ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^{ο}
ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

✓ *Ορισμός*:
Δύο ευθύγραμμα σχήματα ονομάζονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

❑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

➢ ***(1^{ο} κριτήριο ομοιότητας)***
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

➢ ***(2^{ο} κριτήριο ομοιότητας)***
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

➢ ***(3^{ο} κριτήριο ομοιότητας)***
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

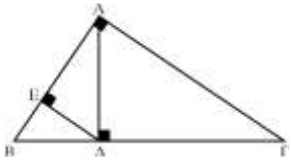
Στις περισσότερες ασκήσεις ομοιότητας τριγώνων μας δίνεται μια σχέση της μορφής α.δ=β.γ και ζητείται να αποδειχθεί. Από αυτή τη σχέση συνήθως σχηματίζουμε τρίγωνα τα οποία αποδεικνύουμε ότι είναι όμοια και στη συνέχεια παίρνουμε την αναλογία των πλευρών και από αυτή προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Τα τρίγωνα από τη ζητούμενη σχέση τα βρίσκουμε παίρνοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα από το πρώτο μέλος και ένα από το δεύτερο μέλος. Αν σε αυτά τα δύο ευθύγραμμα τμήματα συναντάμε τρία μόνο γράμματα διαφορετικά, τότε αυτό είναι το ζητούμενο τρίγωνο. Από τα άλλα δύο ευθύγραμμα τμήματα θα πάρουμε πάλι τα τρία διαφορετικά γράμματα και έχουμε το δεύτερο τρίγωνο. Στις πιο πολλές ασκήσεις συνήθως δείχνουμε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια διαπιστώνοντας ότι έχουν δύο γωνίες ίσες. Στη συνέχεια, παίρνουμε την αναλογία των πλευρών τοποθετώντας σε κάθε λόγο αντίστοιχα τις πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες.

Αν από τη μεθοδολογία που αναφέραμε πιο πριν δεν προκύπτουν τρίγωνα που εμφανώς δεν είναι όμοια τότε συνήθως εφαρμόζουμε δύο συγκρίσεις ομοίων τριγώνων και συνδυάζουμε στη συνέχεια τις αναλογίες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Αν ΑΔ $\perp$ ΒΓ, ΕΔ $\perp$ ΑΒ τότε το τρίγωνο ΑΔΕ

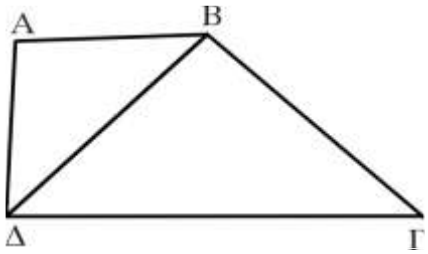


δεν είναι όμοιο με το:

α) ΑΒΓ β) ΑΔΓ γ) ΑΔΒ

δ) ΕΒΔ ε) ΑΕΓ

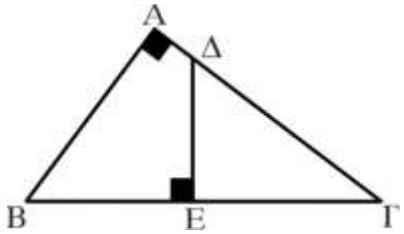
2. Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι όμοια και $A\Delta B = B\Delta\Gamma$. Αν ΔΑ = 4, ΓΔ = 9, τότε η ΒΔ είναι:



α) 5 β) 6 γ) $5\sqrt{3}$

δ) 8 ε) 8 + $\sqrt{3}$

3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (A = 90°), ΔΕ $\perp$ ΒΓ.

