

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης όταν:
 - α) Έχει εστία $E'(-8,0)$ και μεγάλο άξονα 20
 - β) Έχει εστία $E(0,3)$ και μεγάλο άξονα 8
 - γ) Έχει εστία $E(4,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{1}{2}$
 - δ) Έχει εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$ και μεγάλο άξονα 20
 - ε) $a=2b$ και διέρχεται από το σημείο $(6,4)$
 - στ) Έχει εστίες στον άξονα $y'y$, κορυφές $B'(-2,0)$, $B(2,0)$ και μεγάλο άξονα 6
 - ζ) Έχει μεγάλο άξονα στον $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία $M(3,-4)$ και $N(-6,2)$
 - η) Έχει μεγάλο άξονα στον $y'y$, διέρχεται από το σημείο $P(\sqrt{2}, 2)$ και εστιακή απόσταση $E'E=4$
2. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης αν έχει:
 - i) Εστίες $E_1(-5, 0)$, και $E_2(5, 0)$ και μεγάλο άξονα 24,
 - ii) Μεγάλο άξονα 20 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$,
 - iii) Εστιακή απόσταση $2\gamma=6$ και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει:
 - i. εστίες τα σημεία $E'(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $E(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ και μήκος μεγάλου άξονα 2,
 - ii) εστίες τα σημεία $E'(-5, 0)$, $E(5, 0)$ και μήκος μικρού άξονα 6.
4. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες σε έναν από τους δύο άξονες συντεταγμένων και διέρχεται από τα σημεία $M_1(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1)$ και $M_2(\frac{\sqrt{5}}{3}, -2)$.
5. Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις ελλείψεις:
 - α) $x^2 + 4y^2 = 4$
 - β) $4x^2 + 9y^2 = 36$
 - γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$
6. Δίνεται η έλλειψη $4x^2 + 25y^2 = 100$. Να βρεθούν:
 - i) τα μήκη των αξόνων,
 - ii) οι εστίες,
 - iii) η εκκεντρότητα.

7. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων

α) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ β) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ γ) $4x^2 + 9y^2 = 144$

8. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων με εξισώσεις :

i. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

ii. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$

iii) $x^2 + 4y^2 = 1$

iv) $16x^2 + 25y^2 = 1$

v) $9x^2 + 25y^2 = 225$

9. Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, και το σημείο M (4, 1),

α) Να δείξετε ότι το M είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης,

β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης που έχει μέσον το M.

10. i) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με $e = \frac{4}{5}$ και E' (-4, 0),

ii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της παραπάνω έλλειψης με την ευθεία $y = x$,

iii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του ορθογωνίου που περιέχουν την έλλειψη.

11. Έστω E και E' οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και M τυχαίο σημείο της. Αν

(ME)=1 να βρείτε το μήκος ME'.

12. Αν ένα σημείο M της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ απέχει από τη μια εστία 5, να βρείτε πόσο απέχει από την άλλη εστία.

13. Δίνεται η έλλειψη C: $4x^2 + 9y^2 = 36$ και το σημείο P (2, 1). Να δείξετε ότι το P είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης και να βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το σημείο P.

14. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$ και ένα σημείο Γ του κύκλου. Η

κάθετος από το Γ προς τον άξονα x'x τέμνει την έλλειψη στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου και της έλλειψης στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, τέμνονται σε σημείο P, το οποίο ανήκει στον άξονα x'x.

15. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία τέμνει την έλλειψη C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ σε

Δύο σημεία K, Λ έτσι, ώστε το τμήμα ΚΛ να έχει ως μέσο το σημείο M(1, -1).

16. Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ και η ευθεία (ε) $y = 2x + 1$,

α) Δείξτε ότι η ευθεία τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία A και B,

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής AB,

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο: $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, όπου O το κέντρο της έλλειψης.

17. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον xx' και ο μικρός άξονας φαίνεται από τις εστίες υπό γωνία 45° .
18. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$, και η έλλειψη: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$,
 α) Να βρεθούν τα κοινά τους σημεία,
 β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
19. Έστω έλλειψη με εστίες E και E' στον xx' και μεγάλο άξονα AA' . Αν $EA=2$ και $EA'=10$, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.
20. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μία εστία της, είναι η εστία της παραβολής $C_1: x^2=4\sqrt{3}y$ και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $C_2: 2x^2+2y^2-x-2\sqrt{15}y=0$.
21. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $C_1: 4x^2+4y^2-8x-4\sqrt{3}y+3=0$ και την εστία της παραβολής $C_2: y^2=8x$.
22. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{30}, 0)$, $E(\sqrt{30}, 0)$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: y = -\frac{1}{6}x + \frac{10}{3}$.
23. Για το τυχαίο σημείο $M(x_0, y_0)$ της έλλειψης $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ να αποδείξετε ότι
 $(ME') - (ME) = \frac{6}{5}x_0$.
24. Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=3$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x, y)$ με $x = \frac{1}{2}x_0$ και $y = 2y_0$, κινείται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.
25. Έστω τα σημεία $E'(-1, 0)$ και $E(1, 0)$ και η ευθεία $\delta: x+1=0$. Να βρείτε το σημείο M του επιπέδου ώστε $d(M, E) = d(M, \delta)$ και $(ME') + (ME) = 4$.
26. Δίνεται η έλλειψη $C: x^2+4y^2=4$ και το σημείο $\Sigma(0, 2)$. Η ευθεία $\varepsilon: \sqrt{3}x - 2y + 2\beta = 0$ διέρχεται από το Σ και τέμνει τις εφαπτομένες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα στα σημεία M και M' , να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C' με διάμετρο MM' .
27. Να βρείτε το σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ που απέχει από τον μεγάλο άξονα της δύο μονάδες.
28. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τις εστίες και τα άκρα του μικρού άξονα μιας έλλειψης είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

29. Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και της έλλειψης $C_2 : 3x^2 + y^2 = 6$.
30. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 4$. και τα σημεία $E(0, 2)$ και $E'(0, -2)$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου για τα οποία επιπλέον ισχύει $(ME) + (ME') = 2\sqrt{6}$
31. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$ να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο
32. Έστω η γραμμή C με εξίσωση $\frac{\kappa x^2}{2\kappa^2 + 24} - \frac{y^2}{1 - 4\kappa} = 1$
- α) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε η C να παριστάνει έλλειψη
- β) Για ποια τιμή του κ μία εστία της C είναι το σημείο $(-3, 0)$
33. Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης $C : \frac{x^2}{\kappa^2 - 20} + \frac{y^2}{\kappa^2 - 4} = 1$
34. Αν $\lambda > 6$, να βρεθούν οι εστίες της έλλειψης : $\frac{x^2}{2\lambda + 8} + \frac{y^2}{3\lambda + 2} = 1$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

35. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης:
- α) $3x^2 + y^2 = 4$ στο σημείο της $M(1, -1)$
- β) $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon : 3x + 2y + 7 = 0$
- γ) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$ που είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{4}x + 1$
- δ) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ που διέρχονται από το σημείο $M(3, 3)$
36. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των ελλείψεων:
- i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, στο σημείο $(-2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$,
- ii) $9x^2 + 25y^2 = 225$ στο σημείο $(0, -3)$.
37. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της M όπου :
- i) $M(0, 2)$ ii) $M(-1, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ iii) $M(3\sigmaυν\theta, 2\etaμ\theta)$
38. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C : 4x^2 + y^2 = 20$, οι οποίες είναι:
- i) παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon : 4x + y + 1685 = 0$
- ii) κάθετες στην ευθεία $\varepsilon : x + 4y + 1750 = 0$.

39. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:
α) παράλληλες προς την ευθεία (ε): $x + y = 0$
β) κάθετες στην ευθεία (ε).
40. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης:
 $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x - 3y + 1 = 0$.
41. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης: $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$, που είναι κάθετες στην ευθεία $-x - 2y + 5 = 0$.
42. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης (C): $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $3x + y - 7 = 0$.
43. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης (C): $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$, οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (η): $2x - 2y + 7 = 0$.
44. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, τις οποίες φέρνουμε από το σημείο (3, 5).
45. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, που περνούν από το σημείο M (5, 8).
46. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης C: $x^2 + 4y^2 = 10$ που έχουν:
α) Συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{3}{2}$,
β) Διέρχονται από το σημείο M (4, 1),
γ) Διέρχονται από το σημείο N $(\sqrt{10}, \frac{\sqrt{10}}{2})$.
47. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης (C): $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, η οποία σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες ισοσκελές τρίγωνο.
48. Δίνεται η έλλειψη C: $4x^2 + 9y^2 = 36$.
Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της M $(\sqrt{5}, \mu)$, $\mu < 0$.
Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C που διέρχεται από το σημείο τομής της C,
α) με τον $x'x$; β) με τον άξονα $y'y$; γ) με την ευθεία $y=x$.
49. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ εφάπτεται στην έλλειψη και να βρείτε το σημείο επαφής
50. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία E'(-3, 0) και E(3, 0) και εφάπτεται της ευθείας $x + y - 5 = 0$

51. Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης $C: 3x^2 + 8y^2 = 45$, που απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3.
52. Δίνεται η έλλειψη $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη (ε) αυτής στο σημείο M . Η (ε) τέμνει την εφαπτομένη της (C) στο A , στο σημείο P . Να αποδειχθεί ότι : $OP \parallel A'M$.
53. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με άξονες συμμετρίας τους xx' και yy' που έχει εφαπτομένη την ευθεία $(\varepsilon): x + 2y = 5$ και περνάει από το σημείο $(-4, 0)$. Να βρεθεί και το σημείο επαφής.
54. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν $\gamma = 2$ και εφάπτεται στην ευθεία $2x + 3y + 9 = 0$.
55. Σε μία έλλειψη είναι $\alpha = 5$. Να προσδιοριστεί το β καθώς και το σημείο M που εφάπτεται η ευθεία $(\varepsilon): y = \frac{1}{3}x + 3$ στην έλλειψη.
56. Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ και η ευθεία $x + y + \mu = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- A) Να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε η έλλειψη και η ευθεία να έχουν δύο κοινά σημεία.
B) Να βρεθεί ο γ.τ. του μέσου των χορδών κατά τις οποίες η ευθεία ε τέμνει την έλλειψη για τις παραπάνω τιμές του μ .
57. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στα σημεία της $M(\alpha\eta\mu\theta, \beta\sigma\upsilon\nu\theta)$ και $N(-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$ τέμνονται σε σημείο P , το οποίο ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2$
58. Να δειχτεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών E_1 και E_2 μιας έλλειψης από μία εφαπτομένη της είναι σταθερό.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

59. Να βρείτε το γ. τ. της κορυφής M του τριγώνου $ΜΓΔ$ που έχει περίμετρο 28 και $\Gamma(-4, 0)$ και $\Delta(4, 0)$.
60. Δίνονται τα σημεία $A(-4, 0)$ και $B(4, 0)$. Να βρείτε τα γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία είναι : $\lambda_{AM} \cdot \lambda_{BM} = -9$. Να σχεδιάσετε τη γραμμή που θα προκύψει.
61. Έστω κύκλος C κέντρου K και ακτίνας ρ και εσωτερικό σημείο του Δ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται εσωτερικά του C και διέρχονται από το Δ , στην περίπτωση που το Δ είναι διαφορετικό του K . Τι συμβαίνει αν $\Delta \equiv K$;
62. Να αποδείξετε ότι όταν το t μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, το σημείο $M(\alpha\eta\mu t, \beta\sigma\upsilon\nu t)$ ανήκει σε έλλειψη, όπου α, β δύο άνισοι πραγματικοί αριθμοί.

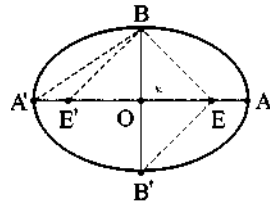
63. Αν το φ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου M (5ημ φ , 4συν φ). Να σχεδιάσετε τη γραμμή αυτή με λεπτομέρεια.
64. Να δείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$ ανήκει σε έλλειψη
65. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x = 8$ και το σημείο $A(2,0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MA) = \frac{1}{2} d(M, \varepsilon)$
66. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία $A(\alpha \sin \theta, \beta \eta \mu \theta)$ και $B(-\alpha \eta \mu \theta, \beta \sin \theta)$,
 $\theta \in [0, 2\pi)$
 α) Να δείξετε ότι τα σημεία ανήκουν στην έλλειψη
 β) Αν οι εφαπτόμενες στα A και B τέμνονται στο σημείο M να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του M
67. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περίμετρο ίση με 20 και κορυφές $B(-3, 0)$, $\Gamma(3, 0)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A .
68. Στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ($\alpha > \beta$) θεωρούμε χορδή $\Gamma\Delta$, η οποία διέρχεται από την εστία E' . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ έχει σταθερή (ανεξάρτητη των Γ, Δ) περίμετρο.
69. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Αν $P(x_1, y_1)$ είναι μεταβλητό σημείο της έλλειψης, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M\left(\frac{x_1 + y_1}{5}, \frac{3y_1 - 2x_1}{5}\right)$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

70. Στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι $(EB) = \alpha$.
71. Ο κύκλος με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$. Να βρεθεί η εκκεντρότητά της.
72. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{\kappa^2 x^2}{\alpha^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν την ίδια εκκεντρότητα.
73. Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$, με $\alpha > \beta$
74. Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$

75. Δίνονται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = a^2$. Έστω M_1, M_2 σημεία των C_1, C_2 αντιστοίχως που έχουν ίδια τετμημένη. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_1, C_2 στα αντίστοιχα σημεία M_1, M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.
76. Ναδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου, είναι παράλληλες.
77. Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο $A(1, 1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει την έλλειψη στα σημεία B και Γ ώστε το A να είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.
78. Δίνεται η έλλειψη $C : x^2 + 2y^2 = 1$ και το σημείο της $M(\frac{1}{2}, \lambda)$, $\lambda < 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί την γωνία $E'ME$, όπου E' και E είναι οι εστίες της έλλειψης.
79. Να δείξετε ότι οι ελλείψεις: $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{a^2 + \lambda^2} + \frac{y^2}{\beta^2 + \lambda^2} = 1$, $\alpha > \beta > 0$, έχουν τις ίδιες εστίες.
80. Να δείξετε ότι οι ελλείψεις: $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{a^2 \lambda} + \frac{y^2}{\beta^2 \lambda} = 1$, $\alpha > \beta > 0$ και $\lambda > 0$, είναι όμοιες.
81. Έστω η έλλειψη: $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο της M . Να δείξετε ότι:
 $(ME') \cdot (ME) + OM^2 = a^2 + \beta^2$.
82. Έστω έλλειψη με εστίες E και E' στον xx' και μικρό άξονα BB' . Αν το τρίγωνο $E'BE$ είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.
83. Έστω η έλλειψη $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη σ' ένα σημείο $P(x_1, y_1)$ αυτής, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία M και N αντίστοιχα. Αν K και Λ είναι οι προβολές του στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- i) $(OK)(OM) = a^2$ ii) $(OL)(ON) = \beta^2$
- iii. $\frac{a^2}{(OM)^2} + \frac{\beta^2}{(ON)^2} = 1$
84. Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{\kappa^2 x^2}{a^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν την ίδια εκκεντρότητα.
85. Να βρείτε ποια από τις ελλείψεις $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $C_2 : \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{\beta^4} = 1$ με $\alpha > \beta$, έχει τη μεγαλύτερη εκκεντρότητα.

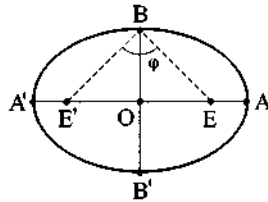
86. Να βρείτε την εκκεντρότητα μιας έλλειψης C, αν γνωρίζετε ότι:



- i) το τρίγωνο BA'E είναι ορθογώνιο στο B,
- ii) το τρίγωνο BEE' είναι ισόπλευρο,
- iii) το τρίγωνο BEB' είναι ορθογώνιο στο E.

87. Αν στην έλλειψη C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, με $a > b$, τα a, b, c αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

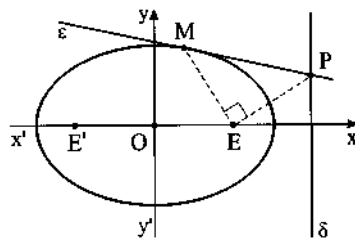
88. Αν φ είναι η γωνία υπό την οποία η κορυφή B βλέπει το τμήμα EE' μιας έλλειψης C,



να αποδείξετε ότι για την εκκεντρότητα e ισχύει $e = \eta\mu \frac{\varphi}{2}$.

89. Έστω η έλλειψη C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Αν η εφαπτομένη ε της έλλειψης σ' ένα σημείο της M τέμνει την ευθεία $\zeta: x = a$ στο K, να αποδείξετε ότι $OK \parallel A'M$.

