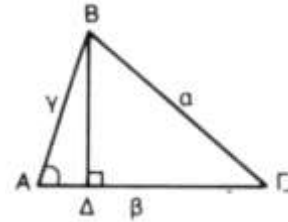


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^ο

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

➤ Θεώρημα οξείας γωνίας

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



Στο διπλανό τρίγωνο είναι $A < 90^\circ$ και το AD είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β ,

οπότε ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot AD$

➤ Θεώρημα αμβλείας γωνίας

Το τετράγωνο μιας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι

από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων

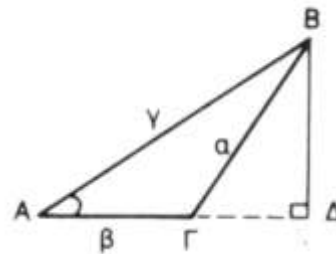
των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο

της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτή.

Στο διπλανό τρίγωνο είναι $A > 90^\circ$ και το τμήμα AD

είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β ,

οπότε ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot AD$



♦ Πόρισμα

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- i. $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $A > 90^\circ$
- ii. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $A = 90^\circ$
- iii. $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $A < 90^\circ$

➤ Νόμος συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Αν σ' ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.
Σ Λ
2. Ένα τρίγωνο με πλευρές $\alpha=10\text{cm}$, $\beta=7\text{cm}$ και $\gamma=3\text{cm}$ είναι αμβλυγώνιο.
Σ Λ
3. Έστω $\text{AB}\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α , με ύψος u και περίμετρο 2τ . Το τρίγωνο με πλευρές α , u και τ είναι οξυγώνιο
Σ Λ
4. Τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με πλευρές α , β και γ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = 2\gamma^2$ τότε τι απ' τα παρακάτω αληθεύει:
Α. Το τρίγωνο είναι ισοσκελές
Β. Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο
Γ. Το τρίγωνο έχει τη Γ οξεία
Δ. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
5. Αν σε τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ ισχύει $\text{AB}^2 + \text{A}\Gamma^2 > \text{B}\Gamma^2$ και H το ορθόκεντρό του τότε:
Α. $\text{HB}^2 + \text{H}\Gamma^2 > \text{B}\Gamma^2$
Β. $\text{HB}^2 + \text{H}\Gamma^2 = \text{B}\Gamma^2$
Γ. $\text{HB}^2 + \text{H}\Gamma^2 < \text{B}\Gamma^2$
Δ. $\text{HB}^2 + \text{H}\Gamma^2 = \text{AB}^2 + \text{A}\Gamma^2$
6. Σε τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ φέρνουμε τις διχοτόμους $\text{B}\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο I . Τι απ' τα παρακάτω ισχύει:
Α. $\text{IB}^2 + \text{I}\Gamma^2 < \text{B}\Gamma^2$
Β. $\text{IB}^2 + \text{I}\Gamma^2 = \text{B}\Gamma^2$
Γ. $\text{IB}^2 + \text{I}\Gamma^2 < \frac{1}{2}\tau^2$
Δ. $\text{IB}^2 + \text{I}\Gamma^2 > \text{B}\Gamma^2$
7. Έστω $\text{AB}\Gamma\Delta$ τετράπλευρο εγγράψιμο στο οποίο ισχύει $\text{AB}^2 + \text{B}\Gamma^2 = \text{A}\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$. Τότε:
Α. Η B είναι αμβλεία
Β. Η B είναι ορθή
Γ. Η B είναι οξεία
Δ. Η A και η Γ είναι ίσες
8. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει η σχέση $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε αυτό είναι:
Α. οξυγώνιο Β. αμβλυγώνιο Γ. ορθογώνιο Δ. δεν ξέρουμε.

