightarrow{MA}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

12. Δίνονται τα σημεία A,B,Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG} - 4\overrightarrow{MD}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

13. Δίνονται τα σημεία A,B και Γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{u} = 3\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} - 5\overrightarrow{MG}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

14. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PD}$.

15. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να βρείτε σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{PG} = 2\overrightarrow{PB}$. Να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{BA}$.

16. Να βρεθεί σημείο P για το οποίο ισχύει $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} + \vec{PD} = \vec{0}$, όπου :

- i) $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο,
- ii) $AB\Gamma\Delta$ τυχαίο κυρτό τετράπλευρο.

17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $MB=2MG$. Να αποδείξετε ότι $3\vec{AM} = \vec{AB} + 2\vec{AG}$

18. Θεωρούμε σημεία A,B,Γ για τα οποία ισχύει $3\vec{AB} = 5\vec{BG}$.

i) Να αποδείξετε ότι $8\vec{AB} = 5\vec{AG}$

ii) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A,B,Γ αντίστοιχα ως προς σημείο O, να εκφράσετε το $\vec{\beta}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

19. Έστω A,B,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία για τα οποία ισχύει ότι

$$2\vec{AG} - 6\vec{AB} - 5\vec{BD} = \vec{DG} - 5\vec{AD}$$

i) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Να βρείτε σημείο M, ώστε να ισχύει ότι : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG} = 3\vec{MD}$

20. Για τα διακεκριμένα σημεία A, B, Γ δίνεται $\vec{AG} = \lambda \vec{GB}$ με $\lambda \neq -1$. Να βρείτε, συναρτήσει του λ , την αριθμητική τιμή του x για την οποία:

i) $\vec{BG} = x\vec{GA}$

ii) $\vec{AB} = x\vec{BG}$

iii) $\vec{BA} = x\vec{AG}$

iv) $\vec{GB} = x\vec{BA}$

v) $\vec{GA} = x\vec{AB}$

21. Έστω τα σημεία A, B, Γ και Δ με $B \neq \Gamma$. Αν ισχύει $\vec{AD} = \kappa \vec{BG}$, $\kappa \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $\vec{AB} + \vec{GD} = x\vec{BG}$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

22. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $4\vec{a} + 6\vec{\beta} - 20\vec{\gamma}$ και $15\vec{\gamma} - 3\vec{a} - \frac{9}{2}\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

23. Αν ισχύει $2\vec{AL} + 3\vec{BL} + 2\vec{ML} = \vec{AK} + \vec{AM} + \vec{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{KL}$ και $\vec{ML}$ είναι αντίρροπα

24. Αν ισχύει ότι: $3\vec{BL} - \vec{GA} = 3\vec{BG} - \vec{AB}$, να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{GL}$.

25. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

i) το διάνυσμα $\vec{v} = 4\vec{AG} - 2\vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{BD} + \vec{GL}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{BG}$

ii) το διάνυσμα $\vec{w} = 2\vec{GB} - 3\vec{AB} + 3\vec{AG} - \vec{AL} - \vec{BD}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{AD}$

26. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Να αποδείξετε ότι :

i) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{u} + 3\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$

ii) το διάνυσμα $\vec{\delta} = \vec{u} - 2\vec{v}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$

27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και σημείο P της πλευράς BΓ τέτοιο, ώστε $P\Gamma = 2PB$.

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{AP}$ συναρτήσει των $\vec{AB}$ και $\vec{AD}$

ii) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PD}$

28. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ και σημείο P της πλευράς BΓ τέτοιο, ώστε $\vec{PB} = 2\vec{P\Gamma}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $\vec{PA} + \vec{P\Gamma} + \vec{PD} = 3\vec{BA}$ να αποδείξετε ότι :

i) $\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{B\Gamma}$

ii) Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις τις AB και ΓΔ

29. Σ' ένα τετράπλευρο ABΓΔ έχουμε $\vec{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{B\Gamma} = -4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\Gamma\Delta} = -5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το ABΓΔ είναι τραπέζιο.

30. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, Ε του επιπέδου του τέτοια ώστε : $\vec{AD} = 5\vec{AB} + 8\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 3\vec{AB} + 10\vec{AG}$. Να αποδειχθεί ότι : $\vec{DE} // \vec{B\Gamma}$.