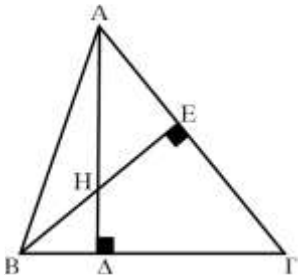


Αν ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και ΔΕ = 4, τότε το ΕΓ ισούται με:

α) $\frac{16}{3}$ β) $\frac{20}{3}$ γ) 5

δ) 6 ε) $\frac{19}{4}$

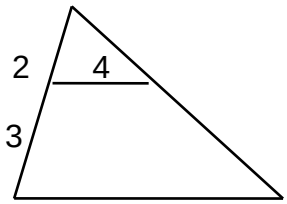
4. Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ΑΔ και ΒΕ είναι ύψη. Το τρίγωνο ΑΗΕ είναι όμοιο με το:



α) ΑΗΓ β) ΔΗΕ γ) ΔΗΒ

δ) ΑΗΒ ε) ΑΒΓ

5. Στο διπλανό σχήμα οι βάσεις των δύο τριγώνων είναι παράλληλες.
Πόσο είναι το x ;

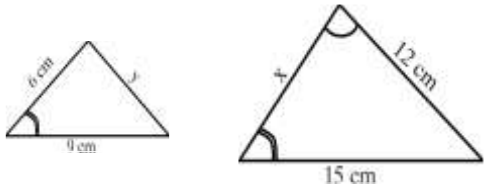


α) 6 β)8 γ)10 δ)12

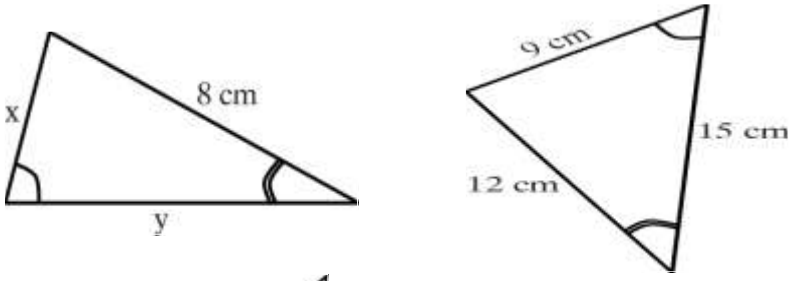
6. Για καθεμιά απ' τις τρεις περιπτώσεις να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

	x	y
(A)		
(B)		
(Γ)		

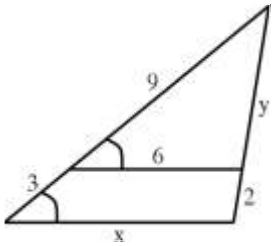
(A)



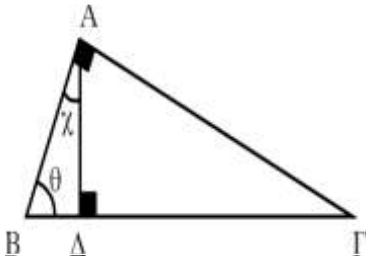
(B)



(Γ)



7. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και ΑΔ ύψος του.



Α. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη θ

Β. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη x

Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ....Α....

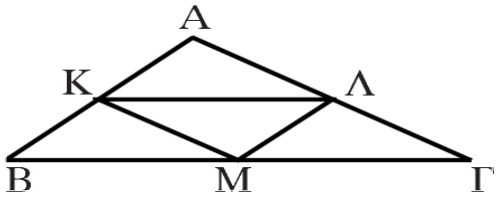
β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ....Β....

γ) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι όμοιο με το ....Γ....

