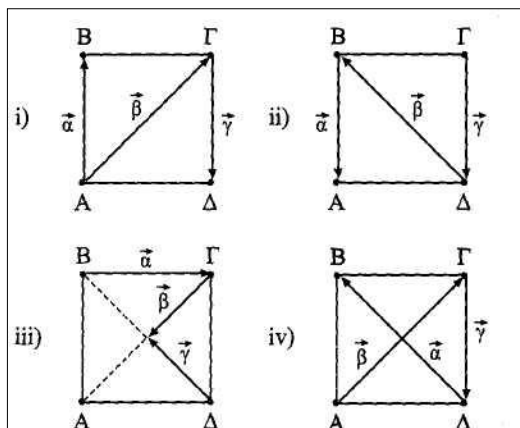


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε το άθροισμα

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$$



2. Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα παρακάτω αθροίσματα :

i) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BG}$

ii) $\vec{KL} + \vec{MN} + \vec{LM} + \vec{NP}$

iii) $\vec{AB} + \vec{DA} + \vec{CD} + \vec{BG}$

3. Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα παρακάτω αθροίσματα :

i) $\vec{AB} - \vec{BA} - \vec{AG}$

ii) $\vec{KL} - \vec{NM} + \vec{NK} - \vec{ML}$

iii) $\vec{NM} - \vec{PI} - \vec{MT} + \vec{PS} - \vec{TS}$

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα :

i) $\vec{AB} + \vec{AD}$

ii) $\vec{DA} - \vec{CD}$

iii) $\vec{AB} + \vec{CD}$

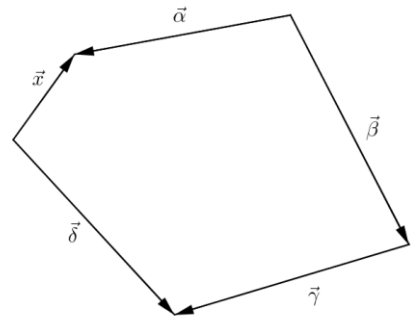
iv) $\vec{GB} + \vec{GD} + \vec{AG}$

5. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ,Λ,Μ,Ν τυχαία σημεία. Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα αθροίσματα:

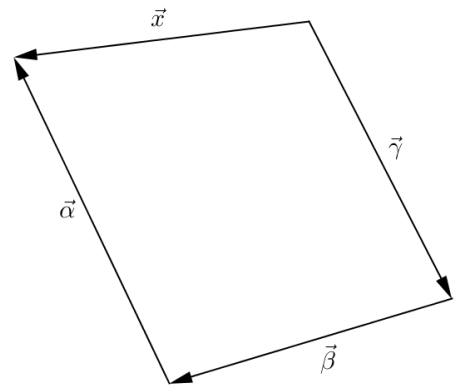
i) $\vec{AK} - \vec{GL} - \vec{AK} + \vec{AL}$

ii) $\vec{AK} + \vec{GM} - \vec{LK} - \vec{NM} + \vec{AB} - \vec{DN}$

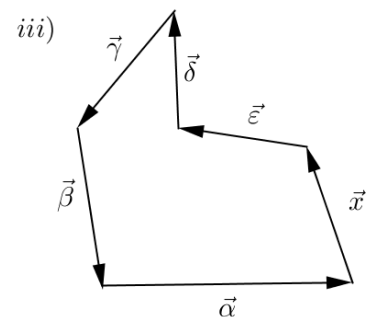
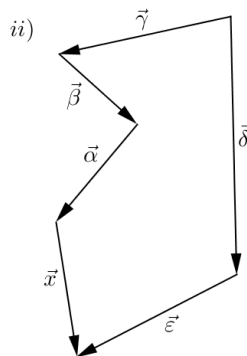
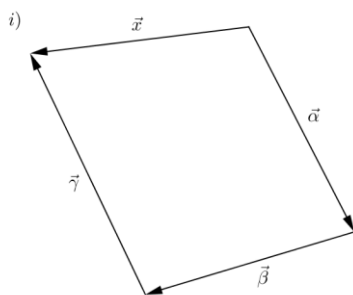
6. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$



7. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$



8. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται :



9. Να εκφράσετε το άθροισμα $\vec{GE} - \vec{\Delta Z} - \vec{BE} + \vec{AZ}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$

10. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A,B,Γ,Δ ισχύει : $\vec{A\Delta} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{\Delta B}$

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}$

ii) $\vec{K\Lambda} - \vec{\Pi\Nu} = \vec{M\Lambda} - \vec{M\Nu} + \vec{K\Pi}$

12. Αν ισχύει $\vec{NB} + \vec{AM} = \vec{NM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.

