

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας :

i) 1845° ii) -2400° iii) $\frac{221\pi}{4} \text{ rad}$ iv) 1950° v) $-\frac{43\pi}{3} \text{ rad}$

2. Δίνεται ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 75°

3. Αν είναι γνωστό ότι $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\frac{11\pi}{8}$

4. Αν $\varepsilon\phi 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$, να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 108°

5. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι :

i) $\sigma\upsilon\nu[2(B+\Gamma)] = \sigma\upsilon\nu(2A)$ ii) $\eta\mu(B-\Gamma) = \eta\mu(A+2\Gamma)$

iii) $\sigma\upsilon\nu\left[\frac{3}{2}(A+B)\right] + \eta\mu\left(\frac{3}{2}\Gamma\right) = 0$

6. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι :

i) $\varepsilon\phi \frac{A+\Gamma}{2} = \sigma\phi \frac{B}{2}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2(B+\Gamma)}, \hat{A} \neq 90^\circ$

iii) $\eta\mu^2 \frac{A}{2} = \frac{\sigma\phi^2\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}{1+\sigma\phi^2\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)}$

7. Αν $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι :

i) $\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta$

ii) $\eta\mu^2(\pi - \alpha) + \eta\mu^2(\pi + \beta) = 1$

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $\hat{A} = 90^\circ$, ισχύει $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 45^\circ$. Να αποδειχτεί ότι

$$\frac{\varepsilon\phi(5\Gamma - 4B)}{\sigma\phi(4B - 5\Gamma)} = -\frac{\gamma^2}{\beta^2}.$$

9. Να αποδείξετε ότι :

i) $\varepsilon\phi 1^\circ \cdot \varepsilon\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\phi 45^\circ \cdot \varepsilon\phi 91^\circ \cdot \varepsilon\phi 92^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\phi 135^\circ = -1$

ii) $\sigma\phi 1^\circ \cdot \sigma\phi 2^\circ \cdot \dots \cdot \sigma\phi 89^\circ = 1$

10. Να εκφραστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $7\pi+\theta, \theta-\frac{9\pi}{2}, -\theta-9\pi$ και $\frac{15\pi}{2}+\theta$ σε σχέση με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

11. Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)-\eta\mu\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)=\frac{1}{2}$, να υπολογιστεί η παράσταση $A = \varepsilon\phi^2 x + \sigma\phi^2 x$.

12. Να αποδείξετε ότι :

$$i) \eta\mu(\pi-x) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) + \eta\mu(x-\pi) - \eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$ii) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \eta\mu(\pi-\alpha) - \eta\mu(-\alpha) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = 0$$

13. Αν $\theta = \frac{19\pi}{4}$ και $x = \frac{29\pi}{4}$, να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = 2\varepsilon\phi\theta - 3\sigma\phi x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 \theta \quad \text{και} \quad B = 2\sigma\phi\theta + \varepsilon\phi x - \eta\mu^2 \theta - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

14. Να υπολογιστεί η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{8}-x\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{8}+x\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$

15. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \frac{\sigma\upsilon\nu(3\pi+x) \cdot \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sigma\phi(7\pi-x)}{\eta\mu(9\pi-x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \varepsilon\phi\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)}$

16. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις :

$$A = \frac{\eta\mu^3(x-270^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ-x)}{\varepsilon\phi^3(x-90^\circ) \sigma\upsilon\nu^3(x-270^\circ)}$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \varepsilon\phi(\pi-\alpha)}{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \eta\mu(\pi-\alpha)}$$

$$\Gamma = \frac{-\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu(2\pi-\beta) \cdot \varepsilon\phi(\pi-\alpha)}$$

$$\Delta = \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha) \cdot \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)}$$

17. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\varepsilon\phi\left(x-\frac{5\pi}{2}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) - \eta\mu^3\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \varepsilon\phi\left(\frac{11\pi}{2}+x\right)} = \eta\mu^2 x$

18. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\varepsilon\phi(180^\circ - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(540^\circ - \alpha) \cdot \varepsilon\phi(450^\circ - \alpha)}{\eta\mu(90^\circ + \alpha) \cdot \sigma\phi(810^\circ - \alpha) \cdot \varepsilon\phi(\alpha - 270^\circ)}$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu(3\pi - x) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)}{4\eta\mu(7\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x - 4\pi)}$$

19. Αν $\sigma\phi\left(\frac{7\pi}{32} - \alpha\right) + \sigma\phi\left(\frac{9\pi}{32} + \alpha\right) = 3$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \varepsilon\phi^2\left(\frac{7\pi}{32} - \alpha\right) + \varepsilon\phi^2\left(\frac{9\pi}{32} + \alpha\right)$$

