

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = 17 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 19 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 5 \\ \frac{15}{y} - \frac{12}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{2}{a} + \frac{5}{\beta} = 5 \\ \frac{1}{a} - \frac{7}{\beta} = 12 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{3}{\gamma} + \frac{2}{\delta} = 12 \\ \frac{4}{\gamma} + \frac{3}{\delta} = 17 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 20 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

2. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2|x| - 3|y| = 2 \\ -|x| - 2|y| = -8 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 23 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 7 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases}$$

3. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ y - x = 41 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \sqrt{x^2} + y = 5 \\ y^2 - x = 7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ xy = 36 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} 2x^2 - \frac{9}{y+1} = 15 \\ 3x^2 - \frac{24}{y+1} = 19 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3\sqrt{x-2} + 2\sqrt{3-y} = 7 \\ -5\sqrt{x-2} + \sqrt{3-y} = -3 \end{cases}$$

5. Αν $x + y + xy = 5$ και $x^2y + xy^2 = 6$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $B = x^2 + y^2$

6. Δίνονται οι επόμενοι αριθμοί : $\alpha = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ και $\beta = \frac{\left\{ \left[(5^3)^{12} : 5^{25} \right] - 5^2 \right\} : 50}{\left[(4 + 8^{26} : 4^{39}) : 5 \right] \cdot 4}$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

β) Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \beta x - y = 0 \end{cases}$

$$7. \text{ Δίνεται η ορίζουσα } \alpha = \begin{vmatrix} \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}} & \sqrt{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})} \end{vmatrix}$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας α

β) Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \lambda y = \mu + \alpha \\ 2\alpha x + (\mu + 5)y = 3\lambda - 5 \end{cases}$, όπου α η ορίζουσα του ερωτήματος α)

8. Η εξίσωση $2x^2 + (\mu - 3)x + 5\lambda + 3\mu = 0$ έχει 2 ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει $x_1 + x_2 = 5$ και $x_1 \cdot x_2 = 6$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση

9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - \mu x^2 + 2\lambda x + 2\mu - 3\lambda$ διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$ και $B(-1,12)$. Να βρείτε :

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $M(1,-5)$ και $N(3,7)$. Να βρείτε

α) τις τιμές των β και γ

β) την κορυφή της C_f

γ) τα διαστήματα για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'

11. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι :

$$\begin{cases} p(A) + p(B') = \frac{11}{12} \\ p(A') - p(B) = \frac{5}{12} \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $p(A)$, $p(B)$, $p(A')$ και $p(B')$

β) Επιπλέον γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A και να μην πραγματοποιηθεί το B είναι ίση με $\frac{1}{12}$.

ι) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B

ii) Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} p(A \cup B) \cdot (x+5) = 8 - p[(A-B) \cup (B-A)] \cdot (y-1) \\ \frac{y + p(\Omega)}{2} = \frac{28}{3} - \frac{x + p(\emptyset)}{3} \end{cases}$$

12. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) και το σύστημα : $\begin{cases} y(1-x) = 5 - x(y-1) \\ (x+2)^2 - y(y-1) = x^2 + 6 - (y+1)^2 \end{cases}$ το

οποίο έχει τη λύση $(x,y) = (a_5 + a_7, a_{12} + 2a_4)$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (a_n)

β) Να βρείτε ποιος όρος της (a_n) ισούται με 500

γ) Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} 15(3x - 2y) - \alpha_{13}(2x - y - 6) = S_{15} \\ x - \frac{y - x + \alpha_6}{2} = 1 + \frac{3y}{4} \end{cases}, \text{όπου } S_{15} \text{ το άθροισμα των πρώτων 15 όρων της } (\alpha_n)$$

13. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda - 1)x + \lambda y = -2 \\ \lambda x + (\lambda - 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$ το οποίο έχει ορίζουσα D. Επίσης η εξίσωση

$$x^2 - (D + 5)x + 4(D + 1) = 0 \text{ έχει μία διπλή ρίζα}$$

α) Να βρείτε την ορίζουσα D και τη διπλή ρίζα της εξίσωσης

β) να λύσετε το σύστημα

14. Δίνεται ο δειγματικός χώρος : $\Omega = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

$$\text{Θεωρούμε το σύστημα } \begin{cases} \lambda x - (2\lambda + 1)y = 1 \\ (\lambda - 2)x + (\lambda^2 + 2)y = \lambda - 2 \end{cases}.$$

και τα ενδεχόμενα

- $A = \{\lambda \in \Omega / \text{το σύστημα } (\Sigma) \text{ έχει μοναδική λύση}\}$
- $B = \{\lambda \in \Omega / \text{το σύστημα } (\Sigma) \text{ είναι αδύνατο}\}$

Να βρείτε τις πιθανότητες $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$ και $p(A' - B)$

