

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

1. Δίνεται το σημείο $A(\lambda^2-9, \lambda^2-\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο A ανήκει :
i) στον άξονα $x'x$ ii) στον άξονα $y'y$
2. Δίνεται το σημείο $A(\lambda+3, \lambda)$ με $\lambda < 0$ το οποίο απέχει από τον άξονα $y'y$ απόσταση 3
α) Να βρείτε την τιμή του λ
β) Να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς τον :
i) τον άξονα $x'x$ ii) τον άξονα $y'y$
iii) την αρχή των αξόνων $\Pi(0,0)$ iv) τη διχοτόμο $1^{ου}-3^{ου}$ τεταρτημορίου
3. Δίνεται το σημείο $A(\lambda+5, 2\lambda-1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ το οποίο απέχει από τον άξονα $y'y$ απόσταση 2 και από τον άξονα $x'x$ απόσταση 7. Να βρείτε τον αριθμό λ .
4. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει:
i) $y=2$ ii) $x=-4$ iii) $|x|=3$ iv) $-2 \leq y \leq 1$ v) $|x| < 1$ vi) $y=3$ και $-1 < x < 2$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ – ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ - ΙΣΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

5. Αν $B(3, 5)$, να βρείτε το σημείο εφαρμογής του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$.
6. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (2, 8)$ έχει σημείο εφαρμογής το $A(5, 4)$, να βρείτε το πέρας του.
7. Να βρείτε τις συντεταγμένες :
Α) του διανύσματος $\overrightarrow{OA}$, όταν $A(-5,4)$, (Ο η αρχή των αξόνων)
Β) του σημείου B, όταν $\overrightarrow{OB} = (-3, 2)$, (Ο η αρχή των αξόνων)
Γ) των διανυσμάτων
i) $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ii) $\vec{\beta} = 5\vec{i}$ iii) $\vec{\gamma} = -\vec{j}$
8. Αν $\vec{a} = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$ και $\vec{\gamma} = (\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{a} + (2-\sqrt{2})\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ και να γράψετε το $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\gamma}$.
9. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ, μ το διάνυσμα $\vec{u} = (3\lambda + \mu, \lambda - \mu + 8)$ είναι μηδενικό.
10. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ, μ το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda + 2\mu, 3\lambda - 12)$ είναι ίσο με 0 .
ii) Ομοίως για το διάνυσμα $\vec{\beta} = x^2(\vec{i} + \vec{j}) - (3x\vec{i} + 3\vec{j})$

11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (x^2 + 5x)\vec{i} + (x^2 - 25)\vec{j}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

i) $\vec{a} \parallel x'\vec{x}$

ii) $\vec{a} \parallel y'\vec{y}$

iii) $\vec{a} \parallel x'\vec{x}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$

iv) $\vec{a} \parallel y'\vec{y}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 2\lambda - 4)$, $\vec{\beta} = (\mu, \mu + 6)$ και $\vec{\gamma} = (7, -1)$. Να βρείτε

Για ποιες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa - 1, \lambda - 2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda, 2\kappa - 1)$. Να βρείτε τα κ, λ ώστε

i) το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα

ii) τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι ίσα

iii) τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι αντίθετα

14. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 1, \lambda^2 - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του λ είναι :

i. $\vec{\alpha} = \vec{0}$

ii. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel \chi'\chi$

15. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 + 3\lambda, \lambda^2 - 9)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 5, 3\lambda - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του λ είναι :

i. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

ii. $\vec{\alpha} = \vec{0}$

iii. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel \chi'\chi$

iv. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel y'\vec{y}$

16. Αν $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$ και $2\vec{AM} - 3\vec{BM} = \vec{0}$, να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του M .

