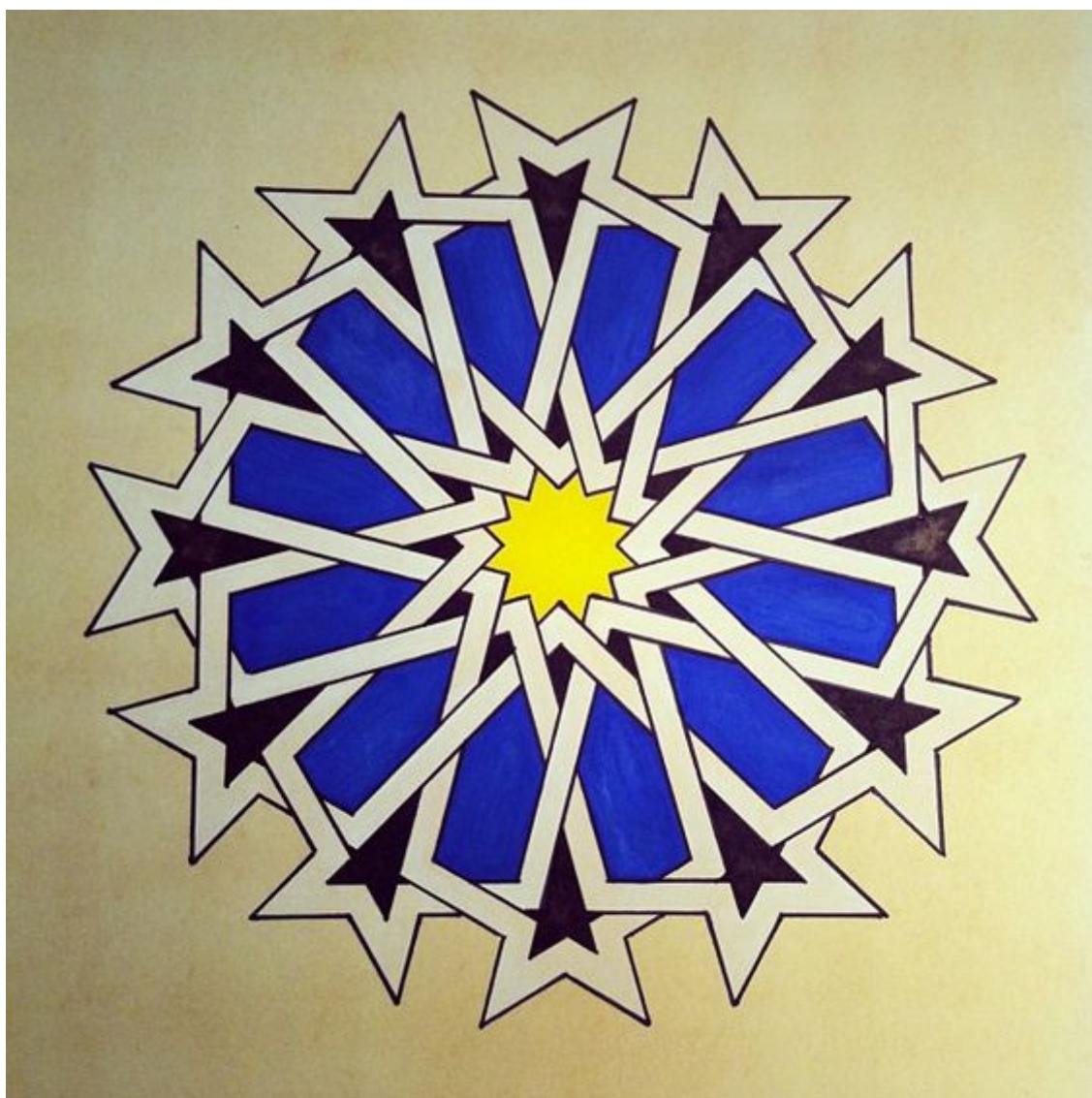


# 3<sup>ο</sup> Λύκειο Αιγάλεω



Μαθηματικά Β' Λυκείου  
2022

Κ. Αδαμόπουλος

*....Η ψυχή του ανθρώπου γίνεται παντοδύναμη,  
όταν συνεπαρθεί από μια μεγάλη ιδέα.  
Τρομάξεις όταν ύστερα από πικρές δοκιμασίες,  
καταλάβεις πως μέσα μας υπάρχει μια δύναμη  
που μπορεί να ξεπεράσει τη δύναμη του ανθρώπου  
τρομάξεις γιατί από τη στιγμή που θα καταλάβεις  
πως υπάρχει η δύναμη αυτή δεν μπορείς πια  
να βρεις δικαιολογίες  
για τις ασήμαντες ή αναντρες πράξεις σου,  
για τη ζωή σου τη χαμένη,  
ρίχνοντας το φταίξιμο στους άλλους  
ξέρεις πια πως εσύ , όχι η τύχη, όχι η μοίρα,  
μήτε οι άνθρωποι γύρα σου , εσύ μονάχα έχεις,  
ό,τι κι αν κάνεις, ότι κι αν γίνεις  
ακέραιη την ευθύνη.  
Και ντρέπεσαι τότε να γελάς, ντρέπεσαι να περγελάς  
αν μια φλεγόμενη ψυχή ζητάει το αδύνατο.  
Καλά πια καταλαβαίνεις πως αυτή είναι η αξία του  
ανθρώπου:  
να ζητάει και να ξέρεις πως ζητάει το αδύνατο  
και να' ναι σίγουρος πως θα το φτάσει,  
γιατί ξέρει πως αν δεν λιποψυχήσει  
αν δεν ακούσει τι του κανοναρχάει η λογική,  
μα κρατάει με τα δόντια την ψυχή του  
κι εξακολουθεί με πίστη,  
με πείσμα να κυνηγάει το αδύνατο,  
τότε γίνεται το θάμα,  
που ποτέ ο αφτέρουγος κοινός νους  
δε θα μπορούσε να το μαντέψει:  
το αδύνατο γίνεται δυνατό.*

**Νίκος Καζαντζάκης**

**(Από τον πρόλογο του "Καπετάν Μιχάλη" )**

## Von armen B.B.

Εγώ ο Μπέρτολτ Μπρέχτ , είμαι απ' τα μαύρα δάση .  
Στις πολιτείες μ'έφερε η μητέρα μου  
σαν ήμουν μέσα στο κορμί της . Κι η παγωνιά του δάσους  
θα μείνει εντός μου ως τη στερνή τη μέρα μου .

Την πολιτεία της ασφάλτου νιώθω σπίτι μου . Απ' την αρχή  
με όλα τα άχραντα μυστήρια εφοδιασμένος :  
Μ' εφημερίδες . Με καπνό . Και με κονιάκ .  
Τεμπέλης και καχύποπτος και τελικά ευχαριστημένος .

Με τους ανθρώπους είμαι πάντα φιλικός .  
Φοράω σκληρό καπέλο αφού έτσι είν' ο συρμός τους .  
Λέω: Είναι ζώα που παράξενα μυρίζουν .  
Και λέω πάλι : Δε βαριέσαι είμαι όμοιός τους .

.....

Γενιά ελαφρόμυαλη , στρωθήκαμε σε σπίτια  
που λέγαμε πως θα κρατήσουνε παντοτινά.  
Έτσι χτίσαμε τα ψηλά σαρδελοκούτια του Μανχάτταν  
και τις λιγνές κεραίες που ο Ατλαντικός αναγελά .

Από τις πολιτείες αυτές δε θ' απομείνει  
παρά ό,τι ανάμεσά τους πέρασε : ο άνεμος  
Χαρά δίνει το σπίτι στο φαγά : κι αυτός τ' αδειάζει μονομιάς .  
Ξέρουμε δα πως είμαστε περαστικοί  
και τίποτ' αξιομνημόνευτο δε θα' ρθει έπειτ' από μας .

Στους σεισμούς που θε να 'ρθούν , ελπίζω  
να μην αφήσω το πούρο μου να σβήσει απ' τον καημό μου .  
Εγώ ο Μπέρτολτ Μπρεχτ , στις πολιτείες της ασφάλτου  
ξεβρασμένος  
από τα μαύρα δάση μες τη μάνα μου πριν απ' τον καιρό μου .

**Bertolt Brecht**

## Συστήματα εξισώσεων

«Μην εκτιμάς το χρήμα ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο απ' ό,τι του αξίζει. Είναι πολύ καλός υπηρέτης, αλλά πολύ κακός αφέντης». Αλέξ. Δουμάς  
Λύστε γραφικά τα συστήματα:

**BA/01.** A)  $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$  B)  $\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$  Γ)  $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$

Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα:

**BA/02.** A)  $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$  B)  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$  Γ)  $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$

Δ)  $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$  E)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$  ΣΤ)  $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + y = -3 \end{cases}$  Ζ)  $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

**BA/03.** A)  $\begin{cases} 3(x + y) + 2(y - x) = 7 \\ 5(x - y) + 3(x + y) = 14 \end{cases}$  B)  $\begin{cases} 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \\ 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + 10 \end{cases}$

Γ)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{x+3}{5} + \frac{y+1}{2} = 3 \end{cases}$  Δ)  $\begin{cases} \frac{x+2}{3} + \frac{y+1}{2} = y+1 \\ \frac{x-1}{3} + y = x \end{cases}$

E)  $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x + 6y = 7 \end{cases}$  ΣΤ)  $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$

Ζ)  $\begin{cases} 2|x| - 3|y| = 2 \\ |x| + 2|y| = 7 \end{cases}$  Η)  $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \end{cases}$

**BA/04.** Να βρεθούν δύο αριθμοί που διαφέρουν κατά 1 και το διπλάσιο του μεγαλύτερου ελαττωμένο κατά 5 δίνει το μικρότερο .

**BA/05.** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(1,5) και B(2,7) .

**BA/06.** Βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 25 και η διαίρεση του μεγαλύτερου με το μικρότερο δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 4 .

**BA/07.** Σε μια φάρμα υπάρχουν κοτόπουλα και πρόβατα. Τα ζώα έχουν συνολικά 28 κεφάλια και 72 πόδια. Πόσα είναι τα κοτόπουλα και πόσα τα πρόβατα;



**BA/08.** Ένα ξενοδοχείο έχει συνολικά 50 δωμάτια, δίκλινα και τρίκλινα. Αν συνολικά τα κρεβάτια είναι 130, πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

**BA/09.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - \mu x^2 + 2\lambda x + 2\mu - 3\lambda$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1,6)$  και  $B(-1,12)$  Να βρείτε :

A) Να βρείτε τους αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$

B) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

**BA/10.** Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι  $48\text{ cm}$ . Αν αυξήσουμε συγχρόνως τη μια πλευρά κατά  $5\text{ cm}$  και την άλλη κατά  $1\text{ cm}$ , τότε το εμβαδόν του αυξάνει κατά  $65\text{ cm}^2$ . Να βρείτε τις αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.

