

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ii) \eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$$

$$iii) 2\eta\mu x = \sqrt{3}$$

$$iv) \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$$

$$v) \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$vi) \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 2x = -1$$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \epsilon\phi x = -\sqrt{3}$$

$$ii) \epsilon\phi(-x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$iii) \sigma\phi x = 1$$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) \eta\mu(x + 60^\circ) = -1$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu(2x - 45^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma) \epsilon\phi(x - 20^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\delta) \eta\mu(x - 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu(x + 20^\circ)$$

$$\epsilon) \epsilon\phi(2x - \frac{\pi}{3}) = \sigma\phi(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sigma\tau) \sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3}) = -\eta\mu x$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x}$$

$$\beta) \sigma\phi x + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 2$$

$$\gamma) 1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

$$\delta) 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3}\epsilon\phi x + \sigma\phi x$$

$$\epsilon) 2\eta\mu^2 x - 7\eta\mu x + 3 = 0$$

$$\sigma\tau) 3\eta\mu x + \eta\mu^2 x = 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \eta\mu \frac{x}{2} = \sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu(x + \frac{\pi}{3})$$

$$\gamma) \sigma\phi x = \epsilon\phi(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\delta) \eta\mu(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\epsilon) \sigma\upsilon\nu(2x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\sigma\tau) \epsilon\phi(\frac{x}{5}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$ii) \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$iii) \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$$

$$iv) \sqrt{3} - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (2 - \eta\mu x)(2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}) = 0$$

$$ii) (2\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}) = 0$$

$$iii) \epsilon\phi x(\epsilon\phi^2 x - 1) = 0$$

$$iv) (\sigma\phi^2 x - 3)(2\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$$

8. Να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ τις εξισώσεις :

$$\alpha) (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 - \eta\mu x) = 0$$

$$\beta) (2\eta\mu x + \sqrt{2})(1 + \sigma\upsilon\nu x) = 0$$

$$\gamma) (\sqrt{3} - \epsilon\phi x)(1 + \epsilon\phi x) = 0$$

$$\delta) (2\sigma\upsilon\nu x - 1)(1 + \epsilon\phi x)\eta\mu x = 0$$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \eta\mu^2 x = 3\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\beta) \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$

$$\gamma) \eta \mu x + \sigma \nu x = 0$$

$$\delta) \eta \mu^4 x = \eta \mu x$$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) 2\eta \mu^2 x + 1 = 3\eta \mu x$$

$$iii) 3\eta \mu^2 x + 4\sigma \nu x = 3$$

$$v) \eta \mu^4 x + \sigma \nu^4 x = \frac{1}{2}$$

$$vii) \eta \mu^3 x + \sigma \nu^3 x = \eta \mu x$$

$$ii) 2\sigma \nu^2 x + 1 = -3\sigma \nu x$$

$$iv) 6\eta \mu^2 x = 5 - \sigma \nu x$$

$$vi) 4\sigma \nu^2 x - (2 + 2\sqrt{3})\sigma \nu x + \sqrt{3} = 0$$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \eta \mu \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sigma \nu \frac{5\pi}{6}$$

$$iii) \sigma \nu \left(\frac{7\pi}{5} - x \right) = \sigma \nu \left(\frac{2\pi}{3} + 3x \right)$$

$$v) \eta \mu \left(2x + \frac{\pi}{5} \right) = \sigma \nu \frac{\pi}{5}$$

$$vii) \eta \mu \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sigma \nu \left(\frac{\pi}{6} + x \right)$$

$$ii) \eta \mu \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \eta \mu \frac{2\pi}{3}$$

$$iv) \eta \mu \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \eta \mu \left(\frac{3\pi}{4} + 2x \right)$$

$$vi) \sigma \nu \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -\eta \mu \left(5x - \frac{\pi}{6} \right)$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) 2\eta \mu x \cdot \sigma \nu x = \sqrt{2} \cdot \sigma \nu x$$