31. Αν ισχύει ότι $\vec{AD} = 3\vec{AB} + 5\vec{AG}$ και $\vec{AE} = 5\vec{AB} + 3\vec{AG}$, να αποδείξετε ότι $\vec{DE} // \vec{B\Gamma}$

32. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Κ, Λ του επιπέδου του τέτοια ώστε : $4\vec{BK} = \vec{AB} + 3\vec{B\Gamma}$ και $4\vec{\Gamma\Lambda} = \vec{AG} - 3\vec{B\Gamma}$.

i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AK}$ και $\vec{AL}$ συναρτήσει των $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$

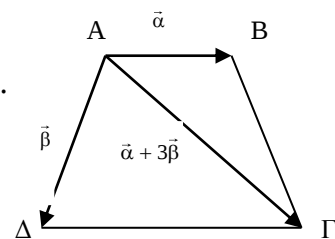
ii) Να αποδείξετε ότι : $\vec{KL} // \vec{B\Gamma}$.

33. Στο διπλανό σχήμα είναι $\vec{AD} = \vec{\alpha}$, $\vec{AB} = \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τραπέζιο

ii) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{B\Gamma} - \vec{AD}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.



34. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο γνωστά μη συγγραμμικά διανύσματα, να βρεθεί το διάνυσμα x για το οποίο ισχύει $(\vec{x} + \vec{\alpha}) // (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $(\vec{x} + 2\vec{\beta}) // \vec{\alpha}$

35. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε ότι:

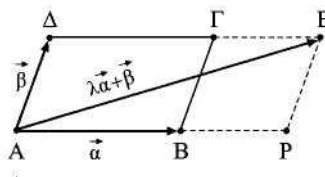
i) $-3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} \neq \vec{0}$

ii) και τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $-3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

36. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα διανύσματα $3x\vec{\alpha} - 12\vec{\beta}$ και $-4\vec{\alpha} + 2x^2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

37. Αν ισχύει $4\vec{MA} + 5\vec{MB} - 9\vec{MG} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά
38. Δίνονται σημεία A, B, Γ, Δ, E για τα οποία ισχύει ότι : $5\vec{AD} - 3\vec{AE} - 4\vec{AG} = 4\vec{EB} - \vec{EG} + 9\vec{BD}$
Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ, Δ, E είναι συνευθειακά.
39. Θεωρούμε σημεία O, A, B, Γ για τα οποία ισχύει ότι : $\vec{OA} = 4\vec{\alpha}$, $\vec{OB} = 2\vec{\beta}$ και $\vec{OG} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.
Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
40. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{OG} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$.
Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
41. Αν ισχύει $(\kappa + 2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa + 5)\vec{PG}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
42. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{OG} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
43. Να αποδείξετε ότι αν: $(\alpha + 4)\vec{KA} + 5\vec{KB} = (\alpha + 9)\vec{KG}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
44. Αν ισχύει $\vec{AB} = \frac{\vec{AG} + \lambda\vec{AD}}{1 + \lambda}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ και Δ είναι συνευθειακά.
45. Αν ισχύει $\vec{OG} = (1 - \lambda)\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.
46. Αν ισχύει $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και Μ είναι συνευθειακά.
47. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$.



Θεωρούμε το σημείο E για το οποίο ισχύει $\vec{AE} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και E είναι συνευθειακά.

48. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{A\Delta} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$
Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

49. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε: $MB = \frac{2}{3}M\Gamma$.

i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

ii) Έστω επίσης σημείο Δ για το οποίο ισχύει $15\overrightarrow{A\Delta} = 6\overrightarrow{B\Delta} + 4\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Δ, M είναι συνευθειακά.

50. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z τέτοια ώστε: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$
και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

i) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

51. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z τέτοια ώστε: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$
και $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$.

i) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

52. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διάμεσος του AM και σημείο K της AM τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{KM} = 2\overrightarrow{AK}$.

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AK}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

ii) Έστω επίσης σημείο Λ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} = 5\overrightarrow{A\Lambda}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, K, Λ είναι συνευθειακά.

53. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω E το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Θεωρούμε επίσης σημεία Δ και Z τέτοια ώστε $\overrightarrow{\Delta B} = 2\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{B\Gamma}$

i) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

iii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

54. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B, Γ αντίστοιχα ως προς ένα σημείο O .