9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=8 και ΒΓ=6. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΓΔ=2, τότε το μήκος της ΑΔ είναι:

- Α. $2\sqrt{14}$ Β. 28 Γ. $4\sqrt{7}$ Δ. $14\sqrt{2}$ Ε. 3

10. Στη στήλη 1 του παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές του μέτρου της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ και στη στήλη 2 η σχέση που συνδέει τα μήκη α, β και γ των πλευρών του τριγώνου για τις διάφορες τιμές της γωνίας Α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης 1 με το αντίστοιχο της στήλης 2.

ΣΤΗΛΗ 1 (γωνία)

ΣΤΗΛΗ 2

A=30°	•	•	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$
A=45°	•	•	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
A=60°	•	•	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{2}$
A=120°	•	•	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma\sqrt{3}$
A=135°	•	•	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}$
A=150°	•	•	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma\sqrt{2}$

11. Να αντιστοιχίσετε τα μήκη των πλευρών με το είδος του τριγώνου:

3, 2, 4	•	•	οξυγώνιο
4, 6, 5	•	•	ορθογώνιο
6, 10, 8	•	•	αμβλυγώνιο
9, 7, 5	•		
6, 3, 5	•		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου
 - i) $\alpha=13, \beta=12, \gamma=5$
 - ii) $\alpha=4, \beta=6, \gamma=7$
 - iii) $\alpha=3, \beta=8, \gamma=6$
2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με AB=6, AΓ=5 και BΓ=9.
 - i) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου.
 - ii) Να υπολογιστεί το ύψος ΓΔ.
3. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ABΓ είναι $\alpha = 8, \beta = 6$ και $\gamma = 5$.
 - i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο
 - ii) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς AB στις πλευρές AΓ και BΓ
 $(\alpha\pi. AE=0,25, B\Delta=\frac{53}{16})$
4. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ στο οποίο είναι AB=8, AΓ=7 και BΓ=13. Να βρεθεί το μέτρο της μεγαλύτερης γωνίας του τριγώνου.
5. Αν μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου ισχύει $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma\sqrt{2}}$ να υπολογιστεί η B .
6. Αν $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{3}}$. Να υπολογιστεί η γωνία A .
7. Σ' ένα τρίγωνο ABΓ είναι AB=2, BΓ=1+ $\sqrt{3}$, AΓ= $\sqrt{6}$. Να δειχθεί ότι B =60°.
8. Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι BA=7, BΓ=5 $\sqrt{2}$ και A+Γ=45°. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AΓ.
9. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές α, β και γ για τις οποίες ισχύει η σχέση $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}$
 - α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο
 - β) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.
10. Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι $\alpha=14, \beta=15$ και $\gamma=13$. Να βρεθούν:
 - α) το είδος του τριγώνου
 - β) η προβολή της AB πάνω στη BΓ,
 - γ) το ύψος AΔ του τριγώνου ABΓ.

11. Αν $\kappa, \lambda, \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} - \kappa\lambda$ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να υπολογιστεί σε μοίρες η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά που έχει μήκος $\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} - \kappa\lambda$. (απ. 60°)

12. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και τη γωνία του A αμβλεία. Να αποδείξετε ότι: $B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$, όπου Δ η προβολή του B πάνω στην $A\Gamma$.

13. Στη βάση ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 11$ παίρνουμε σημείο Δ , τέτοιο ώστε να είναι $B\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 7$. Να υπολογίσετε το $A\Delta$ (απ. $A\Delta=10$)

14. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Αν $B\Delta$ είναι το ύψος του, τότε να δείξετε ότι:

i. $A\Delta = \frac{\gamma}{2}$

ii. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$

15. Οι πλευρές ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $AB = 3$ cm, $B\Gamma = 5$ cm, $A\Gamma = 7$ cm.

α) Να δείξετε ότι η γωνία B είναι αμβλεία.

β) Να υπολογίσετε την προβολή $B\Delta$ της πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$.

γ) Να υπολογιστεί σε μοίρες η γωνία του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΟΜΑΔΑΣ

16. Να βρεθεί το είδος των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\alpha^2 = 2\beta^2 + \gamma^2$

ii) $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2$

iii) $\beta^2 < \alpha^2 - \gamma^2$

17. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ (ως προς τις γωνίες του) του οποίου οι πλευρές γ, β, α , είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5 και 6 αντιστοίχως. Αν $A\Delta$ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β , να δείξετε ότι $A\Delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30}$.