20. Αν $\varepsilon\phi\left(\frac{5\pi}{16} - x\right) + \varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{16} + x\right) = 2$, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = \sigma\phi^2\left(\frac{5\pi}{16} - x\right) + \sigma\phi^2\left(\frac{3\pi}{16} + x\right) \quad \text{και} \quad B = \varepsilon\phi^2\left(\frac{5\pi}{16} - x\right) + \varepsilon\phi^2\left(\frac{3\pi}{16} + x\right)$$

21. Να αποδειχτούν οι ισότητες :

$$i) 6\varepsilon\phi(\pi + x) + 3\sigma\phi\left(\frac{43\pi}{2} - x\right) - 43\varepsilon\phi(21\pi - x) = 52\varepsilon\phi x$$

$$ii) \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right)}{\varepsilon\phi\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \varepsilon\phi(3\pi + \alpha)} = \eta\mu^2\alpha$$

22. Να αποδειχτεί ότι : $\frac{\eta\mu(180^\circ - \alpha)\eta\mu(270^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \alpha)\varepsilon\phi(90^\circ - \alpha)}{\eta\mu(90^\circ + \alpha)\eta\mu(360^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)\varepsilon\phi(270^\circ + \alpha)} = 1$.

23. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu 675^\circ \cdot \eta\mu 390^\circ + \sigma\upsilon\nu 420^\circ \cdot \eta\mu 675^\circ}{\varepsilon\phi 30^\circ + \sigma\phi 210^\circ}$$

$$B = \frac{\eta\mu 855^\circ \cdot \sigma\phi 585^\circ - \sigma\upsilon\nu 855^\circ \cdot \varepsilon\phi 585^\circ}{\sigma\upsilon\nu 855^\circ + \eta\mu 585^\circ}$$

24. Να αποδείξετε ότι : $0 < \frac{\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sigma\phi(\pi - x)}{\sigma\phi(\pi + x) - \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} > 2$

25. Να αποδειχτεί ότι : $\frac{\varepsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha)} - \frac{\varepsilon\phi\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu(\pi + \alpha)\eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\eta\mu^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 0$.

26. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{\sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\sigma\upsilon\nu 300^\circ} - \frac{\epsilon\varphi 210^\circ \epsilon\varphi 315^\circ}{\sigma\upsilon\nu 180^\circ}$.

27. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$A = 2\eta\mu^2\left(\frac{17\pi}{4}\right) + \epsilon\varphi^2\left(\frac{33\pi}{4}\right) \sigma\varphi \frac{3\pi}{4} \quad B = \frac{\epsilon\varphi(-150^\circ) \sigma\upsilon\nu(-210^\circ) \sigma\upsilon\nu(-60^\circ)}{\sigma\varphi(-240^\circ) \eta\mu(-330^\circ)}$$

28. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$\frac{\eta\mu^3\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu(2\pi - \alpha) \eta\mu\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right)}{\epsilon\varphi^3\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu^3\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{\sigma\varphi(\pi - \alpha) \sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right)}{\epsilon\varphi\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \eta\mu^2(5\pi + \alpha)}$$

29. Να αποδειχτεί ότι :

$$\frac{\eta\mu^2(-212^\circ) \sigma\upsilon\nu(302^\circ) + \sigma\upsilon\nu^3(148^\circ)}{\eta\mu(-58^\circ) \sigma\upsilon\nu 32^\circ + \eta\mu 392^\circ \eta\mu 148^\circ - \eta\mu 58^\circ \eta\mu 148^\circ} = \sigma\upsilon\nu 32^\circ - \eta\mu 32^\circ$$

30. Έστω $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}$. Αν $x = \frac{\eta\mu^2(180^\circ + \alpha) + \epsilon\varphi^2(90^\circ - \alpha) + \eta\mu^2(\alpha - 90^\circ)}{\sigma\upsilon\nu^2(90^\circ + \alpha) + \sigma\varphi^2(270^\circ + \alpha) + \eta\mu^2(270^\circ - \alpha)}$
να υπολογίσετε την τιμή του α .

31. Αν $0 < \alpha < 90^\circ$ και $0 < \beta < 90^\circ$, να αποδειχτεί ότι :

$$\frac{\eta\mu(270^\circ - \alpha) \epsilon\varphi(180^\circ - \beta) \sigma\varphi(90^\circ - \alpha)}{\epsilon\varphi(180^\circ + \alpha) \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) \epsilon\varphi(-\beta)} + \frac{\sigma\varphi(90^\circ + \alpha) \eta\mu(\beta - 90^\circ)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \beta) \epsilon\varphi(-\alpha)} = 2$$

32. Αν $0 < \alpha < 90^\circ$, να αποδειχτεί ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \alpha) \epsilon\varphi(810^\circ + \alpha) \eta\mu(1710^\circ - \alpha) \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu(270^\circ + \alpha) \epsilon\varphi(540^\circ - \alpha) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha) \eta\mu\alpha} = -1$