90. Η εφαπτομένη ε της έλλειψης C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ σ' ένα σημείο της M τέμνει την ευθεία



$\delta: x = \frac{a^2}{b}$ στο P. Να αποδείξετε ότι $MEP = 90^\circ$.

91. Για την έλλειψη C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, να αποδείξετε ότι:

- i) η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \kappa$ εφάπτεται της C, αν και μόνο αν $\beta^2 + \alpha^2 \lambda^2 = \kappa^2$,
- ii) η ευθεία $\zeta: Ax + By + F = 0$ εφάπτεται της C, αν και μόνο αν $\alpha^2 A^2 + \beta^2 B^2 = F^2$.

92. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το σημείο της $M(\gamma, y_0)$ με $y_0 > 0$. Αν η κάθετη της έλλειψης στο M (δηλαδή η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο M) διέρχεται από την κορυφή $B'(0, -\beta)$, να αποδείξετε ότι $\varepsilon^4 + \varepsilon^2 - 1 = 0$.

93. Τυχαιά χορδή AB της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ διέρχεται από την εστία $E'(-\gamma, 0)$. Αν

$$M(x_0, y_0) \text{ είναι το μέσο της } AB, \text{ να αποδείξετε ότι } (AB) = 2 \left(a + \frac{\gamma x_0}{a} \right)$$

94. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Αν P είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης διαφορετικό των B, B' , να αποδείξετε ότι αν το P μεταβάλλεται, τότε το ορθόκентρο του τριγώνου PBB' ανήκει σε έλλειψη.

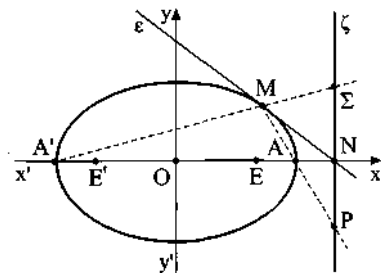
95. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στα σημεία της $M(\alpha \mu \theta, \beta \sigma \nu \theta)$ και $N(-\alpha \sigma \nu \theta, \beta \mu \theta)$ τέμνονται σε σημείο P , το οποίο ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2$

96. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η ευθεία $\delta: x = \frac{a^2}{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από την εστία $E(\gamma, 0)$ και τη δ είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης.

97. Αν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στα σημεία της M και N είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι η ευθεία MN διέρχεται από το κέντρο $O(0,0)$.

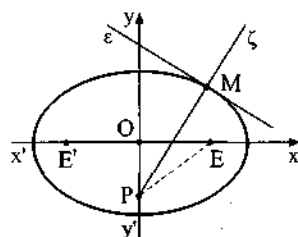
98. Η εφαπτομένη ε της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε

σημείο της M τέμνει τον άξονα x' στο σημείο N και έστω ζ η κάθετη στον άξονα x' στο N . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες MA και MA' τέμνουν τη ζ σε σημεία συμμετρικά ως προς το N .



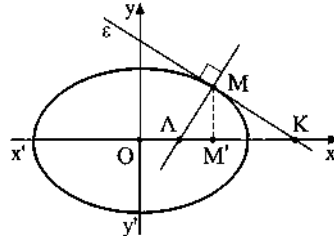
99. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και έστω ε η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της M

διάφορο των κορυφών της. Αν η κάθετη της ε στο M τέμνει τον άξονα $y'y$ στο P ,



να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\frac{(PE)}{(PM)}$ είναι σταθερό και ίσο με την εκκεντρότητα ε .

100. Θεωρούμε την έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και την εφαπτομένη ε της C σ' ένα σημείο της M διαφορετικό από τις κορυφές της. Έστω M' η προβολή του M στον άξονα $\chi'\chi$.