**BA/11.** Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το  $1/8$  του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το  $1/2$  του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλεψε.

**BA/12.** Διαθέτουμε 60 χαρτονομίσματα των 5€, 10€ και 20€ συνολικής αξίας 800€. Τα χαρτονομίσματα των 5€ και των 10€ μαζί είναι ίσα σε πλήθος με τα χαρτονομίσματα των 20€. Να βρείτε πόσα είναι τα χαρτονομίσματα των 5€, πόσα είναι των 10€ και πόσα των 20€.

**BA/13.** Να λύσετε τα συστήματα: A) 
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 9 \\ 5x - 2y - z = -6 \end{cases}$$

B) 
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

Γ) 
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Δ) 
$$\begin{cases} 2x - y + \omega = 3 \\ x + y = 1 \\ y - 3\omega = -3 \end{cases}$$

E) 
$$\begin{cases} x + y + 2\omega = 3 \\ 2x + 3y - \omega = -6 \\ -2x + y + 3\omega = 2 \end{cases}$$

ΣΤ) 
$$\begin{cases} x + y + 2\omega = 1 \\ 3x + 2y + 2\omega = 2 \\ x + 3y + 4\omega = 0 \end{cases}$$

Z) 
$$\begin{cases} x + y + 2\omega = 1 \\ 2x + y + \omega = 2 \\ 3x + 2y + 3\omega = 2 \end{cases}$$

**BA/14.** Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{A)} \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{2} \\ 2x + 3y + 4\omega = 52 \end{cases} \quad \text{B)} \begin{cases} x + y = 5 \\ y + \omega = 7 \\ \omega + x = 6 \end{cases}$$

**BA/15.** Υπολογίστε τις ορίζουσες: A)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$  B)  $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$  Γ)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

$$\Delta) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{E)} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} \quad \Sigma\text{T)} \begin{vmatrix} x & 2 \\ x+1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{Z)} \begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{H)} \begin{vmatrix} 2x+1 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

**BA/16.** Να λυθούν τα παραμετρικά συστήματα:

$$\text{A)} \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad \text{B)} \begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ 2x + y = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Gamma) \begin{cases} x + 2y = \lambda + 1 \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad \Delta) \begin{cases} kx + 4y = k \\ x + ky = 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\text{E)} \begin{cases} k^2 x + 2y = 4 \\ kx + y = k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \Sigma\text{T)} \begin{cases} \lambda x + (3\lambda - 2)y - 1 = \lambda \\ x + \lambda y = 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Z)} \begin{cases} \lambda x + 2y - 1 = \lambda \\ \lambda x + \lambda y - 2\lambda = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{H)} \begin{cases} x + \mu y = \lambda \\ x + \lambda y = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Theta) \begin{cases} \lambda x + y = \mu \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{I)} \begin{cases} \lambda x + \mu y = \lambda \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**BA/17.** A) Προσδιορίστε την παράμετρο  $\lambda$  ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x - y = -2 \\ 3x + y = 4\lambda \end{cases} \quad \text{να είναι αδύνατο.}$$

B) Προσδιορίστε τις παραμέτρους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} (2\alpha + 1)x + (\alpha + \beta)y = \alpha + 3 \\ (\alpha - \beta)x + 2\beta y = \alpha + \beta \end{cases} \quad \text{να έχει λύση: } (x, y) = (2, 1).$$

**BA/18.** Βρείτε τις τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι αόριστο το

$$\text{σύστημα: } (\Sigma_1): \begin{cases} \lambda x - y = \mu - 1 \\ 2x + y = 2\mu - 1 \end{cases}. \text{ Όμοια για το: } (\Sigma_2): \begin{cases} \lambda x + y = 2\mu - 1 \\ \mu x + y = \lambda + 1 \end{cases}$$

$$\text{BA/19. Αν } (\Sigma_1): \begin{cases} (\lambda + 1)x + 2\mu y = \lambda + \mu \\ x + y = \lambda + 2 \end{cases} \text{ και } (\Sigma_2): \begin{cases} (\lambda + \mu)x + 2y = 2\lambda \\ (\lambda + 1)x + y = \mu + 2 \end{cases}$$

βρείτε τα  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε τα συστήματα να είναι συγχρόνως αδύνατα.

**BA/20.** Αν  $(\Sigma_1): \begin{cases} \lambda x + \mu y = 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$  και  $(\Sigma_2): \begin{cases} (2\lambda - 1)x + (\mu - 4)y = 4 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$

βρείτε τα  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε τα συστήματα να είναι συγχρόνως αδύνατα.

**BA/21.** Αν το  $(\Sigma_1): \begin{cases} \lambda x + y = 3 \\ x + y = \lambda + 1 \end{cases}$  είναι αδύνατο, να λυθεί το σύστημα:

$(\Sigma_2): \begin{cases} \lambda x + y = \mu \\ \mu x + 2y = \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

**BA/22.** Αν το  $(\Sigma_1): \begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$  είναι αδύνατο, να λυθεί το σύστημα:

$(\Sigma_2): \begin{cases} \lambda x + \mu y = \lambda + 1 \\ \mu x + 4y = \mu + 2 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

**BA/23.** Αν το σύστημα:  $\begin{cases} \alpha x + (\alpha + \beta)y = \beta \\ (\alpha - \beta)x + (2\alpha + \beta)y = \alpha + \beta \end{cases}$  έχει λύση:

$(x, y) = (1, 2)$  να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**BA/24.** Α) Βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε οι ευθείες  $\varepsilon_1: \lambda x + y = \lambda + 1$  και  $\varepsilon_2: x + \lambda y = 2\lambda$  να είναι παράλληλες.

Β) Όμοια για τις  $\varepsilon_1: y = \lambda x + 1$  και  $\varepsilon_2: y = 2x + \lambda - 1$ .

**BA/25.** Έστω  $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases} \quad \mu\epsilon \lambda \in \mathbb{R}.$

Α) Υπολογίστε τα  $D, D_x, D_y$ .

Β) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  το σύστημα έχει μοναδική λύση και ποια είναι αυτή η λύση;

Γ) Για  $\lambda = 1$  να λύστε το σύστημα .

**BA/26.** Έστω  $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ 4x + \lambda y - 2 = \lambda \end{cases} \quad \mu\epsilon \lambda \in \mathbb{R}.$

Α) Βρείτε τα  $D, D_x, D_y$ .

Β) Αν  $D \neq 0$  βρείτε τις λύσεις του  $(\Sigma)$ .

Γ) Αν  $D = 0$  βρες τις τιμές του  $\lambda$  και αποδείξτε ότι για μια από αυτές το  $(\Sigma)$  είναι αδύνατο ενώ για την άλλη αόριστο .

Δ) Για την περίπτωση που το  $(\Sigma)$  έχει άπειρες λύσεις  $(x, y)$  προσδιορίστε εκείνη τη λύση  $(x_0, y_0)$  για την οποία ισχύει:  $x_0 + y_0 = 0$ .

**BA/27.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda - 1 \\ 4x + \lambda y = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A. Υπολογίστε τις ορίζουσες:  $D, D_x, D_y$ .

B. Αν  $D \neq 0$  βρείτε τη λύση του συστήματος.

Γ. Αν  $D = 0$  βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  και αποδείξτε ότι για μια από τις τιμές αυτές το σύστημα είναι αδύνατο ενώ για την άλλη αόριστο.

Δ. Για την περίπτωση που το (Σ) έχει άπειρες λύσεις  $(x, y)$  προσδιορίστε εκείνη τη λύση  $(x_0, y_0)$  για την οποία ισχύει:  $x_0 - y_0 = 2$ .

**BA/28.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ \lambda^2 x + y = \lambda - 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A) Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το σύστημα έχει μοναδική λύση;

B) Για αυτές τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος.

Γ) Αν  $(x_0, y_0)$  η μοναδική λύση βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει:

$$2x_0 - y_0 = \frac{3}{4}.$$

**BA/29.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A) Δείξτε ότι έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  και προσδιορίστε την.

B) Δείξτε ότι:  $x_0 + y_0 < 0$ .

**BA/30.** Σε ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D + 4D_x - 5. \text{ Βρείτε τα } x, y.$$

**BA/31.** Βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε για τη μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  του

$$\text{συστήματος: } \begin{cases} \mu x + y = \mu + 1 \\ x + \mu y = 2\mu \end{cases} \text{ να ισχύει } 2x_0 + y_0 = 2.$$

**BA/32.** Αν 
$$\begin{cases} x + ky = \lambda + 1 \\ 2x + (\lambda + 5)y = 3k - 5 \end{cases}$$
 βρείτε τα  $k, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το

σύστημα να είναι αόριστο και κατόπιν βρείτε τις άπειρες λύσεις του.

**BA/33.** Αν 
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + y = \mu + 1 \end{cases}$$
 βρείτε τα  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα να είναι

αόριστο και κατόπιν βρείτε τις άπειρες λύσεις του και από αυτές προσδιορίστε τη λύση  $(x_0, y_0)$  για την οποία ισχύει:  $2x_0 + y_0 = 2$ .

**BA/34.** Αν  $\begin{cases} \lambda^2 x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$  τότε:

A) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα να είναι αόριστο.

B) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  για την οποία ισχύει να ισχύει:  $2x_0 + 3y_0 = 3$ .