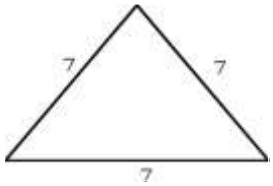
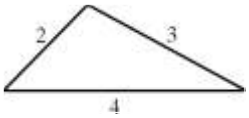
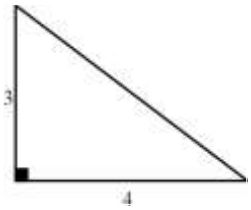
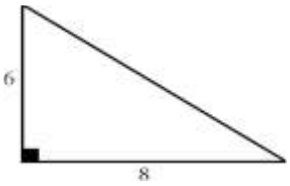
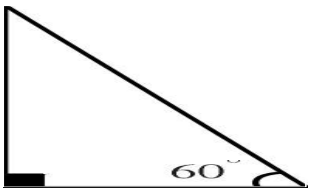
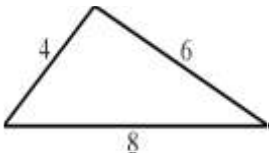
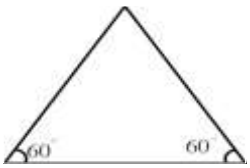
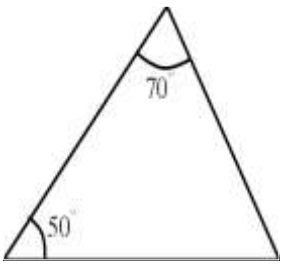
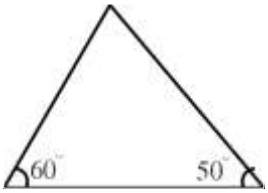
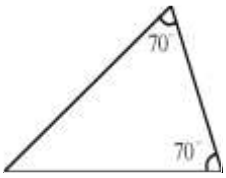
Δ. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες απαντήσεις, συμπληρώστε τις αναλογίες:

8. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές με μήκη 12 cm, 8 cm και 6 cm. Το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ έχει περίμετρο ίση με:

α) 20 cm β) 18 cm γ) 14 cm δ) 13 cm ε) 1



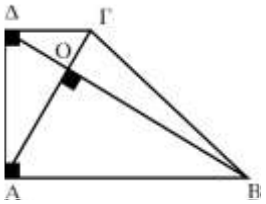
9. Κάθε τρίγωνο της πρώτης στήλης είναι όμοιο με ένα τρίγωνο της δεύτερης στήλης. Συνδέστε με μία γραμμή τα όμοια τρίγωνα:

στήλη (Α)	**στήλη (Β)**
	
	
	
	
	

10. Στο σχήμα είναι: $A = \hat{\Delta} = 90^0$ και ΑΓ ⊥ ΒΔ.

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ....Γ....
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Αποδείξτε ότι ΑΔ^2 = ΑΒ.ΓΔ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑ

1. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (A = 90°) φέρνουμε το ύψος ΑΔ και από το Δ φέρνουμε ΔΕ ⊥ ΑΒ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ^2 = ΑΓ.ΔΕ.

2. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4cm, 5cm και 6cm. Ένα άλλο τρίγωνο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο 45cm. Πόσο είναι το μήκος κάθε πλευράς του δεύτερου τριγώνου;

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως. Αν Ζ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ, αποδείξτε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ). Αν η διάμεσος ΜΝ του τραπεζίου τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, αποδείξτε ότι ΔΕ = ΕΒ.

5. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι όμοια.

β) Το γινόμενο ΒΕ.ΔΖ είναι σταθερό και ίσο με το γινόμενο δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου.

6. Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία ΒΔ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΑΓ στο Δ έτσι ώστε ΓBΔ= A . Να δείξετε ότι ΒΔ^2=ΔΑ.ΔΓ

7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο, δύο διαδοχικές πλευρές του είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τα αντίστοιχα ύψη του.

8. Να αποδείξετε ότι δύο τυχαία ύψη τριγώνου, είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες βάσεις τους.

9. Οι βάσεις ενός τραπεζίου έχουν μήκη α και 3α και οι μη παράλληλες πλευρές β και 3β. Αν οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Μ, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφή το σημείο Μ και βάση τη μεγαλύτερη από τις βάσεις του τραπεζίου.

10. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$ και $A\Gamma \perp B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = AB \cdot \Delta\Gamma$

Β ΟΜΑΔΑ

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=2ΒΓ. Πάνω στην ΑΒ παίρνουμε ένα σημείο Ε τέτοιο ώστε $BE = \frac{1}{2}B\Gamma$. Να δείξετε ότι $B\Gamma E = \Gamma AB$.

12. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο μια κορυφή του και ίχνη των δύο υψών του από τις άλλες κορυφές του σχηματίζουν τρίγωνο όμοιο με το αρχικό.