Θεωρούμε επίσης τα σημεία K, Λ, M για τα οποία ισχύουν $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BK}$, $2\overrightarrow{A\Gamma} = 5\overrightarrow{\Lambda B}$ και $3\overrightarrow{AM} = 8\overrightarrow{A\Gamma}$.

i) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{O\Lambda}$ και $\overrightarrow{OM}$ σαν συνάρτηση των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, M είναι συνευθειακά

55. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία M και N τέτοια, ώστε $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ και $4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M, N, Δ είναι συνευθειακά.

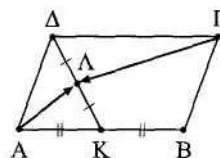
56. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E και Z τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ

57. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διαμέσους ΑΜ, ΒΝ και ΓΚ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{BG} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{GA} = \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

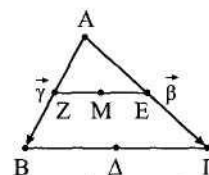
i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

ii) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{\Gamma K}$



58. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Κ το μέσο του ΑΒ και Λ το μέσο του ΔΚ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΛ}$ και $\overrightarrow{ΓΛ}$ συναρτήσει των $\vec{α} = \overrightarrow{ΑΒ}$ και $\vec{β} = \overrightarrow{ΑΔ}$.

59. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έστω Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω επίσης $\vec{\gamma} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{AG}$ και Μ το μέσο του ΕΖ.



i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

ii) Τι συμπεραίνετε για τα σημεία Α, Μ και Δ;

60. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έστω Δ και E τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

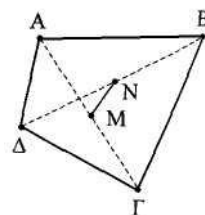
$$\text{i) } \overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B\Gamma},$$

ii) το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της.

61. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

62. Αν AB είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και O ένα σημείο, να βρείτε, συναρτήσει των διανυσματικών ακτινών των A και B, τη διανυσματική ακτίνα του μέσου M του AB, καθώς και τη διανυσματική ακτίνα του μέσου N του MB.

63. Έστω Α, Β, Γ και Δ σημεία ενός επιπέδου και Μ, Ν τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα .Να αποδείξετε ότι :



$$\text{i) } \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}}{2}$$

$$\text{ii) } \overrightarrow{\text{BM}} + \overrightarrow{\text{GN}} = \frac{\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{GA}}}{2}$$

64. Έστω A, B, Γ και Δ σημεία ενός επιπέδου και M, N τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα,
 i) Να γράψετε με τη μορφή ενός διανύσματος τα αθροίσματα $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ και $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ΓΔ} + \overrightarrow{ΔN}$ και να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΓΔ}}{2}$
 ii) Να βρείτε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα ΑΒ και ΓΔ, ώστε: α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ β) $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$

65. Έστω A, B, Γ, Δ σημεία ενός επιπέδου και M, N τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

- i) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{MN}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{BD}$
 ii) Αν Ρ το σημείο για το οποίο ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{MN}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BD}$
 iii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΡΔ είναι παραλληλόγραμμο.

66. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Κ το κέντρο του και Μ το μέσο του ΚΓ.

- i) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AG}$
 ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BG}$

67. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ έστω Κ και Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

- i) $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{KL}$
 ii) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{KL}$ και
 iii) $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$

68. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ, να αποδείξετε ότι $AM \leq \frac{AB + AG}{2}$.

69. Έστω ΑΔ η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΔΓ, ΑΒ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής των ΖΕ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ZΘ} = \overrightarrow{ΘΕ}$ και $\overrightarrow{ΘΔ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{ΑΔ}$.

70. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- i) το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{ΔΜ} + \overrightarrow{ΔΝ}$ είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{ΔΒ}$

71. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ το μέσο της ΓΔ.

- i) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$
 ii) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 3\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{ΓΔ} + 3\overrightarrow{BD}$ είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{AM}$

72. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε το μέσο του ΑΒ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΔΕ και ΑΓ, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

73. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ και K το μέσο του $M\Gamma$.
 i) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AK}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$
 ii) Για οποιοδήποτε σημείο N να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = 3\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NG} - 8\overrightarrow{NA}$ και $\vec{u} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλα.
74. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ και N το μέσο του AM .
 i) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BN}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$
 ii) Για οποιοδήποτε σημείο N να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = 2\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KG}$ είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{BN}$.
75. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ, E της πλευράς $B\Gamma$, με $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{AE} = \vec{y}$
 α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ συναρτήσει των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$
 β) Να αποδείξετε ότι :
 i) το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ είναι ομόρροπο του $\overrightarrow{AM}$, όπου M το μέσο της $B\Gamma$
 ii) το διάνυσμα $\vec{x} - \vec{y}$ είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{B\Gamma}$.
76. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία K, Λ της πλευράς $B\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια : $\overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{AK}$ και $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{LG}$. Έστω επίσης M το μέσο του $K\Lambda$.
 i) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$
 ii) Αν για το σημείο Δ ισχύει ότι : $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AD}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, M, Δ είναι συνευθειακά
77. Έστω Δ, E τα μέσα των πλευρών AG και AB αντίστοιχα, τριγώνου $AB\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία Z, H τέτοια, ώστε $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{BD}$ και $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{GE}$. Να αποδείξετε ότι το A είναι μέσο του ZH .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

78. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :
 i) $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}}{2}$
 ii) το MN είναι παράλληλο στις βάσεις του τραpezίου
79. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα M και N των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Λ , ώστε $\overrightarrow{N\Lambda} = \overrightarrow{MN}$. Επίσης $\overrightarrow{AM} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$
 i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 ii) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $AM\Gamma\Lambda$;
80. Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται, να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

81. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E και Z της διαγωνίου $A\Gamma$ τέτοια ,ώστε

$$AE = Z\Gamma = \frac{1}{4} A\Gamma .$$

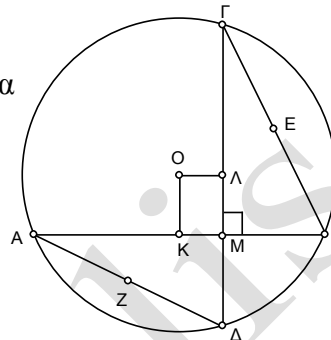
i) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$,να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ii) Να αποδείξετε ότι το $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

82. Στον κύκλο κέντρου O του διπλανού σχήματος οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι κάθετες και έστω K και Λ τα μέσα τους αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{OM}$

ii) Αν E και Z τα μέσα των χορδών $B\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα ,να αποδείξετε ότι το $OEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο.



ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

83. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$,η διάμεσος του AM και έστω G το κέντρο βάρους του .Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{GM}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

84. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία A', B', Γ' των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{BA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{A\Gamma'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους.

85. Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} = \vec{0}$.Να αποδείξετε ότι τα κέντρα βάρους των δύο τριγώνων συμπίπτουν

86. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω G το κέντρο βάρους του τριγώνου $AB\Gamma$.Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M ,το διάνυσμα $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{M\Gamma} - 3\overrightarrow{M\Delta}$ είναι ομόρροπο με το $\overrightarrow{\Delta G}$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

87. Αν τα σημεία A και B είναι διαφορετικά ,να βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει ,

$$x \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{A\Delta} = x \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + 2\overrightarrow{\Delta B}$$

88. Δίνονται σημεία A, B, Γ, Δ , με $B \neq \Gamma$, για τα οποία ισχύει $3\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

i) Να αποδείξετε ότι : $\overrightarrow{A\Delta} \updownarrow \overrightarrow{B\Gamma}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $x \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} - x \cdot \overrightarrow{AB} = (x+2) \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

89. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο γνωστά διανύσματα. Θεωρούμε επίσης διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο

$$\text{ισχύει: } \frac{1}{2}(2\vec{x} + \vec{\beta}) = \frac{1}{4}(3\vec{x} + \vec{\alpha})$$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι: $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, $\vec{OB} = 4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{OG} = -\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}$ να

αποδείξετε ότι:

i) $\vec{AB} \uparrow \uparrow \vec{x}$

ii) $\vec{AG} \uparrow \downarrow \vec{x}$

90. Θεωρούμε γνωστό διάνυσμα $\vec{a} \neq \vec{0}$. Να λύσετε την εξίσωση $|\vec{x} + \vec{a}| \cdot \vec{x} = |\vec{x} + 4\vec{a}| \cdot \vec{a}$

91. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$, αν είναι γνωστό ότι $\frac{1}{5}(\vec{x} - 3\vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{x} - 6\vec{\beta})$

92. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2\vec{x} + 3\vec{y} = 7\vec{a} + \vec{\beta} \\ \vec{x} - 2\vec{y} = -3\vec{\beta} \end{cases}$$

93. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|(\lambda - 3)\vec{a}| < 5|\vec{a}|$, όπου $\vec{a} \neq \vec{0}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

94. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο P τέτοιο, ώστε $\vec{BP} = 3\vec{PG}$.