18. Να υπολογισθεί η μεγαλύτερη γωνία ενός τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου τα μήκη των πλευρών συνδέονται με τις σχέσεις $\beta = 2\alpha$ και $\gamma = \alpha\sqrt{7}$ (απ. $\hat{\Gamma} = 120^\circ$)

19. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α , προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta = \alpha$. Να υπολογιστεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Delta$ συναρτήσει του α .

$$(\text{απ. } A\Delta = \alpha\sqrt{3})$$

20. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με βάση τη $B\Gamma$. Έστω σημείο E της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $AB^2 = AE^2 + EB \cdot E\Gamma$

21. Για τις βάσεις AB και $\Gamma\Delta$ τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\Gamma\Delta = 2AB$. Να δειχθεί ότι: $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2$

22. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο Δ της ημιευθείας AB , τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$. Αν ΓE κάθετη στην AB και ισχύει $AB = 4BE$, να αποδειχθεί ότι $\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \frac{3}{2}A\Gamma^2$.

23. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$, BE που τέμνονται στο H .

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AEDB$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) Να δείξετε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot BD + A\Gamma \cdot AE$.

24. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $A = B = 90^\circ$. Φέρνουμε τις διαγώνιες $A\Gamma$, $B\Delta$ και ενώνουμε τα μέσα τους E και Z . Να δειχθεί ότι: $\Gamma\Delta^2 = AB^2 + 4EZ^2$.

25. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρνουμε τις κάθετες AZ και ΓE στη διαγώνιο $B\Delta$. Με την υπόθεση ότι η $\Delta K\Delta$ είναι αμβλεία, να αποδείξετε ότι: $A\Delta^2 + B\Gamma^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2 + 2EZ \cdot B\Delta$

26. Σε κύκλο (K, R) παίρνουμε σημείο M μιας χορδής AB . Να δείξετε ότι $KM^2 + MA \cdot MB = R^2$.

27. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 10$, $B\Gamma = 14$ και $A\Gamma = 12$. Να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου BM πάνω στη $B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ' ΟΜΑΔΑΣ

28. Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ όταν ισχύει $AB \cdot A\Delta = AB^2 + A\Delta^2 - A\Gamma^2$

29. Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αν είναι :

$$ΑΓ^2 \cdot ΒΔ^2 = ΑΒ^4 + ΑΔ^4$$

30. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) στο οποίο ισχύει $A = 20^\circ$. Αν $ΑΒ=ΑΓ=β$ και $ΒΓ=α$, να αποδειχθεί ότι $α^3 + β^3 = 3αβ^2$.

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ > ΒΓ$, $ΑΒ + ΒΓ = 13$, $B = 60^\circ$ και $ρ = \sqrt{3}$ όπου $ρ$ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου.

32. Δίνεται τεταρτοκύκλιο ΑΟΒ κέντρου Ο και ακτίνας R. Με κέντρο το Β και ακτίνα R γράψαμε τόξο ΟΓ που τέμνει το τόξο ΑΒ στο Γ. Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου ο οποίος εφάπτεται στο τόξο ΟΓ, στο τόξο ΑΒ και στην ακτίνα ΟΑ.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Αν Η το σημείο τομής των υψών του ΒΕ και ΓΖ, τότε :

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας Α

β) Να αποδείξετε ότι $α^2 = β \cdot ΑΕ + γ \cdot ΑΖ$

γ) Να αποδείξετε ότι $ΒΗ^2 + ΓΗ^2 = 2ΑΗ^2$

34. Στο εσωτερικό ημικυκλίου με διάμετρο $ΑΒ = 2R$ κατασκευάζουμε ημικύκλιο με διάμετρο $ΑΓ = \frac{ΑΒ}{3}$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται των δύο ημικυκλίων και της κάθετης στην ΑΒ στο Γ.