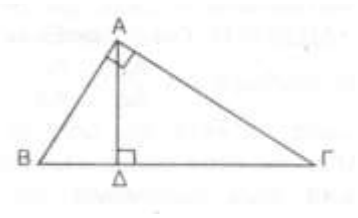
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

❑ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

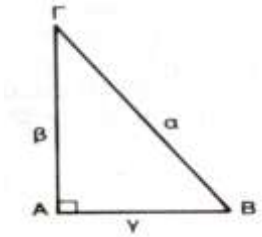
♦ Βασικά θεωρήματα



Σχήμα 1

➢ Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο σχήμα 1 ισχύει: $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΔΓ$



Σχήμα 2

➢ Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο σχήμα 2 ισχύει:

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$$

➢ Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$,

τότε $A = 90^\circ$. (Αντίστροφο πυθαγορείου)

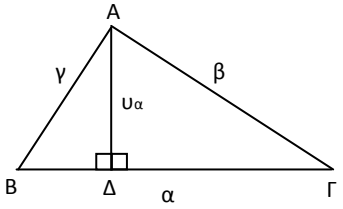
➢ Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ στο σχήμα 1 ισχύει: $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$

➢ $\beta\,\gamma = \alpha\,\upsilon_\alpha$

➢ $$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^{\,2}}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ



1. $\beta^2=\alpha.\Delta\Gamma$, $\gamma^2=\alpha.\Delta B$
2. $\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}=\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$
3. $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Rightarrow \begin{cases}\beta^2=\alpha^2-\gamma^2\\ \gamma^2=\alpha^2-\beta^2\end{cases}$
4. $\upsilon_\alpha{}^2=\Delta B.\Delta\Gamma$
5. $\beta.\gamma=\alpha.\upsilon_\alpha$
6. $\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}=\dfrac{1}{\upsilon_\alpha{}^2}$

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ</u>

1. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνία Α=90ο) και ΑΔ το ύψος του. Αν ΔΓ=9 και ΒΓ=13 τότε το ΑΔ έχει μήκος:

Α. $3\sqrt{13}$ Β. 6 Γ. 4 Δ. 3 Ε. 36

2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 6 cm και 8 cm. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει ίση περίμετρο με αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο. Το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου είναι σε cm ίσο με:

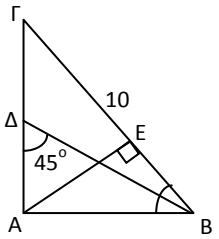
Α. 6 Β. 7 Γ. 9 Δ. 8 Ε. 10

3. Αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου έχει μήκος $2\sqrt{2}$ cm, τότε το μήκος της πλευράς του είναι σε cm ίσο με:

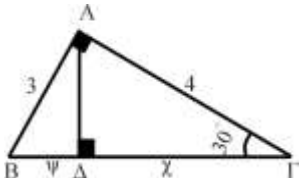
Α. $\sqrt{2}$ Β. 2 Γ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Δ. 4 Ε. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Β=60ο και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε η γωνία ΑΔΒ=45ο και ΑΕ το ύψος. Αν η υποτείνουσα ΒΓ=10 να αντιστοιχήσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων.

Στήλη Α	Στήλη Β
ΑΓ	$\frac{5}{2}$
ΑΔ	$\frac{25\sqrt{3}}{2}$
ΒΕ	5
ΓΕ	$\frac{15}{2}$
ΑΕ	$5\sqrt{3}$
	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$
	6



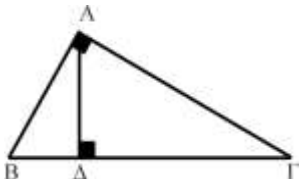
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $A = 90^0$ και το ΑΔ είναι ύψος του. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι:



Α. $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$ Β. $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$ Γ. $\frac{y}{x} = \frac{16}{9}$

Δ. $\frac{y}{x} = \frac{9}{16}$ Ε. $\frac{y}{x} = \frac{25}{16}$

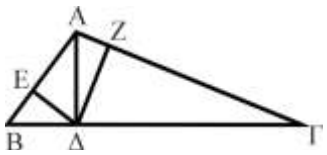
6. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $A = 90^0$ και το ΑΔ είναι ύψος του. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι:



Α. $ΑΔ^2 = ΒΔ . ΒΓ$ Β. $ΑΔ^2 = ΔΓ . ΒΓ$

Γ. $ΑΔ^2 = ΒΔ . ΔΓ$ Δ. $ΑΔ^2 = ΑΒ . ΑΓ$ Ε. $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$