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{AP}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$

ii) Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $8\vec{AP} - 6\vec{AB} = \kappa \cdot \vec{BG} + \lambda \cdot \vec{AG}$

95. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και έστω M το μέσο του BΓ. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\kappa \cdot \vec{BG} + \lambda \cdot \vec{AM} = 3\vec{AG} - 7\vec{AB}$

96. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = \lambda\vec{a} + (\lambda + 1)\vec{\beta}$ και $\vec{u} = (\lambda + 2)\vec{a} + (\lambda + 5)\vec{\beta}$, όπου $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ είναι παράλληλα.

97. Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία O, A, B και τα διανύσματα $\vec{v} = \vec{OA} - \lambda \cdot \vec{OB}$ και $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{OA} + \vec{OB}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ δεν είναι συγγραμμικά.

98. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ, το μέσο Δ της πλευράς AB και σημείο Z της πλευράς AG τέτοιο, ώστε $\vec{AZ} = \frac{3}{5}\vec{AG}$. Έστω ότι η ευθεία DZ τέμνει την πλευρά BΓ στο E. Να βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$, για τον οποίο είναι $\vec{BE} = \lambda \cdot \vec{BG}$

99. Δίνεται τρίγωνο OAB και έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ τέτοια ώστε : $\overrightarrow{O\Gamma} = 6\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{O\Delta} = 4\vec{\beta}$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$, να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

100. Στο διπλανό σχήμα είναι $OD = \frac{1}{3}OA$ και E το μέσο της OB .

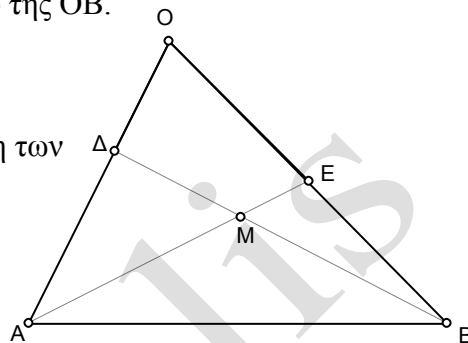
Έστω ότι ισχύουν οι σχέσεις : $\overrightarrow{OD} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OE} = \vec{\beta}$

α) Να εκφράσετε τα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{DE}$ σαν συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) Αν $\overrightarrow{DM} = \lambda \overrightarrow{DB}$ και $\overrightarrow{EM} = \mu \overrightarrow{EA}$, να βρείτε ;

i) τους αριθμούς λ και μ

ii) τον λόγο $\frac{|\overrightarrow{EM}|}{|\overrightarrow{EA}|}$

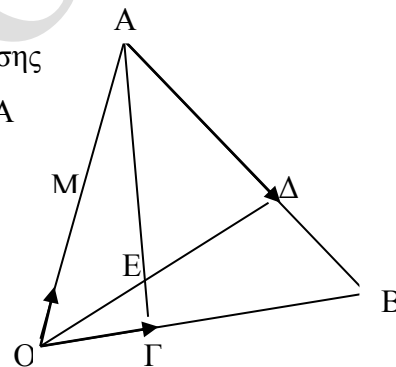


101. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσης, ως προς O , τα $6\vec{\alpha}$ και $6\vec{\beta}$ αντίστοιχα, το M είναι μέσο του OA , ισχύει $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ και E είναι το μέσο της OD .

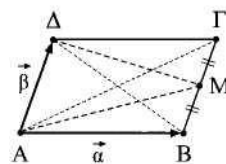
i) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{AD}$ σαν συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ii) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MABE$ είναι τραπέζιο

iii) Αν η AE τέμνει την OB στο Γ και είναι : $\overrightarrow{O\Gamma} = \kappa\vec{\beta}$, να υπολογίσετε το κ

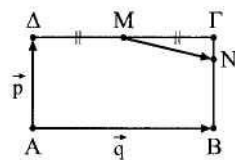


102. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος, να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{\Delta M}$, $\overrightarrow{MA}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.



103. Στο διπλανό ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ το M είναι το μέσο της $\Delta\Gamma$

και επίσης $\frac{N\Gamma}{NB} = \frac{1}{3}$. Να γράψετε το $\overrightarrow{MN}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{p}$ και $\vec{q}$.