13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B - \hat{\Gamma} = 90^0$. Αν ΑΔ το ύψος του, δείξτε ότι: $A\Delta^2 = \Delta B.\Delta\Gamma$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΔ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ν, Ρ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{MN}{A\Delta} = \frac{MB}{B\Delta}$ β) $\frac{MP}{A\Delta} = \frac{M\Gamma}{\Delta\Gamma}$ γ) ΜΝ + ΜΡ = σταθερό

15. Σε δύο κυρτά τετράπλευρα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, ΔΆ΄, Α΄Γ΄. Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα είναι όμοια.

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=8, ΒΓ=6 και ΑΓ=4. Φέρνουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου και την εφαπτομένη του στο Α που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Δ. να βρείτε τα μήκη των ΑΔ και ΓΔ.

17. Από σημείο Α εκτός κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΑΓ και μια τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου. Να δείξετε ότι:
i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΒ έχουν ανάλογες πλευρές.
ii) $B\Delta \cdot \Gamma E = BE \cdot \Gamma\Delta$

18. Θεωρούμε μια χορδή ΔΕ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ η οποία είναι παράλληλη προς την ΒΓ. Αν η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $A\Delta \cdot AZ = AB \cdot A\Gamma$

19. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με ΒΓ=8.Σημείο Ε της ΑΓ τέτοιο ώστε $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ και σημείο Δ της ΒΕ τέτοιο ώστε $\Gamma\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{E}\Delta$.Αν ΒΔ=2 να υπολογιστεί το μήκος της ΑΒ.

20. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΔ=ΒΓ. Να δείξετε ότι:
i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΑΔ είναι όμοια.
ii) $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha\gamma$

21. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ,Λ είναι σημεία της υποτείνουσας ΒΓ και Μ,Ν σημεία των πλευρών ΑΓ,ΑΒ αντίστοιχα, τετιοα ώστε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο, τότε να αποδείξετε ότι $K\Lambda^2 = KB \cdot \Lambda\Gamma$

Γ ΟΜΑΔΑ

22. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε σημείο της ΑΔ έτσι ώστε ΑΕ=2ΕΔ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στις βάσεις που τέμνει την ΒΓ στο Ζ. Δείξτε ότι ΕΖ= $\frac{2\Gamma\Delta + AB}{3}$.

23. Σε κύκλο με διάμετρο ΑΔ φέρνουμε την εφαπτομένη στο Δ και δύο χορδές ΑΒ και ΑΓ οι προεκτάσεις των οποίων τέμνουν την εφαπτομένη στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ΑΒ·ΑΕ=ΑΓ·ΑΖ

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσός του ΑΜ και σημείο Δ της ΑΓ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{M}A = \hat{B}$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη της ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΜ στο Ζ.
(i) Να δείξετε ότι ΕΖ=ΖΔ

(ii) Να δείξετε ότι ΖΔ^2=ΖΑ·ΖΜ

25. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (A =90^{ο}) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει το ΑΔ στο Ζ και η διχοτόμος της ΔAB τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη με την ΑΒ.

26. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A > 90^0$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,ρ) και σημείο Δ του κύκλου (Ο,ρ) τέτοιο ώστε ΒΓ=ΒΔ. Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΑΔ και Ζ το σημείο τομής της ΑΒ με την διχοτόμο της γωνίας ΑEΒ, να αποδειχθεί ότι η ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΓΒ.

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.Παίρνουμε ένα εσωτερικό σημείο Ε της ΒΓ και προεκτείνουμε την ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ=ΓΕ.Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι $\frac{Z\Delta}{ZE} = \frac{B\Gamma}{AB}$

28. Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και ΜΔ,ΜΕ οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $M\Delta \cdot AB = ME \cdot A\Gamma$

29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ$\neq$ΑΓ, φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ, τη ΒΕ κάθετη στην ΑΔ και την ΓΗ κάθετη στην ΑΔ. Να δείξετε ότι $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AH} = \frac{2}{A\Delta}$