15. Για τις ορίζουσες D, D_x και D_y ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, ισχύουν οι σχέσεις:

$$D + D_x = 2$$

$$D_x + D_y = -2 \text{ .Να βρείτε τη λύση } (x, y) \text{ του γραμμικού συστήματος}$$

$$D_y + D = -8$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1, -5)$ και τέμνουν τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2. Επιπλέον ισχύει $f(-3) - f(0) = 3$. Να βρείτε :

α) τις τιμές των α, β, γ

β) τις συντεταγμένες της κορυφής της C_f

γ) τα διαστήματα μονοτονίας της f

δ) το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = 6, f(-1) = -8 \text{ και } f(-2) = 12.$$

α) τις τιμές των α, β, γ

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x - 1) \leq -20$

18. Η εξίσωση : $x^2 + (\lambda + \mu)x + \mu - \nu = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 . Ισχύουν οι σχέσεις :

$$x_1 + x_2 = -3, x_1 \cdot x_2 = -2 \text{ και } x_1^2 + x_2^2 = -3\lambda + \mu + \nu .$$

Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ και ν

19. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι :

$$\begin{cases} p(A) + p(B) + 2p(A \cap B) = 2 \\ p(A) + 2p(B) - 2p(A \cap B) = 1 \\ p(A \cup B) = \frac{7}{8} \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$

β) Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} x + y = p(A') \\ y + \omega = p(B - A) \\ \omega + x = p[(A - B) \cup (B - A)] \end{cases}$$

20. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 2x + y = -7 \\ 7x + 2y = -11 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τη λύση (x_0, y_0) του συστήματος

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ έχει κορυφή το σημείο $K(x_0, y_0)$

i) να βρείτε τους αριθμούς β και γ

ii) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$

iii) να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ x + y = -6 \end{cases}$

21. Το σύστημα $\begin{cases} (\lambda + 1)x + 8y = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda + 3)y = 3\lambda - 1 \end{cases}$ έχει τη μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει

$$x_0 + y_0 = 1.$$

α) Να βρείτε τον αριθμό λ

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\lambda x^2 + 2\lambda x + 6$

i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον χ'

ii. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} y = f(x) \\ 2y + f(x-1) = 10x \end{cases}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

22. Να βρεθούν τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x + 2$

23. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η παραβολή $y = x^2$ και η ευθεία $y = x + \mu$ έχουν :

i) ένα κοινό σημείο ii) δύο κοινά σημεία iii) δεν έχουν κοινά σημεία

24. Μια επιχείρηση καταθέτει 3500€ σε δύο τράπεζες, στην Α με

επιτόκιο 6% και στην Β με επιτόκιο 8%. Αν ο συνολικός ετήσιος τόκος

είναι 250€ να βρείτε το ποσό που κατέθεσε σε κάθε τράπεζα.

25. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, η εξωτερική της γωνίας $\hat{A}$ είναι 120° και η διαφορά των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι 30° . Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.
26. Το άθροισμα δύο ακεραίων είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς
27. Μία τάξη έχει 34 μαθητές. Σήμερα, που είναι παρόντες στην τάξη τα $\frac{3}{4}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών, ο αριθμός των αγοριών είναι ίσος με τον αριθμό των κοριτσιών. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη.
28. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 48cm, Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μια πλευρά κατά 5 cm και την άλλη κατά 1 cm, τότε το εμβαδόν του αυξάνει κατά 65 cm^2 . Να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.
29. Διαθέτουμε 60 χαρτονομίσματα των 5€, 10€ και 20€ συνολικής αξίας 800€. Τα χαρτονομίσματα των 5€ και των 10€ μαζί είναι ίσα σε πλήθος με τα χαρτονομίσματα των 20€. Να βρείτε πόσα είναι τα χαρτονομίσματα των 5€, πόσα είναι των 10€ και πόσα των 20€.
30. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε νωρίτερα
31. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,6)$ και $B(3,-4)$.
32. Σε ένα σύμπλεγμα αγαλμάτων που απεικονίζονται ο Ζήθος, ο αδελφός του Αμφίονας και η μητέρα τους, υπάρχει επιγραφή που δίνει την παρακάτω πληροφορία για την αξία των τριών αγαλμάτων με τα λόγια του Ζήθου:
 <<Εγώ, ο αδελφός μου και η μητέρα μου μαζί κοστίσαμε 26 μνας, ενώ εγώ και ο αδελφός μου μαζί 20 μνας. Αν πάρεις το $\frac{1}{3}$ της δικής μου αξίας και το $\frac{1}{4}$ της αξίας του Αμφίονα, θα έχεις την αξία του αγάλματος της μητέρας μας.>>
 Πόσο κόστισε καθένα από τα τρία αγάλματα;
 Να βρεθεί ένας τριψήφιος φυσικός αριθμός αν :
- Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 21
 - Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9, στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του
 - Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90, στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του