104. Έστω AB ευθύγραμμο τμήμα και Γ ένα σημείο του τέτοιο, ώστε $A\Gamma = \frac{3}{4}AB$. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το διάνυσμα θέσης του Γ ως προς το O .

105. Αν $4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = 3\vec{\gamma}$, να γράψετε το $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

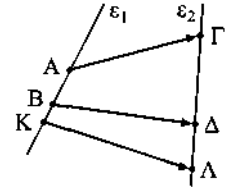
106. Αν ισχύει $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{B\Gamma}$, να βρεθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει του $\overrightarrow{B\Gamma}$.

107. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και Δ ένα σημείο της ευθείας AB τέτοιο, ώστε $\Delta A = \frac{8}{3} B\Delta$.

Να βρείτε συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB}$, τα διανύσματα:

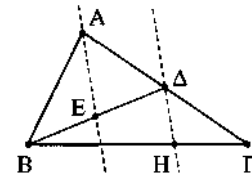
- i) $\overrightarrow{A\Delta}$ ii) $\overrightarrow{O\Delta}$

108. Σε ευθεία ε_1 θεωρούμε τα σημεία A, B, K και σε ευθεία ε_2 τα σημεία Γ, Δ, Λ έτσι, ώστε να είναι $\overrightarrow{AK} = \mu \overrightarrow{BK}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = \mu \overrightarrow{\Delta\Lambda}$, με $\mu \neq 1$. Να γράψετε το διάνυσμα KΛ ως γραμμικό συνδυασμό των AΓ και BΔ.



109. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ και ευθεία ε που διέρχεται από το Γ και τέμνει τις ευθείες AΔ και AB στα σημεία K και Λ αντίστοιχα. Αν είναι $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = x \overrightarrow{A\Lambda}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = y \overrightarrow{AK}$, να αποδείξετε ότι $x + y = 1$.

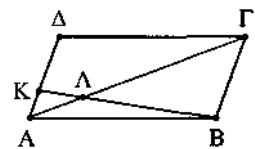
110. Έστω E το μέσο της διαμέσου BΔ τριγώνου ABΓ και H το σημείο για το οποίο $\overrightarrow{BH} = 2 \overrightarrow{HG}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{\Delta H}$



111. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και έστω M το μέσο της διαμέσου BΔ και N το σημείο που ορίζεται από την ισότητα $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{N\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, M, N είναι συνευθειακά.

112. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και τα σημεία K και Λ για τα οποία $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Lambda} = \frac{1}{4} \overrightarrow{A\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, B είναι συνευθειακά.

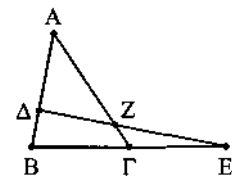


113. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, E, Z για τα οποία

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AZ} = \frac{5}{6} \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$$

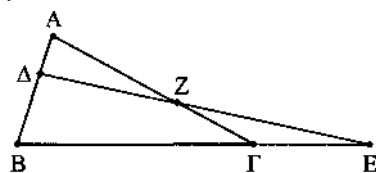
i) Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}, \overrightarrow{\Delta Z}$ ως γραμμικό συνδυασμό των δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Z, E είναι συνευθειακά.



114. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ για τα οποία ισχύουν,

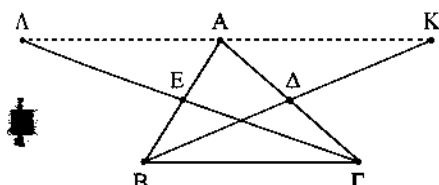
$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A\Gamma}$$



i) Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

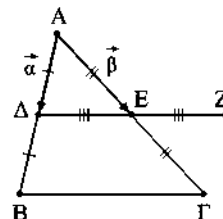
ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

115. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και προεκτείνουμε τις διάμεσους ΒΔ και ΓΕ κατά τμήματα ΔΚ = ΒΔ και ΕΛ = ΓΕ.



Να αποδείξετε ότι το Α είναι το μέσο του ΚΑ.

116. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έστω Δ και Ε τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα:

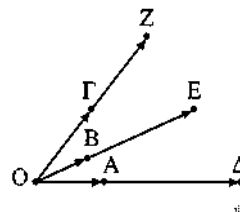


i) $\overrightarrow{\Delta E}$ ii) $\overrightarrow{\Delta Z}$ iii) $\overrightarrow{Z\Gamma}$

Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το τετράπλευρο ΑΔΓΖ;

117. Στο επόμενο σχήμα ισχύει

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{\alpha}, \overrightarrow{OG} = 3\vec{\gamma} \text{ και } \overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\gamma}. \text{ Επίσης είναι } OG = GZ$$



ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

118. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

i) $\overrightarrow{AM} = (\lambda + 1)\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{A\Gamma}, \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \perp \overrightarrow{MG}$

$$\text{iii) } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG}) / \overrightarrow{BG}$$

$$\text{iv) } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}, \lambda \in R$$

119. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ και Δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MD}|$.

120. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{AG}|$.

121. Έστω τετράπλευρο ABΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} = \lambda(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}), \lambda \in R$.

122. Έστω τα σημεία A, B, Γ και Δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD}|$

123. Δίνεται τρίγωνο ABΓ.. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{3MG} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}| = |\overrightarrow{3AG} - \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BG}|$

124. Δίνεται τρίγωνο ABΓ.. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{5MA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{MB}|$

125. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και έστω M το μέσο της BΓ.. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{AA}|$

126. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και η διάμεσος του AΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{3MA} + 6\overrightarrow{AA} - 3\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AA}|$

127. Έστω $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}, \lambda \in R$

128. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BM} = (x^2 + 1)\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BA}, x \in R$

129. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AG} - \lambda \cdot \overrightarrow{BM} = (\lambda + 1)\overrightarrow{MG}, \lambda \in R$

130. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο P για το οποίο ισχύει $4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PG} = \vec{0}$

- ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει ότι :
 $4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}$

131. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AG}$
132. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha + \beta = 1$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AG}$.
133. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AG}, \lambda \in \mathbb{R}$.
134. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο K της ευθείας $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AG}$.
135. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο O υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\overrightarrow{O\Delta} = \lambda \overrightarrow{OA} - \lambda \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

136. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, M το μέσο της $B\Gamma$ και σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{MG}$. Αν N είναι το μέσο του $A\Delta$, τότε :

i) να γράψετε το $\overrightarrow{MN}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$

ii) να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O , το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ είναι ομόρροπο στο $\overrightarrow{MN}$

137. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της $B\Gamma$ τέτοιο, ώστε $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{2}{3}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$

β) Έστω επίσης σημείο E για το οποίο ισχύει : $(\lambda + 1) \cdot \overrightarrow{BE} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AG}, \lambda \neq -1$

i) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα σημεία A, Δ, E είναι συνευθειακά.

138. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο γνωστά μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ για τα οποία ισχύουν :

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta} \\ \vec{x} - \vec{y} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \end{cases}$$

α) Να εκφράσετε καθένα από τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{y}$ είναι ομόρροπο $\vec{\alpha}$

ii) το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{y} - \vec{x}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\beta}$

γ) Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει : $\lambda \vec{x} - \mu \vec{y} = (\mu - 2)\vec{\alpha} + (\lambda + 6)\vec{\beta}$

139. Θεωρούμε δύο σημεία A, B και έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ οι διανυσματικές τους ακτίνες ως προς ένα σημείο O . Έστω επίσης M το μέσο του OA , σημείο K του τμήματος OB , με $KO=3KB$, και σημείο Λ του τμήματος AK με $\Lambda A=4\Lambda K$

i) Να γράψετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τις διανυσματικές ακτίνες (ως προς O) των σημείων M, K, Λ

ii) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Λ, M είναι συνευθειακά

iii) Να βρείτε τους λόγους : $\frac{|\vec{B\Lambda}|}{|\vec{\Lambda M}|}$ και $\frac{|\vec{BM}|}{|\vec{B\Lambda}|}$

140. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει : $\lambda \cdot \vec{\Delta A} - \vec{\Delta B} + \lambda \cdot \vec{\Delta \Gamma} = \vec{0}$

β) Σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχούμε τα διανύσματα :

$$\vec{v} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{M\Gamma} \text{ και } \vec{u} = 2\vec{M\Delta} - \vec{MA} - \vec{M\Gamma}$$

i) Να βρείτε το πέρας του $\vec{v}$

ii) Να αποδείξετε ότι το $\vec{u}$ είναι σταθερό

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$:

i) είναι συγγραμμικά

ii) έχουν ίσα μέτρα