7. Αν στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ και $ΔΕ \perp ΑΒ$, $ΔΖ \perp ΑΓ$, να αντιστοιχήσετε κάθε σχέση της στήλης Α μ' ένα τρίγωνο της στήλης Β, στο οποίο ισχύει:



στήλη (Α) **σχέσεις**	**στήλη (Β)** **τρίγωνα**
$ΔΕ^2 = ΑΔ^2 - ΑΕ^2$	ΑΔΓ
	ΑΔΖ
$ΑΔ^2 = ΑΓ . ΑΖ$	ΑΕΔ
	ΔΖΓ
$ΔΕ^2 = ΕΑ . ΕΒ$	ΑΔΒ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^0$,α=25 και β=20.Να υπολογιστεί:
i) Η πλευρά γ, ii) Η προβολή της γ πάνω στην α.
iii) Η προβολή της β πάνω στην α. iv) Το ύψος $υ_α$

(απ.i/15, ii/9, iii/16, iv/12)

2. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με A=90°, ΑΓ=15 και ΒΓ=25. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΓ, ΔΒ, ΑΒ και ΑΔ,όπου ΑΔ ύψος .

3. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με A=90°, ΑΒ=24 και ΒΓ=25. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΒ, ΔΓ, ΑΓ και ΑΔ, όπου ΑΔ ύψος .

4. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με A=90°, ΑΒ=12 και ΒΓ=20. Να υπολογιστούν τα τμήματα ΔΒ, ΔΓ, ΑΓ και ΑΔ, όπου ΑΔ ύψος .

5. Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα είναι 3 cm και 12 cm. Να βρεθούν το ύψος από την ορθή γωνία και οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.

6. Οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη x-1, x και x+1.
ι) Να υπολογιστούν οι πλευρές.
ιι) Να υπολογιστούν τα μήκη των προβολών των κάθετων πλευρών πάνω στην υποτείνουσα.
ιιι) Να υπολογιστεί το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

7. Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 84 m. Να υπολογιστούν οι διαγώνιοί του, αν γνωρίζουμε ότι η μία είναι τα $\frac{3}{5}$ της άλλης.

8. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 = β^2 + γ^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές 5α, 5β, 5γ είναι τρίγωνο ορθογώνιο.

9. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές με μήκος ΑΒ=3λ, ΑΓ=4λ και ΒΓ=5λ, όπου λ>0,
α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου.

β) Αν το ΑΔ είναι ύψος, να αποδείξετε ότι ΔΓ=$\frac{16}{9}$ΔΒ

10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^0$) είναι ΑΒ = 2ΑΓ. Αν ΑΔ ύψος του ορθογωνίου, αποδείξτε ότι: ΒΔ = 4ΓΔ.

11. Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^0$) και ΑΒ=4ΑΓ, να δειχθεί ότι ΔΒ=16ΔΓ.

12. Να υπολογιστούν τα δύο τμήματα ΔΒ, ΔΓ στα οποία χωρίζεται η υποτείνουσα ΒΓ=15 ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ από το ύψος του ΑΔ=6.

13. Αν οι διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κάθετες να δειχθεί ότι:

$$AB^2+\Gamma\Delta^2= A\Delta^2+B\Gamma^2$$

14. Έστω ΑΒΓ (ΑΒ > ΑΓ) τυχαίο οξυγώνιο τρίγωνο. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Αποδείξτε ότι ισχύει: $AB^2 - A\Gamma^2 = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ΟΜΑΔΑΣ</u>

15. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα 10 cm και περίμετρο 24 cm.

16. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η μία κάθετη πλευρά είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 6 cm. Αν το άθροισμα των καθέτων πλευρών είναι 42 cm, να υπολογιστεί η υποτείνουσα του τριγώνου.

17. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α, να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής Β από το μέσο της διαμέσου ΑΔ. *(απ. ΒΕ=$\frac{a\sqrt{7}}{4}$)*

18. Να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιες ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=4, ΓΔ=10 και μη παράλληλες πλευρές 5.