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, 6)$, $\vec{\beta} = (-3, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-1, 15)$. Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

18. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x - 1, x - 2y)$, $\vec{\beta} = (2x - 3y - 2, y)$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν είναι $\vec{\alpha} \parallel \chi'\chi$ και $\vec{\beta} \parallel y'\vec{y}$, τότε :

i) Να βρείτε τους αριθμούς x και y

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma} = (2, -1)$ και $\vec{\delta} = (3, -5)$

19. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, x + 4y)$, $\vec{\beta} = (1 - y, y - x)$ και $\vec{\gamma} = (y, x + y)$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα, τότε :

i) Να βρείτε τους αριθμούς x και y

ii) Να γράψετε το $\vec{\delta} = (12, -13)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$

20. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, x + 4y)$, $\vec{\beta} = (1 - y, y - x)$ και $\vec{\gamma} = (y, x + y)$, με $x, y \in \mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα, τότε :

i) Να βρείτε τους αριθμούς x και y

ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma} = (2, -1)$ και $\vec{\delta} = (3, -5)$

21. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{\beta} = (y-2)\vec{i} + (x+6)\vec{j}$ με $x, y \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, -6)$.
- Να βρείτε τους αριθμούς x και y
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
22. Δίνονται τα διανύσματα. $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$
23. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το διάνυσμα $\vec{a} = (x^2 - 4)\vec{i} + (x^2 + 2x)\vec{j}$ είναι ίσο με $\vec{0}$.
24. Έστω $\vec{\alpha} = (-1, 2)$, $\vec{\beta} = -3\vec{j}$ και τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ για τα οποία ισχύει:
- $$\begin{cases} \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{\alpha} \\ \vec{v} + \vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \end{cases}$$
- Να βρείτε τα $\vec{v}$ και $\vec{u}$
 - Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-2, 11)$ σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των $\vec{v}$ και $\vec{u}$
25. i. Αν $A(1, -3)$ και $B(-2, 1)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{OA} - 3\vec{OB}$, (Ο η αρχή των αξόνων)
 ii. Αν τα διανύσματα θέσης των σημείων A, B ως προς O είναι τα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 0)$ αντίστοιχα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = -3\vec{OA} + 2\vec{OB}$, (Ο η αρχή των αξόνων)
26. Έστω το σημείο $A(-1, 2)$. Να βρείτε:
- το διάνυσμα $\vec{AB}$, όταν $B(-3, 0)$
 - το σημείο Γ , όταν $\vec{A\Gamma} = (-3, -5)$
 - το σημείο Δ , όταν $2\vec{A\Delta} - 3\vec{AE} = \vec{0}$ και $E(3, -1)$
27. Αν $\vec{AB} = (3, -2)$ και $\vec{A\Gamma} = (-1, 2)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του $\vec{B\Gamma}$.
28. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, 1), B(-2, 0), \Gamma(-4, 4)$ και το σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $\Delta A = 2\Delta\Gamma$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{B\Delta}$ σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{BA}$
29. Αν $\vec{\alpha} = (-2, 3)$ και $\vec{\beta} = (4, 1)$, να βρείτε, διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο $2\vec{\alpha} - \vec{u} = \vec{\beta}$.
30. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (6, 5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (2, -3)$.
31. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\vec{\beta} = \vec{i} - \vec{j}$.
32. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (4\lambda^2 + \lambda - 2, 5\lambda^2 - \lambda + 1)$ και $\vec{\beta} = (\lambda^2 - \lambda - 1, 3\lambda^2 - 2\lambda + 2)$. Να βρείτε το λ ώστε: $\vec{a} = \vec{\beta}$. Υπάρχει τιμή του λ ώστε: $\vec{a} = -\vec{\beta}$;

33. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2\lambda + 1, -2)$, $\vec{\beta} = (1, 2)$, $\vec{\gamma} = (\lambda, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα λ και μ ώστε $\vec{a} + 2\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΓΝΩΣΤΑ ΑΚΡΑ

34. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(4, -2)$, $B(-3, 8)$ και $\Gamma(-5, -6)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma A}$.
35. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(-3, 5)$, $B(2, 7)$ και $\vec{A\Gamma} = (7, -6)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες
i) του σημείου Γ
ii) των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma A}$.
36. Δίνεται το σημείο $A(5, -3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ για τα οποία ισχύει $\vec{AB} = (-3, 9)$ και $\vec{\Gamma B} = (3, 2)$.
37. Δίνονται τα σημεία $A(-5, -1)$ και $B(4, 5)$. Να βρείτε σημείο Γ του ευθυγράμμου τμήματος AB τέτοιο ώστε $\Gamma B = 2\Gamma A$.
38. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 3\mu + 2)$ και $B(\mu, \lambda - 6)$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{AB} = (4, -14)$. Να βρείτε
i) τις τιμές των λ και μ
ii) τις συντεταγμένες του σημείου M για το οποίο ισχύει: $\vec{AM} = 3\vec{BM}$.
39. Δίνονται τα σημεία $A(x, y)$, $B(x + 2y, x + 1)$ και $\Gamma(y - 3, 2x - 4)$ με $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = (-12, 10)$.
i) Να βρείτε τις τιμές των x και y
ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v} = (-4, 14)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Gamma}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΕΣΟΥ

40. Δίνονται τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(4, -9)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .
41. Το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-1, 4)$ έχει μέσο το σημείο $M(-4, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .
42. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 2\kappa - 4)$, $B(-2\lambda - \kappa, 3\lambda - \kappa)$ και $M(\kappa, \lambda - 1)$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ , ώστε το M να είναι μέσο του AB .
43. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$, $\Gamma(-9, 12)$ και $\Delta(1, -8)$. Αν M και N είναι τα μέσα είναι αντιστοίχως τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{MN}$.
44. Αν τα σημεία $\Delta(-1, 4)$, $E(5, 4)$, $Z(2, -1)$ είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA και AB τριγώνου $AB\Gamma$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

45. Δίνονται τα σημεία A (3, -4) και B (2, 1). Να βρεθεί:
 i) το συμμετρικό του A ως προς κέντρο συμμετρίας το B.
 ii) το συμμετρικό του B ως προς κέντρο συμμετρίας το A.
46. Δίνονται τα σημεία A(5,-1 και B(-3,2).Να βρείτε :
 i.το μέσο του τμήματος AB
 ii.το σημείο Γ ,ώστε το B ν α είναι μέσον του τμήματος ΑΓ.
47. Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο Β του Α(-3,2) ενός κύκλου με κέντρο Κ(5,-4).
48. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ,με Α(-1,3),Β(6,4) και Γ(5,-1).Να βρείτε τις συντεταγμένες :
 i)του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ
 ii)της κορυφής Δ
49. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ,με Α(1,5)και Β(7,3).Επίσης για το σημείο τομής Μ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ισχύει ότι : $\overrightarrow{AM} = (1, -4)$ Να βρείτε τις συντεταγμένες :
 i)του σημείου Μ
 ii)των κορυφών Γ και Δ
50. Αν το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ μεΑ(1,2) και Β(-1,0) είναι το Κ(0,3),να βρείτε τα Γ,Δ
51. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ ,με Α(1,5) και Δ(3,9).Έστω επίσης Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ αντίστοιχα. Αν είναι Κ(-1,6) και $\overrightarrow{NL} = (-6, -4)$,να βρείτε τις συντεταγμένες :
 i)των Ν και Λ
 ii)των Β και Γ
 iv)του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$
52. Δίνονται τα σημεία Α (λ,μ), Β (λ+μ,2λ-μ),Γ (2μ,2μ+7) και Δ(μ,λ+4).Αν Μ και Ν είναι τα μέσα είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ,να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{MN}$.
53. Δίνονται τα σημεία Α (-3, 4), Β (5, -4),Γ (-9,12) και Δ(1,-8).Για τα μέσα Μ και Ν των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα ισχύει ότι $\overrightarrow{MN} = (-5, 2)$.
 i)Να βρείτε τις τιμές των λ και μ
 ii)Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα ,να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{KL}$
54. Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.
 i) Αν Α(2,4) και Β(1, - 6), να βρείτε το Μ .
 ii) Αν Μ(3, 1) και Β(- 1, 2), να βρείτε το Α.
55. Το σημείο Α(4,2) ανήκει σε κύκλο κέντρου Κ(3, 5). Να βρεθεί το αντιδιαμετρικό σημείο Α.
56. Δίνονται τα σημεία Α (-2, -2), Β (3, 0), Γ (-1, 3). Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.

- ## ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- ### ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ-ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

- ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΤΣΙΜΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

69. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων:

i) $-\sqrt{8}\vec{i} + \vec{j}$ ii) $2(\eta\mu\theta)\vec{i} - 2(\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{j}$

iii) $(x - y)\vec{i} + 2\sqrt{xy}\vec{j}$ iv) $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$

70. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A και B σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i) A(-2,7) και B(4,-1)

ii) A(3,-5) και B(3,2)

ii) A(-4,-2) και B(2,-2)

71. Δίνονται τα σημεία A(λ,1) και B(-1,λ+3), με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι 5

72. Δίνεται το σημείο A(3,-1). Να βρείτε σημείο B του άξονα y'y, που απέχει από το A απόσταση 5.

73. Δίνονται τα σημεία A(3,8) και B(9,4)..Να βρείτε σημείο Γ του άξονα x'x το οποίο ισαπέχει από τα A και B.

74. Αν $\vec{v} = (1, 2)$, να βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ που να έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{v}$ και να είναι ομόρροπο του $\vec{v}$.

75. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha} = (1, 4)$ με μέτρο $\sqrt{17}$.

76. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 7 - \lambda)$ και $\vec{\beta} = (1 - \lambda, \lambda - 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $|\vec{\alpha}| = 13$ και $|\vec{\beta}| = 10$.

77. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (4\eta\mu\theta + 3\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta)$ με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το $|\vec{\alpha}|$ είναι ανεξάρτητο από την τιμή του θ.

78. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, -1)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\beta}$, αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, με $|\vec{\beta}| = 4\sqrt{5}$.

79. i. Να βρείτε το $|\vec{v}|$, όταν $|\vec{v}|^2 - 4|\vec{v}| = 5$

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$, για το οποίο ισχύει $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, 8)$

80. Αν $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 0)$ και $\vec{\alpha} = \vec{u} + |\vec{\alpha}|\vec{v}$, να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$

81. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(2,1), B(3,-2) και Γ(7,-4)

i. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = -4\vec{A\Gamma} + 7\vec{B\Gamma}$

ii. Αν M είναι το μέσο της πλευράς BΓ, να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

82. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(1,-2), B(-3,4) και Γ(0,2)

i. την απόσταση των σημείων A και B

ii. το μήκος της διαμέσου AM

83. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(-1,0), Β(3,-2) και Γ(2,0). Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.
84. Δίνονται τα σημεία Α(-1,2) και Β(3,1). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα:
 i. χ'χ που ισαπέχει από τα Α και Β
 ii. ψ'ψ, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.
85. Δίνονται τα σημεία Α(-1,2) και Β(1,-2) και Γ(2,3). Να βρείτε σημείο Μ στον άξονα ψ'ψ, ώστε η παράσταση $d = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG}|^2$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή.
86. Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι μοναδιαίο.
87. Να βρεθεί το εμβαδόν τετραγώνου ΑΒΓΔ στο οποίο είναι Α(-2,1) και Γ(0, 5).
88. Αν $\vec{u} = (-5, 8)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο είναι ομόρροπο προς το $\vec{u}$ και έχει διπλάσιο μέτρο από αυτό.
89. Αν $\vec{u} = (-72, 84)$, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ που έχει μέτρο το μισό του μέτρου του $\vec{u}$ και είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$.
90. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{a} = (-3,4)$.
91. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{a} = (2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta, \eta\mu 2\theta)$ με $0 < \theta < \pi$.
92. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (3,-2)$. Να υπολογιστούν τα: $|-2\vec{a}|$ και $|3\vec{a} - 2\vec{\beta}|$.
93. Αν $\vec{a} = (\lambda, \lambda+1)$, να υπολογιστούν οι τιμές του λ ώστε: $|-3\vec{a}| = 15$.
94. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\kappa^2 + 2\kappa + 5, 3\lambda - \mu^2)$ και $\vec{\beta} = (4\lambda - \lambda^2, 15 + 6\kappa\mu)$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα, να βρείτε:
 i) τους αριθμούς κ, λ, μ .
 ii) το $|\vec{\alpha}|$
 iii) διάνυσμα $\vec{\gamma}$, που είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και έχει τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{\alpha}$
95. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο $\vec{a} = (-4, |\vec{a}| - 2)$
96. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο $\vec{\alpha} = \left(-3, \frac{|\vec{\alpha}| + 3}{2}\right)$
97. Να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} = (-3, |\vec{\beta}|)$ και $\vec{\beta} = (1 - |\vec{\alpha}|, \sqrt{2})$.
98. Δίνεται διάνυσμα, μη παράλληλο στον χ'χ, για το οποίο ισχύει η σχέση:
 $\vec{\alpha} = (4, -2) - |\vec{\alpha}| \cdot (1, -1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$
99. Δίνονται τα σημεία Α (-1, 2), και Β (-3, 0). Να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου Οxy τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