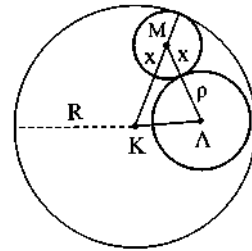


Αν η ε και η κάθετη αυτής στο M τέμνουν τον άξονα $\chi'\chi$ στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i. $(OK)(O\Lambda) = \gamma^2$ ii. $\frac{(OM')}{(O\Lambda')} = \frac{a^2}{\beta^2}$

101. Να αποδείξετε ότι αν οι ελλείψεις έχουν τέσσερα κοινά σημεία, τότε αυτά είναι ομοκυκλικά.
102. Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, τυχαίο σημείο M του C και την προβολή M' του M στον άξονα $\chi'\chi$. Αν $\overline{MN} = \lambda \overline{NM'}$, $\lambda \neq -1$, να αποδείξετε ότι το N κινείται σε έλλειψη.
103. Για τυχαίο σημείο M της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ να αποδείξετε ότι $(ME)(ME') + (MO)^2 = a^2 + \beta^2$
104. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \kappa$, η οποία τέμνει τη C στα σημεία A και B . Αν $M(x_0, y_0)$ είναι το μέσο του τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $\lambda = -\frac{\beta^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$ (όπου $y_0 \neq 0$).
105. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της $N(x_1, y_1)$, η οποία τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι το μέσο του τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $\frac{a^2}{x_0^2} + \frac{\beta^2}{y_0^2} = 4$.
106. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $a > \beta$, και σημείο της Γ διαφορετικό των κορυφών A και A' . Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος διαμέτρου $E\Gamma$ εφάπτεται στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας a .

107. Κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου (K, R) χωρίς να είναι ομόκεντρος προς αυτόν. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα M των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται και στους δύο παραπάνω κύκλους ανήκουν σε έλλειψη.



ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

108. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$. (1)

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια βρείτε όλα τα κοινά σημεία.
 β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
 γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0, y_0)$ ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$ (όπου E', E οι εστίες της έλλειψης (1)).

109. Δίνονται δύο κωνικές τομές : η παραβολή $y^2 = 2px$, και η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.
 Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της έλλειψης είναι τα σημεία

$$E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right) \text{ και } E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

- Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

- Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

110. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Έστω M το σημείο του 1^{ου} τεταρτημορίου στο οποίο η διχοτόμος της 1^{ης} - 3^{ης} γωνίας των αξόνων τέμνει την έλλειψη C . Η εφαπτομένη της έλλειψης C στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{4}$.

- α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης C .
 β) Αν επιπλέον η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{6}, 0)$, $E(\sqrt{6}, 0)$, τότε να βρείτε :
 i) Τα μήκη του μικρού και μεγάλου άξονα της έλλειψης C
 ii) Τις εφαπτόμενες της έλλειψης C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: y = 2x + 2011$.

111. Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + 4$, με $\lambda > 0$. Οι εφαπτόμενες

της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της τέμνουν την ευθεία στα σημεία Μ και Ν. Έστω C_2 ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C_2 συναρτήσει του λ

β) Έστω ότι ο κύκλος C_2 διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης C_1 . Να βρείτε :

i) τον αριθμό λ

ii) τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1 που είναι παράλληλες στην ευθεία ε

112. Δίνεται η έλλειψη C_1 με εστίες $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$, με $\gamma > 0$, η οποία έχει

εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και μήκος μεγάλου άξονα $4\sqrt{2}$. Θεωρούμε και την εξίσωση :

$$x^2 + y^2 + 12x + 16 = 0 \quad (1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_1

β) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο C_2 του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

γ) Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου C_2 και της έλλειψης C_1

113. Δίνεται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0 \quad (1)$

α) Να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2

δ) Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 αντίστοιχα στο κοινό τους σημείο που ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο. Να βρείτε :

i) τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2

ii) την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2

114. Δίνεται η έλλειψη $C_1 : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ και η παραβολή $C_2 : y^2 = 12x$

α) Να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1

β) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C_2

γ) Έστω Μ το σημείο της παραβολής C_2 με τεταγμένη 6. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_2 στο Μ εφάπτεται και στην έλλειψη C_1

δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C_1 που διέρχονται από την εστία της παραβολής C_2

115. Δίνεται έλλειψη C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα $y'y$, συμμετρικά ως

προς την αρχή των αξόνων. Η έλλειψη C έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ και μια

κορυφή της είναι το σημείο $B(\sqrt{2}, 0)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_1

β) Έστω Α το άκρο του μεγάλου άξονα της έλλειψης C με θετική τεταγμένη. Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

γ) Έστω Ε η εστία της έλλειψης C με θετική τεταγμένη και σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME} = (-1, 2)$. Να βρείτε :

i) τις συντεταγμένες του σημείου Μ

ii) την εξίσωση της χορδής της έλλειψης C που έχει μέσο το σημείο Μ.