**BA/35.** Σε ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 - 2DD_x - 4DD_y + 5D^2 = 0 \text{ και } D \neq 0. \text{ Βρείτε τα } x, y.$$

**BA/36.** Σε ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 + 2D^2 = 2DD_y - 2DD_x \text{ και } D \neq 0. \text{ Βρείτε τα } x, y.$$

**BA/37.** Σε ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με αγνώστους  $x, y$  ισχύουν:

$$D_x + D_y = 5D \text{ και } 2D_x - D_y = D \text{ και } D \neq 0. \text{ Βρείτε τα } x, y.$$

### Μη γραμμικά συστήματα

Να λυθούν τα συστήματα:

**BA/38.** A)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 178 \\ x + y = 10 \end{cases}$

B)  $\begin{cases} x - y = -3 \\ xy = 10 \end{cases}$

Γ)  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x^2 + xy = 6 \end{cases}$

Δ)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + xy = y + 1 \end{cases}$

**BA/39.** A)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

B)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}.$

**BA/40.** A)  $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ x^2 + 3x + y = 2 \end{cases}$

B)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x^2 - 2y^2 = -6 \end{cases}$

**BA/41.** Βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής  $y = x^2$  με την ευθεία  $x - y + 6 = 0$ .

**BA/42.** Βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής  $y = x^2$  με την ευθεία  $x - y + 2 = 0$ .

**BA/43.** Βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής  $y = x^2$  με την ευθεία  $5x + y + 2 = 0$ .

**BA/44.** Βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο  $14 \text{ cm}$  και εμβαδόν  $12 \text{ cm}^2$ .

**BA/45.** Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν  $24m^2$ . Αν αυξήσω το μήκος του κατά  $2m$  και το πλάτος του κατά  $1m$  το εμβαδόν του γίνεται  $40m^2$ . Βρείτε το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου.

**BA/46.** Ένα σύρμα μήκους  $20cm$  χωρίζεται σε δυο κομμάτια με μήκη  $x, y$ . Με καθένα από αυτά τα κομμάτια κατασκευάζουμε από ένα τετράγωνο. Αν το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων είναι  $13cm^2$  βρείτε τα  $x, y$ .

**BA/47.** Οι πλευρές δύο τετραγώνων διαφέρουν κατά  $1cm$  και το άθροισμα των εμβαδών τους είναι  $25cm^2$ . Βρείτε τις πλευρές τους.

**BA/48.** Το άθροισμα δύο ακεραίων είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε τον μεγαλύτερο με τον μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.



## Συναρτήσεις

Ό,τι είναι ο νους και η καρδιά για τον άνθρωπο, είναι και η Ελλάδα για την οικουμένη.  
Wolfgang Gothe

### Χρήσιμες προτάσεις για εύρεση του πεδίου ορισμού.

Αν μας ζητούν να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης να έχουμε υπόψη ότι:

- Αν  $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$  πρέπει  $g(x) \neq 0$ .
- Αν  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$  πρέπει  $g(x) \geq 0$ .
- Αν  $f(x) = \ln(g(x))$  πρέπει  $g(x) > 0$ .
- Αν  $f(x) = \varepsilon\varphi(g(x))$  πρέπει  $g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .
- Αν  $f(x) = \sigma\varphi(g(x))$  πρέπει  $g(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**ΒΒ/01.** Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

A)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

B)  $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x + 5$

Γ)  $f(x) = 2\sqrt{3-x} - 1$

Δ)  $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{8-2x}$

E)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-1}} + 2$

ΣΤ)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{x-1}}$

Z)  $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

H)  $f(x) = \frac{1}{|x-1|-2}$

Θ)  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-2}{|x|-3}$

I)  $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - x}$

ΙΑ)  $f(x) = 1 + \sqrt{3-|x+1|}$

ΙΒ)  $f(x) = \frac{1+3\sqrt{x+2}}{x-3}$

ΙΓ)  $f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2x$

ΙΔ)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ .



**BB/02.** Εξετάστε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

A)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

B)  $f(x) = x^3 + x$

Γ)  $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

Δ)  $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$

E)  $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$

ΣΤ)  $f(x) = x|x| + 3$

Z)  $f(x) = x^2 + |x| + 1$

H)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| - 2}$

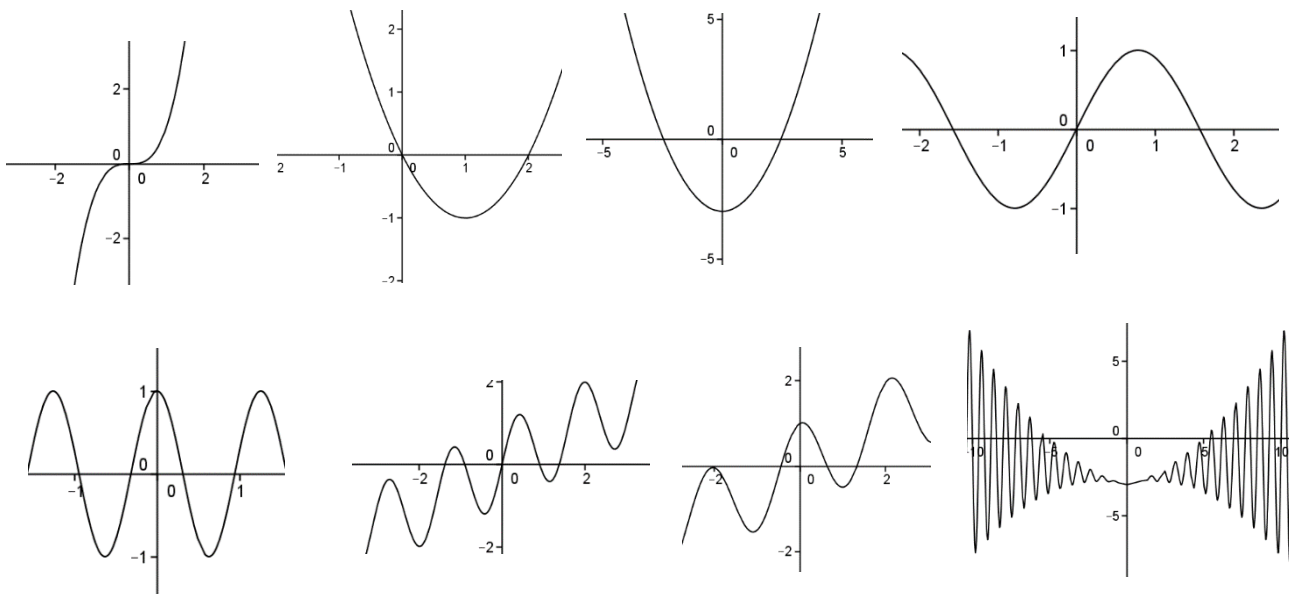
Θ)  $f(x) = x(1 - |x|) + 1$

I)  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

ΙΑ)  $f(x) = \sqrt[3]{(5-x)^2} + \sqrt[3]{(5+x)^2}$

ΙΒ)  $f(x) = \begin{cases} -3x + 4 & , x \leq 0 \\ 3x + 4 & , x > 0 \end{cases}$

**BB/03.** Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.



**BB/04.** Βρείτε τα πεδία ορισμού και σημεία τομής των παρακάτω

συναρτήσεων με τους άξονες: A)  $f(x) = 2x - 4$  B)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Γ)  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$  Δ)  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$  E)  $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$

ΣΤ)  $f(x) = 2|x-3| - 4$  Ζ)  $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$  Η)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - 1$ .

**BB/05.** Βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των

συναρτήσεων: A)  $f(x) = 2x + 1$  και  $g(x) = x + 5$ .

B)  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = x + 6$  Γ)  $f(x) = 2x^2$  και  $g(x) = 3x + 5$

Δ)  $f(x) = x^3$  και  $g(x) = 2x^2$  E)  $f(x) = x$  και  $g(x) = \sqrt{x+12}$

ΣΤ)  $f(x) = x^2$  και  $g(x) = |x| + 6$  Ζ)  $f(x) = x + 2$  και  $g(x) = \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$

**BB/06.** Εξετάστε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

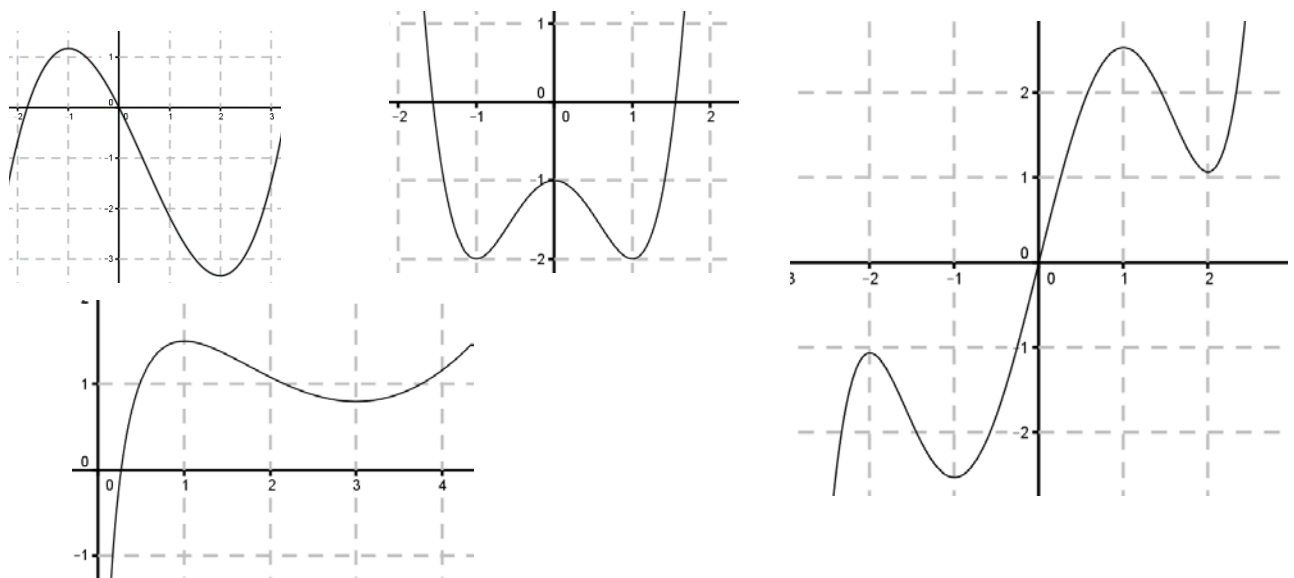
A)  $f(x) = 5x - 3$       B)  $f(x) = -2x + 1$       Γ)  $f(x) = \frac{3}{x}$

Δ)  $f(x) = -\frac{5}{2x}$       Ε)  $f(x) = 2\sqrt{3x+4}$       ΣΤ)  $f(x) = 2|x| - 3$

Ζ)  $f(x) = 2x + \sqrt{x-1}$       Η)  $f(x) = \sqrt{2-x} - 3x$       Θ)  $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$ .