100. Δίνονται σημεία A (-2, -5) και B (3, -4). Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά AB.
101. Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (3, -2), B (-2, 3) και Γ (0, 4), είναι ορθογώνιο και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του.
102. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία A (1, 1) και B (4, 2). Να βρείτε ένα σημείο M του άξονα xx' τέτοιο ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ορθογώνιο στο M.
103. Δίνονται τα σημεία A (3,3), B (2,1) και Γ (-5,3). Να βρείτε σημείο P του επιπέδου, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τα A, B, Γ, να είναι ελάχιστο.
104. Να βρείτε σημείο M (x, y) του επιπέδου τέτοιο ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τα σημεία A (1, 5), B (5, -2) και Γ (-3, -3) να είναι ελάχιστο.
105. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με B(3,5), Γ(5,-1) και Δ(-1,-1). Να βρείτε :
 i) τις συντεταγμένες της κορυφής A
 ii) το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AG}$
 iii) το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{7}{2}\overrightarrow{AD}$
106. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με διαγώνιες $\overrightarrow{AG} = (-9, 12)$ και $\overrightarrow{BD} = (-3, 2)$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AD}$.
107. Δίνονται τα σημεία A (2,5), B (6,3) και Δ (0,2). Να βρείτε σημείο Γ, ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις AB και ΓΔ.
108. Δίνονται τα σημεία A (x, -2), B (16, x+2) και Γ (5, x). Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $|\overrightarrow{2AB} + 3\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{AG}|$.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ-ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

109. Δίνονται τα σημεία A (2, -3), B (-1, 4) και Γ (5, -10). Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά.
110. Δίνονται τα σημεία A (3, 2), B (1, -4) και Γ (-2, -13). Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά.
111. Να δείξετε ότι τα σημεία A(5,4), B(3,-2) και Γ(0,-11) είναι συνευθειακά.
112. i) Να εξετάσετε αν τα σημεία A(0,1), B($\sqrt{3}$, 4) και Γ(1, $1 + \sqrt{3}$) είναι συνευθειακά.
 ii) Ομοίως για τα σημεία A(2, 5), B(1,2) και Γ(5,12).
113. Δίνονται τα σημεία A (1, -4) και B (4, 2). Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$, ώστε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

114. Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία τα σημεία $A(0, 3 - \sqrt{2})$, $B(x, 3)$ και $\Gamma(-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ είναι συνευθειακά.
115. Τα σημεία A, B και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς O τα $\vec{\alpha} = (-1, 9)$, $\vec{\beta} = (5, -3)$ και $\vec{\gamma} = (1, 5)$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά..
116. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -4)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 5, 6)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.
117. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 4)$.
 i) Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα
 ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (6, -4)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
118. Να βρεθεί η τιμή του $x \in \mathbb{R}$ για την οποία τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, x)$ και $\vec{\beta} = (6, 4)$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα).
119. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 4\lambda\vec{i} - 9\vec{j}$ και $\vec{\beta} = -4\vec{i} + \lambda\vec{j}$ είναι :
 α.) παράλληλα β.) ομόρροπα
120. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (8, x)$ και $\vec{\beta} = (x, 2)$ είναι:
 i) συγγραμμικά ii) ομόρροπα iii) αντίρροπα
121. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω διανύσματα είναι συγγραμμικά.
 i. $\vec{\alpha} = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{\beta} = (-6, 1)$ ii. $\vec{\alpha} = (-3, 1)$, $\vec{\beta} = (2, -3)$
122. i. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 2\lambda - 1)$ να είναι συγγραμμικά
 ii. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, -3)$ και $\vec{\beta} = (2, x)$ είναι μη συγγραμμικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$
123. Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \kappa - 1)$ και $\vec{\beta} = (\kappa - 1, 9)$ να είναι αντίρροπα
124. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, -1)$, $\vec{\beta} = (\lambda, 3\lambda - 2)$ και $\vec{\gamma} = (3, 6)$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$.
 i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
 ii) Αν $P(-2, 7)$ και $\Sigma(6, -4)$ να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{P\Sigma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
125. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-10, 2)$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε :
 i) το $|\vec{\gamma}|$

ii) τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda, 1 - \lambda)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$

126. Δίνονται τα σημεία : $A(\kappa - 3, -2), B(7 - \kappa, \kappa)$ και $\Gamma(\kappa - 6, -11)$, με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του κ :

i) το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$

ii) τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

127. Δίνονται τα σημεία : $A(3 - \lambda, \lambda), B(9, 4\lambda), \Gamma(3, -7)$ και $\Delta(1, -4)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το λ ώστε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

128. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε : $\left[(2\mu - 3\lambda)\vec{i} + (\lambda + 4)\vec{j} \right] / (2\vec{i} - 3\vec{j})$ και $\left[(\mu - 4)\vec{i} + (\lambda + \mu)\vec{j} \right] / (\vec{i} - \vec{j})$

129. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -8)$ και $\vec{\beta} = (-1, \lambda - 2)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

130. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -3)$ και $\vec{\beta} = (-4, \lambda + 4)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

131. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, -2)$ και $\Delta(2, 2)$. Αν το B ανήκει στον άξονα $x'x$ και το κέντρο K του $AB\Gamma\Delta$ ανήκει στον άξονα $y'y$, να βρείτε τις συντεταγμένες των B, K και Γ .

132. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(\kappa, \kappa + \lambda), B(-\lambda, \lambda - 3\kappa), \Gamma(2\lambda + \kappa, \lambda - \kappa)$ και $\Delta(5\lambda + 5\kappa, \kappa - 1)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
i) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ
ii) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

133. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(7, 4)$. Να βρείτε τα σημεία M, N για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{NB}$.

134. Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(12, 7)$. Να βρεθούν τα σημεία M και N του τμήματος AB τα οποία το τριχοτομούν (το χωρίζουν σε τρία ίσα μέρη).

135. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-1, 2), B(8, 5)$ και $M(2, 3)$ είναι συνευθειακά και να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$

136. Έστω δύο διαφορετικά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Να βρείτε συναρτήσεις των x_1, y_1, x_2, y_2 τις συντεταγμένες του σημείου M για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, όπου $\lambda \neq -1$.

137. Να αποδείξετε ότι:

$$i) \det(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \det(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + \det(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$$

$$\text{ii) } \det(\lambda \vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \lambda \det(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$$

$$\text{iii) } \det(\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \lambda \det(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + \mu \det(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$$

138. Δίνονται τα σημεία A(0,1) και B(-2,0) και Γ(1,3).