13. Αν ισχύει $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{AE}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ταυτίζονται.
14. Αν ισχύει $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{\Gamma N}$, να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB.
15. Αν ισχύει $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{ZI} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{ZE}$, να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB.
16. Έστω ότι για τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{K\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
17. Έστω ότι για τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{H\Gamma} = \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{EZ}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
18. Αν ισχύουν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{LM}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{KM}$.
19. Αν ισχύει $\overrightarrow{\Delta M} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{\Gamma M}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα.
20. Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να βρεθεί σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.
21. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιορίσετε σημείο M, ώστε να ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{A\Gamma}$.
22. Έστω M το μέσο της πλευράς BΓ τριγώνου ABΓ και Δ, Ε δύο σημεία του επιπέδου του τριγώνου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Να αποδείξετε ότι :
- το M είναι μέσο του ΔΕ
 - για οποιοδήποτε σημείο N του επιπέδου του τριγώνου θα ισχύει $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{N\Gamma} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NE}$
23. Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα AΔ και BΓ έχουν κοινό μέσο και αντιστρόφως.
24. Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ. Να προσδιορίσετε σημείο M, ώστε να ισχύει : $\overrightarrow{\Gamma M} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{AM}$.
25. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ και έστω E και Z τα σημεία που ορίζονται από τις ισότητες $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{AB}$.
26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και E ένα τυχαίο σημείο. Να αποδείξετε ότι:
- $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{\Gamma E}$
 - $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{BE}$

27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω M το μέσο της πλευράς AB . Να αποδείξετε ότι :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{AB}$$

28. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

$$i) \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{\Delta N}$$

$$ii) \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{MN}$$

29. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν ισχύουν $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία M και N ταυτίζονται.

30. Αν ισχύουν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{K\Lambda} - \overrightarrow{\Pi N}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Lambda M} - \overrightarrow{K\Pi} - \overrightarrow{NM}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A και Γ ταυτίζονται.

31. Εξωτερικά ενός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta E, B\Gamma Z H$ και $A\Gamma\Theta I$.

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta H} + \overrightarrow{Z\Theta} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$

32. Έστω A, B, Γ, Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{\Delta Z} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{B\Gamma}$

i) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

ii) Να βρείτε σημείο M για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{\Delta M} - \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta \Gamma} = \overrightarrow{BA}$

33. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

34. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και ένα οποιοδήποτε σημείο P του χώρου. Να αποδειχθεί ότι: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{P\Gamma} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{\Delta P} = \vec{0}$.

35. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ αντιστοίχως και $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$, και $\overrightarrow{A\Delta} = 4\vec{b}$, να βρεθούν τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{MN}$.

36. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M το μέσον της $A\Delta$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{BM}$ και $\overrightarrow{M\Gamma}$, ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{b}$.

37. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E και Z της διαγωνίου $A\Gamma$, τέτοια ώστε να

είναι $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4} A\Gamma$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$, ως συνάρτηση των

διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{b}$. Να δείξετε ότι το $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

38. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντιστοίχως.

Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{2} \overrightarrow{A\Gamma}$.

39. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ε το μέσο της πλευράς ΑΔ και Ζ σημείο της ΑΓ, ώστε

$$\vec{AZ} = \frac{1}{3} \vec{AG}, \text{ να αποδειχθεί ότι : } \vec{EZ} = \frac{1}{2} \vec{ZB}.$$

ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

40. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 5$, να αποδείξετε ότι $3 \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq 7$

41. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 5$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα

42. Δίνονται τα ομόρροπα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 4$ και $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 8$.

Να βρείτε :

i) το $|\vec{\beta}|$

ii) το $|\vec{\gamma}|$

iii) το $|\vec{\alpha} + \vec{\gamma}|$

43. Δίνονται τα ομόρροπα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 4$ και $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = 8$

44. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$. Να αποδείξετε ότι για

$$\text{οποιοδήποτε διάνυσμα } \vec{\gamma} \text{ ισχύει ότι : } |\vec{\alpha} + \vec{\gamma}| + |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| \geq 1$$

45. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και

$$\frac{|\vec{\alpha}|}{5} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{2}, \text{ να αποδειχτεί ότι :}$$

i) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και ii) $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$

46. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$,

να αποδειχτεί ότι i) $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και ii) $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

47. Αν ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\gamma}| = 3$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 5\vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι $7 \leq |\vec{\beta}| \leq 23$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

48. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό των σημείων Μ για τα οποία ισχύει ότι :

$$|\vec{MA} - \vec{\Gamma\Delta} - \vec{BA} + \vec{B\Delta}| = 0$$

49. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό των σημείων Μ για τα οποία ισχύει ότι :

$$|\vec{M\Delta} - \vec{AB} + \vec{\Delta B}| - |\vec{MB} - \vec{\Gamma B}| = 0$$

50. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ να είναι μοναδιαίο. Να βρείτε τον γεωμετρικό των σημείων M για τα οποία ισχύει ότι : $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{A\Delta}| = 0$

51. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε τον γεωμετρικό των σημείων M για τα οποία ισχύει ότι :

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A\Gamma}| = 6$$

52. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να βρείτε τον γεωμετρικό των σημείων M για τα οποία ισχύει ότι : $|\overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}| = 6$