(απ. υ=4, ΑΓ=$\sqrt{65}$)

19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ΑΒ = κ. Να υπολογισθούν, συναρτήσει του κ, οι προβολές των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα. *(απ. ΒΔ=$\frac{\kappa}{2}$, ΓΔ=$\frac{3\kappa}{2}$)*

20. Αν Δ,Ε,Ζ οι προβολές σημείου Σ εσωτερικού του τριγώνου ΑΒΓ προς τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι:

$$B\Delta^2+\Gamma E^2+AZ^2= \Gamma\Delta^2+BZ^2+AE^2$$

21. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) και Κ μέσο της ΑΒ. Δείξτε ότι $4ΚΓ^2=4ΑΓ^2+ΑΒ^2$.

22. Δίνεται xOy =45° και σημείο Μ εσωτερικό αυτής. Από το Μ φέρνουμε ΜΑ κάθετη στην Ox που τέμνει την Ox στο Α και την Oy στο Β. Να δειχθεί ότι :
$ΑΒ^2+ΑΜ^2=ΜΟ^2$

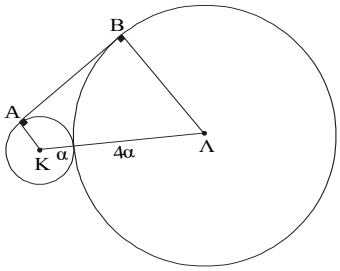
23. Αν ΒΕ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (A =90°), να δειχθεί ότι :

$$ΒΕ^2+3/4ΑΓ^2 =ΒΓ^2$$

24. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το Α, έχουμε ΒΓ = 4 cm και ΑΒ = 7 cm. Να υπολογίσετε:

i. Το ύψος ΑΗ
ii. Το ύψος ΒΚ

25.
Δύο κύκλοι με ακτίνες α και 4α εφάπτονται εξωτερικά, όπως στο σχήμα. Αν ΑΒ είναι η κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων:



i. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΛΒ είναι τραπέζιο.
ii. Να υπολογίσετε το μήκος ΑΒ συναρτήσει του α.

26. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^0$) με $\hat{B}$ = 2$\hat{\Gamma}$, να δείξετε ότι $\frac{ΑΓ^2}{ΑΒ^2}$ = 3.

27. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΒΓ=λ και ΓΔ=λ$\sqrt{2}$. Να δείξετε ότι οι κάθετες στη διαγώνιο ΑΓ από τις κορυφές Β και Δ διαιρούν την διαγώνιο σε 3 ίσα μέρη.

28. Σε ένα τετράγωνο πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα έτσι, ώστε ΒΕ=$\frac{1}{3}\alpha$ και ΓΖ=$\frac{2}{9}\alpha$. Να αποδείξετε ότι ΑΕ$\perp$ΕΖ.

29. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^0$) και έστω ΑΔ ύψος του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:

α) $AB^2 + AΔ^2 = BΔ\ (ΔΓ + BΓ)$

β) $AΓ^2 + AΔ^2 = ΔΓ\ (BΔ + BΓ)$

30. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στην ΑΒ. Αν ΔΑΒ = 60° και ΑΔ = λ, να υπολογιστούν συναρτήσει του λ:

α) Η πλευρά ΑΒ

β) Η διαγώνιος ΑΓ

31. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 5 cm και ΓΔ = 1,4 cm. Αν ΑΔ = 3 cm, να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιές του.

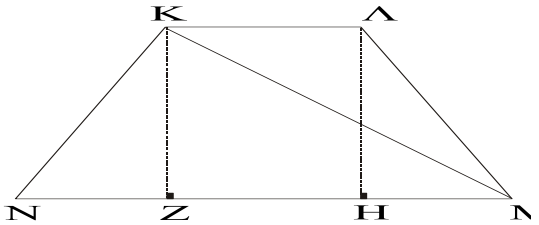
32. Ενός ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ η μεγάλη βάση του ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς ΑΔ και η γωνία Α = 60°. Αν είναι γνωστό ότι το μήκος της πλευράς ΑΔ είναι λ, να υπολογιστούν:

α) το ύψος του τραπεζίου και

β) η άλλη βάση ΓΔ.

33. Στο ισοσκελές τραπέζιο ΚΛΜΝ να δείξετε:

i. ΖΝ = ΗΜ
ii. $KM^2 - KN^2 = KΛ \cdot MN$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ΟΜΑΔΑΣ

34. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΒΔ = ΒΓ = 14 cm και ΑΔ= ΔΓ = 8 cm.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΓ.

35. Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΒ + ΑΓ = 2 + $\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά ΑΒ
ii. Τη διαγώνιο ΑΓ

36. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) είναι ΑΒ = 6 cm και ΑΓ = 8 cm. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε την ΜΕ $\perp$ ΒΓ. Να υπολογιστούν:

α) Η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου

β) Η διαφορά $ΕΒ^2$ - $ΕΓ^2$

37. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = 90°, ΑΒ = 60 m και ΑΔ = 15 m, όπου Δ σημείο της ΑΓ. Να βρεθεί το μήκος του ΓΔ αν είναι ΑΒ + ΑΔ = ΓΔ + ΒΓ.

38. Αν Μ είναι εσωτερικό σημείο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι:
$ΜΑ^2 + ΜΓ^2 = ΜΒ^2 + ΜΔ^2$.

39. Στη διαγώνιο ΒΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο. Να αποδειχθεί ότι: $ΓΔ^2 - ΓΟ^2 = ΒΟ \cdot ΟΔ$.

40. Δίνεται κύκλος (Κ,R) και μια διάμετρός του ΜΛ. Γράφουμε τους κύκλους διαμέτρων ΚΜ, ΚΛ. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται και στους τρεις κύκλους.

41. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $B - \Gamma = 90^0$. Αν R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του, να δειχθεί ότι $ΑΒ^2+ΑΓ^2=4R^2$.

42. Από την κορυφή Α τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφουμε τυχαία ευθεία, που κόβει τις ΒΓ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν α είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AZ^2} = \frac{1}{\alpha^2}$.

43. Αν Ε είναι σημείο της διαγωνίου ΔΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ, να δειχθούν:

ι) $ΑΒ^2-ΑΕ^2=ΕΒ.ΕΔ$
ιι) $ΒΕ^2+ΕΔ^2=2ΑΕ^2$

44. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και οι ΑΔ κάθετη ΒΓ, ΔΕ κάθετη ΑΒ, ΔΖ κάθετη ΑΓ. Να δείξετε ότι :

ι) $\frac{AB^3}{A\Gamma^3} = \frac{BE}{\Gamma Z}$

ιι) $\frac{1}{\Delta E^2} + \frac{1}{\Delta Z^2} = \frac{2}{AB^2} + \frac{2}{A\Gamma^2} + \frac{1}{\Delta B^2} + \frac{1}{\Delta\Gamma^2}$

45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι διάμεσοι μ_β και μ_γ τέμνονται κάθετα. Να δείξετε ότι : $\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2=\mu_\alpha^2$.

46. Αν δύο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) τέμνονται στα σημεία Α και Β και ΓΔ είναι η κοινή εφαπτομένη αυτών, τότε να αποδειχθεί ότι $\frac{\text{ΑΓ}^2}{\text{ΑΔ}^2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}$ όπου Γ σημείο του κύκλου (Κ, ρ_1) και Δ σημείο του κύκλου (Λ, ρ_2).

47. Έστω τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ και Μ σημείο του τόξου ΑΒ. Αν η παράλληλη ευθεία από το Μ προς την ΑΒ τέμνει τις ΟΑ και ΟΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\text{ΜΓ}^2+\text{ΜΔ}^2=\text{ΑΒ}^2$.

48. Έστω ΑΜ η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, γωνία Α=90^0. Φέρνουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΑΕ των γωνιών ΜΑΒ, ΜΑΓ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι:

$$\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΔΜ}^2}+\frac{\text{ΓΕ}^2}{\text{ΕΜ}^2}=4.$$

49. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο κάθετες χορδές του ΑΒ και ΓΔ, που τέμνονται στο σημείο Μ. Να αποδειχθεί ότι :

$$\text{ΜΑ}^2+\text{ΜΒ}^2+\text{ΜΓ}^2+\text{ΜΔ}^2=4\text{R}^2.$$

50. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της υποτείνουσας ΒΓ. Αν $\text{ΔΕ}\perp\text{ΑΒ}$ και $\text{ΔΖ}\perp\text{ΑΓ}$ να δείξετε ότι :

$$\text{ΔΒ}\cdot\text{ΔΓ}=\text{ΑΕ}\cdot\text{ΕΒ}+\text{ΑΖ}\cdot\text{ΖΓ}.$$

51. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνΑ=90°) και τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Ι. Να αποδειχθεί ότι $\text{ΒΔ}\cdot\text{ΓΕ}=2\cdot\text{ΙΒ}\cdot\text{ΙΓ}$