Ι)  $f(x) = 1 - 2\sqrt{3-x}$       ΙΑ)  $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$       ΙΒ)  $f(x) = \sqrt{1-x} - 2x$

**BB/07.** Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:



**BB/08.** Βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων: A)  $f(x) = 2x^6 - 3$

B)  $f(x) = -3(x-2)^2 + 1$       Γ)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$       Δ)  $f(x) = 2\sqrt{x-3} + 1$

E)  $f(x) = 5 - 3\sqrt{x+1}$       ΣΤ)  $f(x) = 4 - 3\sqrt{5-x}$       Ζ)  $f(x) = 2|x-3| + 1$

H)  $f(x) = 7 - 3|2x+1|$       Θ)  $f(x) = \frac{1}{2x^2+3}$       Ι)  $f(x) = \frac{1}{2|x-2|+1}$ .

**BB/09.** A) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 6x + 4$ , για  $x = 3$  παρουσιάζει ελάχιστο  $f(3) = -5$ .

B) Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ , για  $x = 2$  παρουσιάζει μέγιστο.

**BB/10.** Αν η  $f(x) = 3x - 5$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = [1, 3]$  βρείτε τα ακρότατά της

**BB/11.** Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 2x$  με πεδίο ορισμού το  $A = [1, 3]$

**BB/12.A)** Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 + 3$  στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  κατασκευάστε πίνακα μονοτονίας και προσδιορίστε τα ακρότατά της.

B) Όμοια για τις:  $g(x) = -2(x-1)^4 + 1$  στα  $(-\infty, 1]$  και  $[1, +\infty)$  και την  $h(x) = 2|x+2| + 3$  στα  $(-\infty, -2]$  και  $[-2, +\infty)$ .

Γ) Όμοια για τις:  $\varphi(x) = 1 - 2|x-3|$ ,  $\kappa(x) = 3(x+1)^6 - 2$  και  $\sigma(x) = 3 - \sqrt{x^2 + 1}$  στα κατάλληλα διαστήματα.

**BB/13.** A) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \lambda\sqrt{2x+1} - 3$  να είναι: A) γνησίως αύξουσα B) γνησίως φθίνουσα.

B) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{|\lambda + 3| - 4}{x}$  να είναι: A) γνησίως αύξουσα B) γνησίως φθίνουσα.

**BB/14.** Εξετάστε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις: A)  $f(x) = 2|x-1| - 5$  στα  $(-\infty, 1]$  και  $[1, +\infty)$

B)  $f(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2}$  στο  $[-2, 2]$

Γ)  $f(x) = 3\sqrt{2x^2 + 1} + 1$  στα  $(-\infty, 0]$  και  $[0, +\infty)$

Δ)  $f(x) = 3 - 2|x-2|$  στα  $(-\infty, 2]$  και  $[2, +\infty)$

E)  $f(x) = 3(x-3)^2 - 4$  στα  $(-\infty, 3]$  και  $[3, +\infty)$ .

**BB/15.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της. B) Δείξτε ότι είναι άρτια

Γ) Βρείτε που τέμνει τους άξονες Δ) Βρείτε το μέγιστό της

E) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \sqrt{5}$

**BB/16.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$A) f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x < 1 \\ \frac{x^2+3}{4} & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$B) f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x < 1 \\ \frac{x^2-4}{3} & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$Γ) f(x) = 2|x-1| + |x+1|$$

$$Δ) f(x) = 2\sqrt{x+1} + 1$$

$$E) f(x) = \begin{cases} x+2 & , x < 0 \\ -2x+3 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Sigma T) f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x < 1 \\ x+1 & , 1 \leq x < 3 \\ 4-x & , x \geq 3 \end{cases}$$

$$Z) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & , x < 0 \\ x^2 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$H) f(x) = \begin{cases} x+2 & , x < 0 \\ 2-\sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

**BB/17.** Έστω  $f(x) = x^2 + k$  ώστε το σημείο  $A(1, -3)$  να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

A) Βρείτε το  $k \in \mathbb{R}$ . B) Δείξτε ότι η  $f$  είναι άρτια.

Γ) Μελετήστε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

Δ) Βρείτε πού η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες.

E) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

**BB/18.** Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x} + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$ .

A) Δείξτε ότι  $k = -2$ .

B) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Γ) Εξετάστε αν η γραφική παράσταση της  $f$  έχει άξονα ή κέντρο συμμετρίας.

Δ) Βρείτε πού η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες.

E) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

**BB/19.** Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{2} + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ώστε το σημείο

$A\left(3, \frac{5}{2}\right)$  να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και το  $k$ .

B) Βρείτε αν η γραφ. παράσταση της  $f$  έχει άξονα ή κέντρο συμμετρίας.

Γ) Μελετήστε την  $f$  ως προς τα ακρότατα.

Δ) Βρείτε πού η γραφ. παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες.

E) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**BB/20.** Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Εξετάστε την ως προς τη μονοτονία.

Γ) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

Δ) Βρείτε το  $f(5)$  και λύστε την ανίσωση  $f(x) > 27$  καθώς και την  $f(3x-2) > 27$ .

Ε) Λύστε την ανίσωση  $f(|x-1|-2) < 1$ .

**BB/21.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

Β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

Γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

Δ) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

**BB/22.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 1 - \sqrt{4-x^2}$ .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της. Β) Δείξτε ότι είναι άρτια

Γ) Βρείτε που τέμνει τους άξονες Δ) Βρείτε το ελάχιστό της.

Ε) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 1 - \sqrt{3}$ .

**BB/23.** Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1, \quad g(x) = 3x + \sqrt{2x-1} \quad \text{και} \quad h(x) = \sqrt{1-2x} - x^5 + 1$$

**BB/24.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$  να δείξετε ότι η  $g(x) = -f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ .

**BB/25.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$  και  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in A$ , να δείξετε ότι η  $g(x) = -f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ .

**BB/26.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$  και η  $g$  γνησίως φθίνουσα στο  $A$  να δείξετε ότι η  $h(x) = f(x) - g(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ .

**BB/27.** Αν  $f(x) = \frac{5 - \sqrt{x^2 - 1}}{|x| - 2}$  βρείτε το πεδίο ορισμού της και δείξτε

ότι είναι άρτια.

**BB/28.** Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  για το οποίο η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \lambda x + 5$  είναι άρτια.

**BB/29.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

A) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

B) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ .

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^{2016} + 1) < 0$ .

δ) Να βρείτε τη τιμή της παράστασης

$$A = f(1940) - 23f(-1821) + f(-1940) - 23f(1821).$$

**BB/30.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

A) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

β) Αφού αποδείξετε ότι  $|f(x)| \leq 1$ , να βρείτε τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων της  $f$ .

γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x-2) + f(x^2 - 3x + 1) \geq 2$ .

**BB/31.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \lambda x$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$ .

A) Να δείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

B) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

Γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της  $C_f$  με τους άξονες.

Δ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $g(x) = x^2 - x$ .

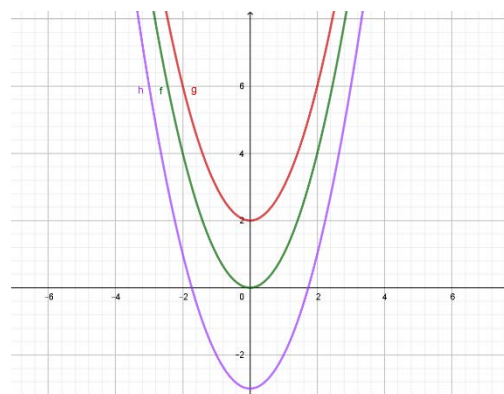
E) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

ΣΤ) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

i)  $f(x) < 2$                       ii)  $x^3 + x - 10 > 0$

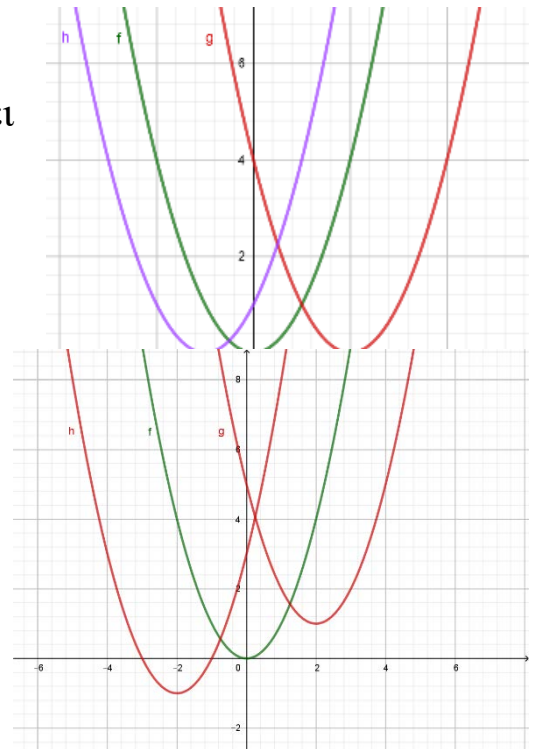
iii)  $(x^2 + x^2)^3 + x^2 + x = 10$ .

**BB/32.** Αν η «μεσαία» συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  $f(x) = x^2$  βρείτε τους τύπους των δύο άλλων συναρτήσεων  $g$  και  $h$ .



**BB/33.** Αν η «μεσαία» συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  $f(x) = x^2$  βρείτε τους τύπους των δύο άλλων συναρτήσεων  $g$  και  $h$ .

**BB/34.** Αν η «μεσαία» συνάρτηση  $f$  έχει τύπο  $f(x) = x^2$  βρείτε τους τύπους των δύο άλλων συναρτήσεων  $g$  και  $h$ .



**BB/35.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{9 - x}}$ .

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$
- B) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία
- Γ) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

**BB/36.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{9 - x} - \sqrt{2x + 4} - x$ .

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- B) Να βρείτε το σημείο τομής της  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .
- Γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία
- Δ) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$
- E) Να λύσετε την ανίσωση:  $\sqrt{9 - x} < \sqrt{2x + 4} + x + 1$ .

**BB/37.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \sqrt{25 - x^2} - 3$ .

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$
- B) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .
- Γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.
- Δ) Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

**BB/38.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + (\lambda - \mu)x + 2\mu - 5\lambda$ , με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Η  $C_f$  έχει κορυφή με τετμημένη 2 και τέμνει το άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη -1.

- A) Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 3$  και  $\mu = 7$   
 B) Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$   
 Γ) Έστω  $g(x)$  η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της  $C_f$ , μία οριζόντια κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μία κατακόρυφη κατά 4 μονάδες προς τα κάτω.  
 Γ1) Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης  $g$ .  
 Γ2) Να λύσετε την ανίσωση :  $f(x) + g(x) < 3$ .  
 Γ3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = 5f(x) - 2g(x)$  είναι άρτια.