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου.

ii. Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο

139. Αν τα σημεία A,B,Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το Ο τα

$$\vec{\alpha} = (-1, 3), \vec{\beta} = (3, 5), \vec{\gamma} = (-3, 2) \text{ αντίστοιχα, τότε:}$$

i. να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$

ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά

iii. να βρείτε τη σχετική θέση των A,B,Γ

140. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(-1,2) ,B(7,0) και Γ(1,4) και Δ μέσον της διαμέσου AM. Αν για το σημείο E ισχύει $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EG}$, τότε :

i. να βρείτε τα σημεία Δ,E

ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία B,Δ,E είναι συνευθειακά

141. Δίνονται τα σημεία A (3,1), B (κ-1, 2κ-1) και Γ (κ, κ+1). Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ τα A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

142. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x-2y, -2)$ και $\vec{\beta} = (4y^2 + 2y - x + 1, x + 2y)$. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ-ΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΟΝ $\chi'\chi$

143. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων :

i. $\vec{\alpha} = (2, -6)$

ii. $\vec{\beta} = (8, -4)$

iii. $\vec{\gamma} = (-5, 0)$

iv) $\vec{\delta} = (0, 7)$

144. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης (αν ορίζεται) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. A(-1,3), B(2,-3)

ii. A(3,1), B(-5,1)

iii. A(-2,3), B(-2,7)

145. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης (αν ορίζεται) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. A(2,-4), B(-3,6)

ii. A(-7,3), B(8,8)

iii. A(-1,-4), B(2,-4)

iv) A(0,6), B(0,-3)

146. Αν φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $\chi'\chi$, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $\varphi = \frac{\pi}{6}$

ii. $\varphi = 120^\circ$

iii. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

iv. $\varphi = 0^\circ$

147. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $\chi'\chi$ σε κάθε περίπτωση ,αν:

i. A(3,0), B(0, $-\sqrt{3}$)

ii. A(1,5), B(-2,5)

iii. A(3,-2), B(3,2)

148. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων:

- i) $3\vec{i} - 12\vec{j}$ ii) $-2\vec{i}$
iii) $4\vec{j}$ iv) $3\vec{j} + 12\vec{i}$

149. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα $\chi'\chi$ τα διανύσματα :

- i) $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 3)$ ii) $\vec{\beta} = (-6, \sqrt{12})$ iii) $\vec{\gamma} = (-4, -4)$ iv) $\vec{\delta} = (\sqrt{27}, -9)$

150. Δίνονται τα σημεία A(7,1) και B(4,4). Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $\chi'\chi$

151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 2)$ και $\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$.

i. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με τον άξονα $\chi'\chi$

ii. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

152. Δίνονται τα σημεία A($\mu-3, 2$) και B($3\mu, \mu-3$). Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{7\pi}{4}$.

153. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda^2 - 6)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ , το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

154. Δίνονται τα σημεία A $\left(-2, -\frac{9\lambda}{2}\right)$ και B(λ, λ^2) με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του λ ε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\frac{5\pi}{4}$.

155. Δίνονται τα σημεία A($\alpha, \beta+2$) και B($\beta, -2$) με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Το σημείο A ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο, ενώ το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -2 και μέτρο $3\sqrt{5}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

156. Δίνονται τα σημεία A($\lambda, 1$) και B($7, 2-\lambda$) με $\lambda \in \mathbb{R} - \{7\}$ ώστε το $\overrightarrow{AB}$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\frac{1}{4}$.

i. Να βρείτε τον αριθμό λ

ii. Αν M είναι το μέσο του AB, να βρείτε σημείο Γ του άξονα $y'y$, ώστε $|\overrightarrow{MG}| = 5$

157. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\kappa, \mu+4)$ και $\vec{\beta} = (\mu, \kappa-9)$ με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^*$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης 2 και -3 αντίστοιχα. Να βρείτε :

i) τις τιμές των κ και μ

ii) τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

158. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda-1)x - \lambda + 1 = 0$. Να βρείτε το λ , ώστε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

159. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{v} = (x, y)$ το οποίο σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία ω , με :

$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$.Επίσης ισχύει $|\vec{v}|=10$ και το $\vec{v}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{w}=(x+9,y-12)$.Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

160. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-1,-2)$.

- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$
- Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$
- Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{w}=(0,4)$ σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
- Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο διπλάσιο του $|\vec{\alpha}|$.

161. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,\lambda+1)$ και $\vec{\beta}=(2\lambda,1-\lambda^2)$.Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε :

- τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα
- το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 300°
- τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά
- τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}=(-5,2)$ να είναι κάθετα.

162. Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(3,-4) και Γ, για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AG}$

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ
- Να δείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου
- Αν Μ μέσον της πλευράς ΒΓ, να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$
- Αν το σημείο Ν βρίσκεται στην πλευρά ΑΓ και ισχύει $\overrightarrow{NG}=3\overrightarrow{AN}$, να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Ν.

163. Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{a}_1=(3,-2)$, $\vec{a}_2=(2\alpha-\beta, \alpha+2\beta-4)$, $\vec{a}_3=(\alpha-3\beta+2, -3\alpha+3\beta-2)$,

- Αν τα διανύσματα $\vec{\delta}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$ και $\vec{v}=(-3,4)$, είναι συγγραμμικά , να εκφραστούν οι συντεταγμένες του $\vec{\delta}$ ως συνάρτηση του α ,
- Για ποια τιμή των α, β το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι το μηδενικό.

164. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α (1, 2) και Β (4, 1). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ τέτοιο ώστε:

- Το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:
 - ισοσκελές με κορυφή το σημείο Μ,
 - ορθογώνιο στο Μ,
 - ορθογώνιο στο Μ και ισοσκελές,
- το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του σημείου Μ από τα Α και Β να γίνεται ελάχιστο.

165. Να βρείτε:

- Όλα τα διανύσματα του επιπέδου τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{a}=(3,-4)$ και έχουν ίσο μέτρο με αυτό.

- ii) Όλα τα διανύσματα του επιπέδου τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (-2, 1)$ και έχουν μέτρο ίσο $\sqrt{5}$.
- iii) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (x, y)$ του επιπέδου το οποίο σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα $x'x$ και έχει μέτρο ίσο με $10\sqrt{3}$.

166. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(1,3), B(-5,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (2, -8)$. Να βρείτε :

- i) τις συντεταγμένες του σημείου Γ
 ii) τις συντεταγμένες των μέσων M και N των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα
 iii) το $|\overrightarrow{MN}|$

167. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $A(3,4), B(8,5)$ και $\Gamma(7,2)$.

- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ
 ii) Να βρείτε σημείο E του $y'y$, ώστε $\overrightarrow{AE} // \overrightarrow{B\Delta}$
 iii) Να βρείτε σημείο Z του $x'x$, ώστε $\overrightarrow{BZ} // \overrightarrow{A\Gamma}$
 iv) Αν είναι το μέσο του EZ , να αποδείξετε ότι τα σημεία A, Γ, M είναι συνευθειακά

168. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις : $3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = (-2, 9)$ και $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (10, -5)$

- i) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 ii) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (4, 7)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 iii) Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda, 6 - \lambda)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

169. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda - 5)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$

- a) Να βρείτε τον αριθμό λ
 β) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.
 i) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$
 ii) Να βρείτε τον $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\kappa, \kappa - 6)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\gamma}$

170. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις : $\vec{\alpha} = (3, -2 - |\vec{\beta}|)$ και $\vec{\beta} = (4 - |\vec{\alpha}|, \sqrt{3})$

- i) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 ii) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$
 iii) Αν $\vec{\gamma} = (\mu, 2 - \mu)$, να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\vec{\gamma} // \vec{\alpha}$

171. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{b} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j}$, $\vec{\gamma} = 4x\vec{i} + (x-1)\vec{j}$, $\vec{\delta} = y\vec{i} + (2-y)\vec{j}$. Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{a} // \vec{b}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\delta}$.

172. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (3-y)^2} \geq 5$. Πότε ισχύει η ισότητα;