$$iii) 2\eta \mu^3 x = \eta \mu x$$

$$ii) 2\eta \mu x \cdot \sigma \nu x = \sqrt{3} \cdot \eta \mu x$$

$$iv) 4\sigma \nu^3 x = 3\sigma \nu x$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \eta \mu^2 x + 5\sigma \nu^2 x = 4$$

$$\gamma) \frac{1}{\sigma \nu^2 x} = 4 + 2\epsilon \phi x$$

$$\epsilon) \sqrt{3}\sigma \nu^2 x + \eta \mu x \sigma \nu x = 0$$

$$\beta) \epsilon \phi x \cdot \sigma \phi 2x = 1$$

$$\delta) 2\eta \mu^2 x + \sqrt{2}\sigma \nu x = 2$$

$$\sigma \tau) \eta \mu x \sigma \nu x + \eta \mu x = \eta \mu^2 x + \sigma \nu x$$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \eta \mu x = -\eta \mu 25^\circ$$

$$\gamma) 3\eta \mu x + 5 = 0$$

$$\epsilon) \sigma \nu x = -\sigma \nu 30^\circ$$

$$\zeta) 2\eta \mu^2 x - 3\eta \mu x + 1 = 0$$

$$\theta) \sigma \nu^2 x - 4\sigma \nu x - 5 = 0$$

$$i\alpha) \eta \mu x = 2\epsilon \phi x$$

$$\beta) \eta \mu x = \eta \mu (2x + 20^\circ)$$

$$\delta) \sigma \nu (x + 50^\circ) = \eta \mu (x + 20^\circ)$$

$$\sigma \tau) \sigma \phi^2 x - 1 = 0$$

$$\eta) 2\eta \mu^2 \theta = 3(1 - \sigma \nu \theta)$$

$$i) 2\sigma \nu x = \sigma \nu^2 x$$

$$i\beta) 16\sigma \nu^4 x - 25\sigma \nu^2 x + 9 = 0$$

15. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$i) \eta \mu^2 x = 1 + \sigma \nu^2 x$$

$$ii) \eta \mu x \cdot \epsilon \phi x = \frac{3}{2}$$

$$iii) \epsilon \phi x = 2\eta \mu x$$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) \eta \mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi)$$

ii) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $[2\pi, 4\pi]$

iii) $\eta\mu 2x = \sin 3x$ όταν $|x| < \pi$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|\sin x| = |\eta\mu x|$

ii) $\left| \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \right| = \frac{1}{2}$

iii) $(1 + \sin x) \left(\frac{1}{\eta\mu x} - 1 \right) = 0$

iv) $(1 + \sin x) \operatorname{εφ} \frac{x}{2} = 0$

18. Να λυθεί η εξίσωση $\operatorname{εφ} x \cdot \operatorname{εφ} \frac{1}{x} = 1$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -1 + 2\sin \omega x$, $\omega \neq 0$. Να βρείτε :

i) τον τύπο της, αν η περίοδος της είναι 6π ,

ii) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της,

iii) τις τιμές του x για τις οποίες η συνάρτηση f παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - 3\eta\mu 3x$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$.

ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

iii) Όταν $0 < x < 2\pi$, να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$.

21. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \eta\mu \left(\frac{\pi}{3} - 2\omega x \right) \text{ και } g(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3\omega x \right), \omega \neq 0$$

Αν η περίοδος της f είναι $\frac{\pi}{2}$, ενώ της g είναι $\frac{\pi}{3}$:

i) να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g ,

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων τους, το

οποίο βρίσκεται στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$, είναι το $\left(\frac{7\pi}{30}, -\eta\mu \frac{2\pi}{5} \right)$

22. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της

συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A \left(-\frac{\pi}{6}, -3 \right)$, $B(0, 0)$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β .

β) Να προσδιορίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδό της.

γ) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της f χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση του ημιτόνου και να αιτιολογήσετε συνοπτικά την απάντησή σας.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = 6$.

23. i) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} + 10\pi\kappa\right) = 1, \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 3\eta\mu 5x - (1 - \eta\mu x)^2$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x + 3\eta\mu 5x - 5$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

X	0°	30°	45°	60°	90°
Ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Συνx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
σφx	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0