**BB/39.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ .

A) Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

B) Να δείξετε ότι:  $f\left(\frac{2018}{2019} + \frac{2019}{2018}\right) > 1$

Γ) Να δείξετε ότι:  $f\left(\sqrt[3]{9}\right) > 1$ .

**BB/40.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

B) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι άρτια.

Γ) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[-2, 0]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 2]$ .

Δ) Να δείξετε ότι η  $f$  έχει ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη τιμή το 2.

E) Να εξετάσετε αν μπορεί η συνάρτηση  $f$  να έχει τιμή έναν αριθμό της μορφής  $\alpha + \frac{1}{\alpha}$  με  $\alpha \neq 0$ .





# Τριγωνομετρία

"Αυτοί που θα δουν καθαρά την αλήθεια των μαθηματικών, θα μπορέσουν να θαυμάσουν το μεγαλείο και τη δύναμη της φύσης, σ' αυτή τη διπλή απειρία που μας περιτριγυρίζει από παντού και να μάθουν από αυτή τη θαυμαστή θεώρηση πώς να γνωρίσουν τον εαυτό τους, βλέποντάς τον τοποθετημένο ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα κίνησης, ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα χρόνου. Έτσι θα μπορέσουν να μάθουν να αξιολογούν δίκαια τον εαυτό τους και να σχηματίζουν συλλογισμούς που να αξίζουν εν τέλει περισσότερο από όλες τις μαθηματικές γνώσεις".

Blaise Pascal

## ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας.

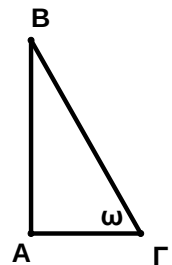
Ορίζουμε:

$$\text{ΗΜΙΤΟΝΟ} = \frac{\text{ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΚΑΘΕΤΗ}}{\text{ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ}} \quad \left( \eta\mu\omega = \frac{AB}{BG} \right)$$

$$\text{ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ} = \frac{\text{ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΗ ΚΑΘΕΤΗ}}{\text{ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ}} \quad \left( \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AG}{BG} \right)$$

$$\text{ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ} = \frac{\text{ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΚΑΘΕΤΗ}}{\text{ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΗ ΚΑΘΕΤΗ}} \quad \left( \epsilon\phi\omega = \frac{AB}{AG} \right)$$

$$\text{ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ} = \frac{\text{ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΗ ΚΑΘΕΤΗ}}{\text{ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΚΑΘΕΤΗ}} \quad \left( \sigma\phi\omega = \frac{AG}{AB} \right)$$



### Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας.

Αν  $M(x, y)$ ,  $\widehat{xOM} = \widehat{\omega}$  και  $(OM) = \rho$ , είναι:

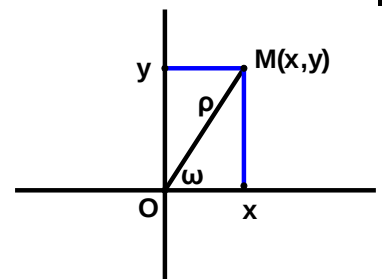
$\rho^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  και ορίζονται:

$$\text{ΗΜΙΤΟΝΟ} = \frac{\text{ΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΤΟΥ Μ}}{(OM)} \quad \left( \eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \right)$$

$$\text{ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ} = \frac{\text{ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΤΟΥ Μ}}{(OM)} \quad \left( \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} \right)$$

$$\text{ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ} = \frac{\text{ΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΤΟΥ Μ}}{\text{ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΤΟΥ Μ}} \quad \left( \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \right)$$

$$\text{ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ} = \frac{\text{ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΤΟΥ Μ}}{\text{ΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΤΟΥ Μ}} \quad \left( \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \right).$$



## Τριγωνομετρικές ταυτότητες

### Τριγωνομετρικές ταυτότητες.

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \quad \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad \sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, \quad \epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x = 1$$

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών τόξων

|            | 0                        | $\frac{\pi}{6}$<br>(30°)           | $\frac{\pi}{4}$<br>(45°) | $\frac{\pi}{3}$<br>(60°) | $\frac{\pi}{2}$<br>(90°) |                                                          | $\pi$<br>(180°) | $\frac{3\pi}{2}$<br>(270°) |
|------------|--------------------------|------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------|
| <b>ημ</b>  | $\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$ | $\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$     | $\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$ |                                                          | 0               | -1                         |
| <b>συν</b> | 1                        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$               | $\frac{\sqrt{2}}{2}$     | $\frac{1}{2}$            | 0                        | Αντίστροφα<br>από το<br>ημίτονο                          | -1              | 0                          |
| <b>εφ</b>  | 0                        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$               | 1                        | $\sqrt{3}$               | —                        | $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ | 0               | —                          |
| <b>σφ</b>  | —                        | $\sqrt{3}$                         | 1                        | $\frac{\sqrt{3}}{3}$     | 0                        | Αντίστροφα<br>από την<br>εφαπτομένη                      | —               | 0                          |

### Βασικές ανισότητες

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

Η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη παίρνουν τιμές από όλο το  $\mathbb{R}$ .

**ΒΓ/01.** Α) Αν  $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$  και  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$  βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Β) Αν  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γ) Αν  $\varepsilon\phi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  και  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Δ) Αν  $\sigma\phi\chi = -1$  και  $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$  βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Ε) Αν  $\eta\mu\omega = \frac{\lambda-2}{\lambda}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\lambda-3}{\lambda}$  με  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  και  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$  βρείτε το  $\lambda$  και την  $\varepsilon\phi\omega$ .

ΣΤ) Αν  $\varepsilon\phi\omega = \frac{\lambda^2-1}{\lambda+2}$  και  $\sigma\phi\omega = \frac{\lambda+2}{4\lambda-5}$  και  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$  βρείτε το  $\lambda$  καθώς και τα  $\eta\mu\omega$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega$ .

Ζ) Αν  $3\eta\mu\omega - 4\sigma\upsilon\nu\omega = 5$ , με  $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ , βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .

(Λύστε ως προς το  $\eta\mu$  και αντικαταστήστε στη βασική τριγων. ταυτότητα)

Η) Αν  $3\eta\mu\chi + 5\sigma\upsilon\nu\chi = 5$  να δείξετε ότι  $|3\sigma\upsilon\nu\chi - 5\eta\mu\chi| = 3$ . (Υψώστε στο τετράγωνο...)

Θ) Αν  $y = 6\eta\mu\chi + 8\sigma\upsilon\nu\chi$  δείξτε ότι  $y \in [-10, 10]$ . (Λύστε ως προς  $\eta\mu$ , πάρτε την τριγωνομ. Ταυτότητα και απαιτήστε η εξίσωση να έχει λύση)

**ΒΓ/02.** Να αποδείξετε ότι:

A)  $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2$

B)  $(2\eta\mu\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 13$

Γ) Αν  $x = 5\eta\mu\theta$  και  $y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$  δείξτε ότι  $4x^2 + 25y^2 = 100$ .

Δ)  $\varepsilon\phi\theta + \sigma\phi\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$ .

Ε)  $(\varepsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi)^2 = \frac{1}{\eta\mu^2\chi} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$ .

ΣΤ)  $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}$

Ζ)  $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi}{\eta\mu^2\chi - \eta\mu^4\chi} = 1$  και  $\frac{\eta\mu^2\chi - \eta\mu^2y}{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2y} = -1$

**ΒΓ/03.** Να αποδείξετε ότι:

A)  $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$

- B)  $\varepsilon\varphi^2 x - \eta\mu^2 x = \varepsilon\varphi^2 x \cdot \eta\mu^2 x$  Γ)  $\sigma\upsilon\nu^2 \theta - \eta\mu^2 \theta = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \theta}{1 + \varepsilon\varphi^2 \theta}$
- Δ)  $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = \frac{1}{\eta\mu x}$  Ε)  $\frac{\sigma\varphi x - 1}{\sigma\varphi x + 1} = \frac{1 - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi x}$
- ΣΤ)  $\frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} + \frac{1}{1 + \sigma\varphi^2 x} = 1$  Ζ)  $\frac{1 + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi^2 x = 1$
- Η)  $\frac{\eta\mu^4 \alpha - \sigma\upsilon\nu^4 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu \alpha} = 1 + \sigma\upsilon\nu \alpha$  Θ)  $\frac{1}{\eta\mu \omega} - \frac{\eta\mu \omega}{1 + \sigma\upsilon\nu \omega} = \sigma\varphi \omega$
- Ι)  $\left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\eta\mu x + 1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = 2$  ΙΑ)  $\frac{\sigma\upsilon\nu \theta}{1 + \varepsilon\varphi \theta} - \frac{\eta\mu \theta}{1 + \sigma\varphi \theta} = \sigma\upsilon\nu \theta - \eta\mu \theta$
- ΙΒ) Δείξτε ότι η παράσταση  $A = \frac{5\sigma\upsilon\nu \alpha - 4}{3 - 5\eta\mu \alpha} - \frac{3 + 5\eta\mu \alpha}{5\sigma\upsilon\nu \alpha + 4}$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $\alpha$ .
- ΙΓ) Δείξτε ότι η παράσταση  $A = \frac{\eta\mu^2 \alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu \alpha} + \frac{\eta\mu^2 \alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu \alpha}$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $\alpha$ .

**ΒΓ/04.** Να αποδείξετε ότι:

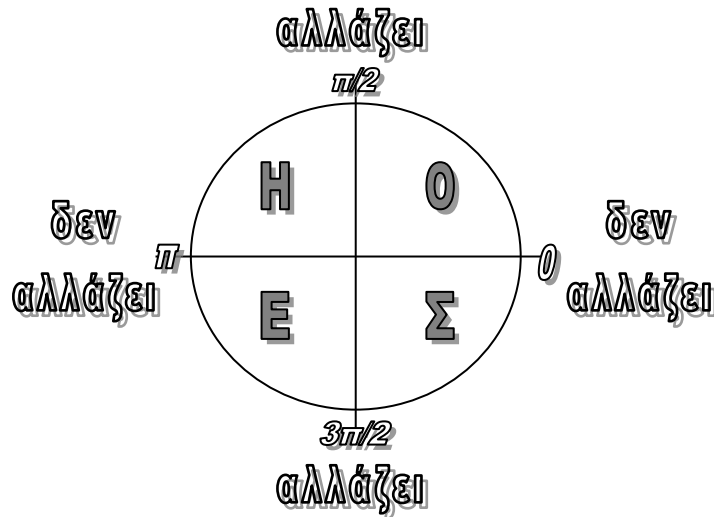
- A)  $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$  B)  $\frac{\varepsilon\varphi \alpha + \varepsilon\varphi \beta}{\sigma\varphi \alpha + \sigma\varphi \beta} = \varepsilon\varphi \alpha \cdot \varepsilon\varphi \beta$
- Γ)  $(1 + \varepsilon\varphi x) \cdot (1 + \sigma\varphi x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$
- Δ)  $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \frac{1}{\sigma\varphi x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$  Ε)  $\frac{1 - 2\eta\mu^2 x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1} = 1$
- ΣΤ)  $\eta\mu^2 x \cdot \varepsilon\varphi x - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sigma\varphi x = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x$ .
- Ζ)  $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\eta\mu^2 \omega} - 1\right) = 1$  Η)  $\frac{\eta\mu \alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha}{\eta\mu \alpha - \sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{\varepsilon\varphi \alpha + 1}{\varepsilon\varphi \alpha - 1}$

**ΒΓ/05.** Βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned} A &= 3\eta\mu x + 4 & B &= 1 - 3\sigma\upsilon\nu x & \Gamma &= \frac{4\eta\mu x - 3}{5} \\ \Delta &= 2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu y + 4 & E &= 3\eta\mu^2 x + 4 & Z &= \frac{3\eta\mu \omega - 4\sigma\upsilon\nu \theta + 1}{2} \end{aligned}$$

**ΒΓ/06.** Αν  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  δείξτε ότι:  $3\eta\mu x - 2\eta\mu 2x + \varepsilon\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi \frac{x}{2} > 0$

## Αναγωγή στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο



### Επεξηγήσεις

**Ο** = όλα θετικά

**Η** = μόνο το ημίτονο θετικό

**Ε** = μόνο η εφαπτομένη (άρα και η συνεφαπτομένη) θετική

**Σ** = μόνο το συνημίτονο θετικό

Σημείωση: Η συνεφαπτομένη έχει πάντα το ίδιο πρόσημο με την εφαπτομένη.

**Αλλάζει**= το ημίτονο γίνεται συνημίτονο και το συνημίτονο ημίτονο, η εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη και η συνεφαπτομένη εφαπτομένη.

**ΒΓ/07.** Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\eta\mu 120^\circ, \sigma\upsilon\nu 240^\circ, \epsilon\phi 405^\circ, \sigma\upsilon\nu 570^\circ, \sigma\phi 750^\circ, \eta\mu 855^\circ, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \epsilon\phi\left(\frac{19\pi}{3}\right), \eta\mu\left(\frac{28\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right), \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{6} - \frac{15\pi}{2}\right), \eta\mu\left(-\frac{25\pi}{4}\right).$$

**ΒΓ/08.** Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

$$A) \quad A = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \eta\mu(\pi - x)}$$

$$B) \quad A = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \epsilon\phi(\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(\pi - \theta)}$$

$$\Gamma) \quad A = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi(360^\circ + \theta)}{\eta\mu(360^\circ + \theta) \cdot \epsilon\phi(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}$$

$$\Delta) \quad A = \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi(2\pi - \theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi(-\theta) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$\text{E)} \quad A = \frac{\eta\mu(2\pi + \theta) \cdot \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

**ΒΓ/09.** Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

$$\text{A)} \quad A = \eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{B)} \quad A = \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta)}{\epsilon\phi(\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \eta\mu\theta}$$

$$\Gamma) \quad A = \frac{\eta\mu(\pi + \omega) \sigma\upsilon\nu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \epsilon\phi(9\pi + \omega)}{\sigma\upsilon\nu(5\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) \cdot \epsilon\phi(10\pi + \omega)}$$

$$\Delta) \quad A = \frac{\eta\mu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu(630^\circ - \theta)}$$

$$\text{E)} \quad A = \frac{\eta\mu(\pi - \omega) \sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega) \epsilon\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right) \sigma\phi(\omega - 2\pi)}{\sigma\phi\left(\frac{5\pi}{2} + \omega\right) \sigma\upsilon\nu(-3\pi - \omega) \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \sigma\phi\left(-\frac{3\pi}{2} + \omega\right)}$$

$$\Sigma\text{T)} \quad A = \frac{\eta\mu 150^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\phi 240^\circ}{\sigma\upsilon\nu(-45^\circ) + \eta\mu 225^\circ + \eta\mu 120^\circ + \epsilon\phi 150^\circ}$$

$$Z) \quad A = \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4}\varepsilon\varphi\frac{4\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{\eta\mu\frac{2\pi}{3}\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}\sigma\varphi\frac{5\pi}{6}\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

H) Αν  $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$  και  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  υπολογίστε την παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu(\pi + \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \varepsilon\varphi(-\theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}.$$

**ΒΓ/10.** Αν  $\eta\mu x - 2\eta\mu^2 x = 0$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  βρείτε το  $\eta\mu x$  και

$$\text{υπολογίστε την } A = \frac{\eta\mu\left(\frac{2009\pi}{2} - x\right) - 2\varepsilon\varphi\left(\frac{33\pi}{2} + x\right)}{3\sigma\upsilon\nu(27\pi + x) - \sigma\varphi(-3\pi + x)}.$$

**ΒΓ/11.** Δείξτε ότι:  $B = 2A$  αν  $A = \varepsilon\varphi 1^\circ \cdot \varepsilon\varphi 91^\circ \cdot \varepsilon\varphi 2^\circ \cdot \varepsilon\varphi 92^\circ$  και

$$B = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(\pi - x) \cdot \eta\mu(-x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

**ΒΓ/12.** Αποδείξτε ότι οι παραστάσεις:  $A = \frac{\eta\mu x - \eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x} - \sigma\varphi x$  και

$$B = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$
 είναι σταθερές (ανεξάρτητες του  $x$ )

## Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

### Περιοδικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  είναι περιοδική με περίοδο  $T$  αν για κάθε  $x \in A$  είναι και  $x - T \in A$ ,  $x + T \in A$  και μάλιστα ισχύει:

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιοδικές. Συγκεκριμένα:

► Η  $f(x) = \eta\mu x$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και περίοδο  $T = 2\pi$ .

$$( \text{ Η } f(x) = \eta\mu(\omega x) \text{ έχει περίοδο } T = \frac{2\pi}{\omega}, \omega > 0 )$$

► Η  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και περίοδο  $T = 2\pi$ .

$$( \text{ Η } f(x) = \sigma\upsilon\nu(\omega x) \text{ έχει περίοδο } T = \frac{2\pi}{\omega}, \omega > 0 )$$

► Η  $f(x) = \varepsilon\phi x$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$

και περίοδο  $T = \pi$ .

$$( \text{ Η } f(x) = \varepsilon\phi(\omega x) \text{ έχει περίοδο } T = \frac{\pi}{\omega}, \omega > 0 )$$

► Η  $f(x) = \sigma\phi x$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$

και περίοδο  $T = \pi$ .

$$( \text{ Η } f(x) = \sigma\phi(\omega x) \text{ έχει περίοδο } T = \frac{\pi}{\omega}, \omega > 0 )$$

(Αν  $\omega < 0$  τότε οι περίοδοι είναι  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$  για ημίτονο και συνημίτονο και  $T = \frac{\pi}{|\omega|}$  για εφαπτομένη και

συνεφαπτομένη)

**ΒΓ/13.** Βρείτε τις περιόδους των συναρτήσεων:

$$\text{Α) } f(x) = 3\eta\mu 4x \qquad \text{Β) } f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x}{4}\right)$$

$$\text{Γ) } f(x) = 2\varepsilon\phi\frac{x}{3} \qquad \text{Δ) } f(x) = \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

**ΒΓ/14.** Βρείτε τις περιόδους, το μέγιστο και το ελάχιστο των

$$\text{συναρτήσεων: Α) } f(x) = 3\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{Β) } f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Γ) } f(x) = 2\varepsilon\phi\frac{x}{4} + 1 \qquad \text{Δ) } f(x) = 3\eta\mu\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - 2$$



**ΒΓ/15.** Αν  $f(x) = 2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$  :

- A) Βρείτε την περίοδο το μέγιστο και το ελάχιστό της.  
B) Να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

**ΒΓ/16.** Αν  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$  :

- A) Βρείτε την περίοδο το μέγιστο και το ελάχιστό της.  
B) Να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

**ΒΓ/17.** Αν  $f(x) = 2\eta\mu 2x + 1$  :

- A) Βρείτε την περίοδο το μέγιστο και το ελάχιστό της.  
B) Να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

**ΒΓ/18.** Αν  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - 1$  :

- A) Βρείτε την περίοδο το μέγιστο και το ελάχιστό της.  
B) Να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

**ΒΓ/19.** A) Αν  $f(x) = \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ , βρείτε την περίοδο, το μέγιστο,

το ελάχιστό, και να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

A) Αν  $f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{4}$ , βρείτε την περίοδο, το μέγιστο, το ελάχιστό,

και να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

**ΒΓ/20.** Βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο των παραστάσεων:

$A = 2\eta\mu\theta - 1$ ,  $B = 4 - 2\sigma\upsilon\nu\theta$ ,  $\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\theta + 3\eta\mu\varphi$ ,  $\Delta = 3\eta\mu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\theta$

$E = 2\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\theta + 1$ ,  $Z = \frac{2\sigma\upsilon\nu\omega + 5\eta\mu\theta - 1}{5}$ .

**ΒΓ/21.** Βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο των παραστάσεων:

$A = \eta\mu 3x + 2\sigma\upsilon\nu\frac{y}{2}$  και  $B = 3\eta\mu\frac{x}{3} - 2\sigma\upsilon\nu 2y$

**ΒΓ/22.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) - 4$ .

Να βρεθεί η περίοδος της καθώς και το μέγιστο και το ελάχιστό της.

**ΒΓ/23.** A) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{2} + 3\eta\mu\frac{2\pi x}{3}$ . Να βρεθεί η

περίοδος της καθώς και το μέγιστο και το ελάχιστό της.

B) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3}{2}\eta\mu\left(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ .

Να βρεθεί η περίοδος της καθώς και το μέγιστο και το ελάχιστό της.

**ΒΓ/24.** Αν η συνάρτηση  $f(x) = (2 - \alpha)\eta\mu\beta x + 1$ ,  $\alpha > 2$  και  $\beta > 0$  έχει περίοδο  $\pi/2$  και μέγιστη τιμή 3, να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ .

**ΒΓ/25.** Αν  $f(x) = \gamma + (\alpha - 1)\eta\mu(\beta - 2)\pi x$ ,  $\alpha > 1, \beta > 2$ , η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει μέγιστη τιμή το 2 και περίοδο  $T = 1$ , τότε:

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta, \gamma$ .

B) Δείξτε ότι η  $f$  είναι περιττή.

Γ) Υπολογίστε την παράσταση:  $A = f\left(\frac{1}{2004}\right) - f\left(\frac{2005}{2004}\right)$ .

**ΒΓ/26.** Εξετάστε αν οι συναρτήσεις  $f(x) = 2\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu 3x$ ,

$g(x) = 3\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  και  $h(x) = \eta\mu 3x - x\sigma\upsilon\nu 2x$  είναι

άρτιες ή περιττές.

**ΒΓ/27.** Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 3x + 4 - \sigma\upsilon\nu\omega$  δεν τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

**ΒΓ/28.** Μια μπάλα κρέμεται με τη βοήθεια ενός ελατηρίου από το ταβάνι, έτσι ώστε να απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν η μπάλα ταλαντεύεται, το ύψος της από το πάτωμα δίνεται από τη συνάρτηση

$h(t) = 1 + \frac{1}{3}\eta\mu 3t$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε sec. Βρείτε την περίοδο της

ταλάντωσης καθώς και το μέγιστο και ελάχιστο ύψος της. Βρείτε το ύψος της όταν  $t = 9\pi$  sec.

### Τριγωνομετρικές εξισώσεις

#### Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

►  $\eta\mu x = \eta\mu \alpha \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \alpha \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

►  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \alpha \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

►  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi \alpha \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

(Περιορισμός:  $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ )

►  $\sigma\phi x = \sigma\phi \alpha \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{Περιορισμός: } x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z})$

#### Χρήσιμοι τύποι

$$-\eta\mu x = \eta\mu(-x)$$

$$-\epsilon\phi x = \epsilon\phi(-x)$$

$$-\sigma\phi x = \sigma\phi(-x)$$

$$\text{Αλλά} \quad -\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$$

**Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:**

**ΒΓ/29.** A)  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B)  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$

Γ)  $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Δ)  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

E)  $3\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$

ΣΤ)  $\sigma\varphi x + \sqrt{3} = 0$

Z)  $\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$

H)  $\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Θ)  $\varepsilon\varphi \frac{2x}{3} = -1$

I)  $\sigma\upsilon\nu \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$

ΙΑ)  $\varepsilon\varphi 4x = \varepsilon\varphi \frac{2\pi}{5}$

ΙΒ)  $\varepsilon\varphi \left( 2x - \frac{\pi}{5} \right) = \sqrt{3}$

ΙΓ)  $\eta\mu \left( \frac{x}{2} - \pi \right) = \frac{1}{2}$

ΙΔ)  $\sigma\upsilon\nu (3x - \pi) = \sigma\upsilon\nu \left( x + \frac{2\pi}{3} \right)$

**ΒΓ/30.** A)  $2\eta\mu x = \sqrt{3}$

B)  $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

Γ)  $\sqrt{3} - \varepsilon\varphi 2x = 0$

Δ)  $3\sigma\varphi 2x + \sqrt{3} = 0$

E)  $2\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

ΣΤ)  $\eta\mu \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0$

**ΒΓ/31.** A)  $\eta\mu 3x = \eta\mu (2x + \pi)$

B)  $\sigma\upsilon\nu 4x = \sigma\upsilon\nu \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$

Γ)  $\sigma\upsilon\nu (2x - \pi) = \sigma\upsilon\nu \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$

Δ)  $\sigma\varphi \left( 3x - \frac{\pi}{5} \right) = \sigma\varphi \left( \frac{2\pi}{5} - 2x \right)$

E)  $\varepsilon\varphi \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + \varepsilon\varphi x = 0$

ΣΤ)  $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

**ΒΓ/32.** A)  $(\sigma\varphi x - 1)(\sqrt{3}\varepsilon\varphi x + 1) = 0$

B)  $(2\sigma\upsilon\nu x - 1)(\eta\mu 2x - 1) = 0$

**ΒΓ/33.** A)  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

B)  $\eta\mu \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\sigma\upsilon\nu \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)$

Γ)  $\eta\mu 2x = \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$

Δ)  $3\eta\mu \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$

E)  $\eta\mu 2x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x = 0$

ΣΤ)  $\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu x$

Z)  $\eta\mu \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \sigma\upsilon\nu \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$

Θ)  $\eta\mu \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\upsilon\nu \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$

**ΒΓ/34.** A)  $\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$

B)  $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

Γ)  $2\eta\mu^2 x - 3\sqrt{2}\eta\mu x + 2 = 0$

Δ)  $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 x$

E)  $\sigma\upsilon\nu^2 x - 7\eta\mu^2 x + 1 = 0$

ΣΤ)  $2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sqrt{3}\eta\mu x + 1 = 0$

Z)  $(1 - 2\eta\mu x)^2 + 2\eta\mu x - 1 = 0$

H)  $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$

Θ)  $\varepsilon\phi x \cdot (\sigma\phi x - 1) = 0$

Ι)  $3\varepsilon\phi^2 x - 4\sqrt{3}\varepsilon\phi x + 3 = 0$

**ΒΓ/35.Α)**  $\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu x$

Β)  $\varepsilon\phi\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\phi x$

Γ)  $\varepsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\phi\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Δ)  $\varepsilon\phi x \cdot \varepsilon\phi 3x = 1$

Ε)  $\varepsilon\phi 2x + \sigma\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

ΣΤ)  $\varepsilon\phi 3x - \sigma\phi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

**ΒΓ/36.Α)**  $\sqrt{2}\varepsilon\phi x = 2\eta\mu x$       Β)  $\sigma\phi^2 x - \varepsilon\phi^2 x = 0$

Γ)  $\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu x = 0$       Δ)  $\frac{4\sigma\phi x}{\sigma\phi x + \sqrt{3}} = 1$       Ε)  $\eta\mu x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0$ .

ΣΤ)  $2\eta\mu x = 5 + \frac{3}{\eta\mu x}$       Ζ)  $\sqrt{3}(1 + \varepsilon\phi x) = 1 + \frac{1}{\varepsilon\phi x}$ .

**ΒΓ/37.Α)**  $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

Β)  $\varepsilon\phi x - \eta\mu x = 1 - \varepsilon\phi x \cdot \eta\mu x$

Γ)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 2 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Δ)  $2\eta\mu x \cdot \varepsilon\phi 2x - 3 = 2\eta\mu x - 3\varepsilon\phi 2x$ .

Ε)  $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 1 + \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x$

ΣΤ)  $2\eta\mu x \cdot \varepsilon\phi x + \sqrt{3} = \varepsilon\phi x + 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu x$

Ζ)  $\sigma\upsilon\nu x \cdot \varepsilon\phi x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \varepsilon\phi x - \sqrt{3}$ .

**ΒΓ/38. Α)**  $\sigma\phi\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\phi\pi x = 0$

Β)  $\varepsilon\phi\pi x = 1$  με  $x \in (-1, 3]$

Γ)  $\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\pi x + \eta\mu\pi x = 0$

Δ)  $\sqrt{3} \cdot \sigma\phi^2\pi x - \sigma\phi\pi x = 0$

**ΒΓ/39.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α)  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu y = 2$

Β)  $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = -2$

Γ)  $\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu 3x = 4$

Δ)  $2\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3\sigma\upsilon\nu\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 5$ .

Ε) Αν  $\eta\mu x - \alpha^2 = 1$  βρείτε το  $\alpha$  και λύστε την εξίσωση.

ΣΤ) Οι εξισώσεις  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και  $\varepsilon\phi x = 1$  είναι ισοδύναμες;

**ΒΓ/40. Α)** Λύστε την εξίσωση  $3\varepsilon\phi 2x - \sqrt{3} = 0$  στο  $[0, \pi]$ .

Β) Λύστε την εξίσωση  $\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu x$  στο  $[0, \pi]$ .

Γ) Λύστε την εξίσωση  $\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$  στο  $[-\pi, \pi]$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση  $\sin x = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$  στο  $[0, 2\pi]$ .

**ΒΓ/41.** Α) Λύστε στο  $[0, 2\pi]$  την εξίσωση:  $2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ .

Β) Λύστε στο  $[0, 2\pi]$  την εξίσωση:  $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ .

**ΒΓ/42.** Λύστε στο  $[-\pi, 3\pi]$  την εξίσωση:  $\frac{2\epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi x} = 1$ .

**ΒΓ/43.** Λύστε στο  $[-\pi, 3\pi]$  την εξίσωση:  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ .

**ΒΓ/44.** Α) Λύστε στο  $[0, 2\pi]$  την εξίσωση:  $\epsilon\phi 2x = \sigma\phi x$ .

Β) Λύστε στο  $[0, \pi]$  την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\phi x$ .

**ΒΓ/45.** Λύστε την εξίσωση:  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$   
(υψώνουμε στο τετράγωνο και στο τέλος κάνουμε επαλήθευση)

**ΒΓ/46.** Να λυθούν οι εξισώσεις: Α)  $3 - 2\frac{\sigma\upsilon\nu^2 \omega}{1 + \eta\mu \omega} = 0$ .

Β)  $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$ , Γ)  $2\eta\mu \omega = \frac{1}{\eta\mu \omega} - \sigma\phi \omega$

Δ)  $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu x + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ .

Ε)  $\eta\mu^2 x + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x$  στο  $(-\pi, \pi)$ .

**ΒΓ/47.** Αν  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  και  $15\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\eta\mu x - 12 = 0$

Α) Δείξτε ότι  $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$ .

Β) Βρείτε τα  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\phi x$ ,  $\sigma\phi x$ .

Γ) Βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2\sigma\upsilon\nu(5\pi + x)}{3\epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 4\sigma\phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

**ΒΓ/48.** Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  και  $5\sigma\upsilon\nu^2 x + 7\sigma\upsilon\nu x - 6 = 0$ .

Α) Δείξτε ότι  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{5}$ .

Β) Βρείτε τα  $\eta\mu x$ ,  $\epsilon\phi x$ ,  $\sigma\phi x$ .

Γ) Βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{4\epsilon\phi(7\pi - x) + 3\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

**ΒΓ/49.** Αν  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  και  $-5\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x + 2 = 0$

A) Δείξτε ότι  $\eta\mu x = -\frac{3}{5}$ .

B) Βρείτε τα  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\phi x$ ,  $\sigma\phi x$ .

Γ) Βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sigma\upsilon\nu(\pi - x)}{2\epsilon\phi(3\pi + x) - 3\epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$

**ΒΓ/50.** Αν  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  και  $5\sigma\upsilon\nu^2 x + 7\eta\mu x + 1 = 0$

A) Βρείτε το  $\eta\mu x$

B) Βρείτε τα  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\phi x$ ,  $\sigma\phi x$

Γ) Βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{10\eta\mu(\pi - x) + 10\sigma\upsilon\nu(-x)}{8\epsilon\phi(\pi + x) - 3\sigma\phi x}$ .

**ΒΓ/51.** Αν  $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$  και  $\eta\mu x > 0$ , να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου  $x$ .

**ΒΓ/52.** Αν  $3\eta\mu^2 x + 16\sigma\upsilon\nu x + 9 = 0$  και  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  υπολόγισε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου  $x$ .

**ΒΓ/53.** Αν  $\epsilon\phi x - 2\sigma\phi x + 1 = 0$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ :

A) Δείξτε ότι  $\epsilon\phi x = 1$

B) Βρείτε τα  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ .

**ΒΓ/54.** Λύστε την εξίσωση:  $6\eta\mu^2 x + 11\sigma\upsilon\nu x - 10 = 0$ .

A) Υπολογίστε το  $\sigma\upsilon\nu x$ .

B) Βρείτε το  $x$  αν  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

**ΒΓ/55.** Λύστε την εξίσωση:  $\epsilon\phi^2 x + (1 - \sqrt{3})\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$ .

**ΒΓ/56.** Βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$  με  $x \in [0, 2\pi]$  και την αντίστοιχη τιμή του  $x$ .

**ΒΓ/57.** Αν  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$  τότε:

A) Βρείτε την περίοδο της  $f$ .

B) Βρες το ελάχιστο και το μέγιστο της  $f$ .

Γ) Βρες το  $x$  για το οποίο η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Δ) Λύστε την εξίσωση  $f(x) = 2$ .

**ΒΓ/58.** Έστω συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ , τότε:

- A) Βρείτε την περίοδο της . B) Βρες το ελάχιστο και το μέγιστο της.  
 Γ) Βρες το  $x$  για το οποίο η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της.  
 Δ) Λύστε την εξίσωση  $f(x) = 1$ .  
 Ε) Να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

**ΒΓ/59.** A) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 12\pi$ .

B) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 20\pi$ .

Γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2\varepsilon\varphi\frac{x}{2} + \sigma\varphi\frac{x}{3}$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 6\pi$ .

**ΒΓ/60.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$ .

- A) Να βρείτε την περίοδο και τα ακρότατα της  $f$ .  
 B) Να γίνει γραφική παράσταση στο διάστημα  $[0, \pi]$ .  
 Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = \frac{3}{2}$ .

**ΒΓ/61.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu(\alpha x) - 2\alpha$  με  $\alpha > 0$ . Αν η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι  $-8$ , τότε:

- A) Να δείξετε ότι:  $\alpha = 2$ .  
 B) Βρείτε την περίοδο και τη μέγιστη τιμή της  $f$ .  
 Γ) Βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .  
 Δ) Για ποιες τιμές του  $x$  η συνάρτηση  $f$  έχει μέγιστο και για ποιες ελάχιστο στο  $[0, \pi]$ .

**ΒΓ/62.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha + \beta\eta\mu(\omega x)$  που έχει περίοδο  $4\pi$  μέγιστη τιμή  $5$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο

$A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$ . A) Να δείξετε ότι:  $\alpha = 2$  και  $\beta = 3$ .

- B) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της.  
 Γ) Να γίνει γραφική παράσταση της  $f$  στο διάστημα  $[0, 4\pi]$ .

**ΒΓ/63.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ .

A) Δείξτε ότι είναι περιοδική με περίοδο  $T = \pi$ .

B) Να βρείτε την συνάρτηση  $g(x) = f(\pi + x) \cdot f(\pi - x)$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = 2\eta\mu x$ .

Δ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τιμή του  $x$  ώστε  $f(x) = 1$ .

**ΒΓ/64.** Η επιτάχυνση ενός σώματος δίνεται από την συνάρτηση  $a(t) = 1 + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu t$  όπου  $t$  ο χρόνος σε sec.

A) βρείτε την επιτάχυνση για  $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  sec.

B) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της  $a(t)$ ;

Γ) Για ποια τιμή του  $t$  με  $t \in (0, 2\pi]$  η επιτάχυνση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της;

Δ) Πότε ισχύει  $a(t) = 0$ , αν  $t \in (0, \pi]$ ;

**ΒΓ/65.** Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x) = \frac{1}{8\eta\mu^3 x - 1}$ .

**ΒΓ/66.** Αν η συνάρτηση:  $f(x) = \alpha + \beta\eta\mu(\omega x)$  με  $\beta > 0$  έχει περίοδο  $T = 4\pi$ , μέγιστη τιμή 5 και ελάχιστη τιμή 1:

A) Βρείτε τα  $\omega, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα  $[0, 4\pi]$ .

**ΒΓ/67.** Αν  $f(x) = 2 - \eta\mu 2x$  τότε:

A) Βρείτε την περίοδο της. B) Βρες το ελάχιστο και το μέγιστο της.

Γ) Βρες το  $x$  για το οποίο η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Δ) Λύστε την εξίσωση  $f(x) = \frac{3}{2}$  στο διάστημα  $[\pi, 3\pi]$ .

E) Να γίνει γραφική παράσταση στο διάστημα  $[0, \pi]$

**ΒΓ/68.** Αν  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + 1$  τότε:

A) Βρείτε την περίοδο της. B) Βρες το ελάχιστο και το μέγιστο της.

Γ) Βρες το  $x$  για το οποίο η  $f$  παίρνει τη ελάχιστη τιμή της.

Δ) Λύστε την εξίσωση  $f(x) + \sqrt{3} = 1$  στο διάστημα  $[\pi, 3\pi]$ .

E) Να γίνει γραφική παράσταση στο διάστημα  $[0, 4\pi]$ .

**ΒΓ/69.** Η θερμοκρασία μιας μέρας σε  $^{\circ}\text{C}$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = 4 - 8\eta\mu \frac{\pi t}{12}, \text{ με } 0 \leq t \leq 24 \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

A) Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

B) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία της ημέρας.



Γ) Να γίνει γραφική παράσταση των θερμοκρασιών, για  $0 \leq t \leq 24$ .

Δ) Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι  $0^\circ \text{C}$ ;

Ε) Ποιες ώρες της ημέρας έχουμε παγετό; (θερμοκρασία κάτω του  $0^\circ \text{C}$ ).

**ΒΓ/70.** Αν  $f(x) = \alpha + \beta \eta\mu(\omega x)$  με  $\beta > 0$ .

Α) Αν  $T = 4\pi$  βρείτε το  $\omega$ .

Β) Αν το ελάχιστο της  $f$  είναι το 1 και το μέγιστο της 5, βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Αν  $\alpha = 3, \beta = 2$ :

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 2$ .

Δ) Να γίνει γραφική παράσταση σε πλάτος μιας περιόδου.

## Τριγωνομετρικοί αριθμοί των $\alpha + \beta$ , $\alpha - \beta$ , $2\alpha$

**ΒΓ/71.** Δείξτε ότι: Α)  $\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu(\beta - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}$

Β)  $\sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}$  Γ)  $\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\beta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}$

**ΒΓ/72.** Α) Δείξτε ότι:  $\frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$ .

Β) Απλοποιήστε τις παραστάσεις:

$A = \frac{\eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}$   $B = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$

**ΒΓ/73.** Δείξτε ότι:  $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\eta\mu\beta\eta\mu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha} = 0$

**ΒΓ/74.** Δείξτε ότι: Α)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

Β)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma)\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu\beta\eta\mu(\gamma - \alpha)$

**ΒΓ/75.** Α) Δείξτε ότι:  $2\eta\mu 4\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 3\alpha = \eta\mu 7\alpha + \eta\mu\alpha$ .

Β) Λύστε την εξίσωση:  $2\eta\mu 4x \sigma\upsilon\nu 3x = \eta\mu 7x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ .

**ΒΓ/76.** Να δειχθεί ότι:  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}$ .

**ΒΓ/77.** Να δειχθεί ότι:  $\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha \sigma\upsilon\nu^2\beta} = \epsilon\phi^2\alpha - \epsilon\phi^2\beta$ .

**ΒΓ/78.** Αν  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$ , δείξτε ότι  $(\sigma\phi\beta + \sqrt{3})(\sigma\phi\alpha - \sqrt{3}) = -4$ .

**ΒΓ/79.** Α) Να δειχθεί ότι:  $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)$ .

Β) Να δειχθεί ότι:  $2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \eta\mu 5\alpha + \eta\mu\alpha$ .

Γ) Να δειχθεί ότι:  $\sigma\phi 3\alpha - \epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 5\alpha + \eta\mu\alpha}$

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $\sigma\phi 3x - \epsilon\phi 2x = \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu x}$

**ΒΓ/80.** Δείξτε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\epsilon\phi \frac{A}{2} \epsilon\phi \frac{B}{2} + \epsilon\phi \frac{B}{2} \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} + \epsilon\phi \frac{\Gamma}{2} \epsilon\phi \frac{A}{2} = 1$$

**ΒΓ/81.** Αν  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  και  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$  και  $\eta\mu\alpha = \frac{15}{17}$ ,  $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{12}{13}$ ,

υπολογίστε τα  $\eta\mu(\alpha + \beta)$  και  $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$ .

**ΒΓ/82.** Να λυθούν οι εξισώσεις:

Α)  $\epsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \epsilon\phi x = 1$

Β)  $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\phi x = 1$

Γ)  $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \epsilon\phi x = -1$  στο  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  Δ)

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{2}}{\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{5}\right) - \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}} = -2.$$

**ΒΓ/83.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.

Α) Αν  $\eta\mu(A - B) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$  δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

Β) Αν  $\sigma\upsilon\nu(A + B) = 1 - 2\eta\mu A \eta\mu B$  δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Γ) Αν  $\sigma\upsilon\nu(A - B) = 2\eta\mu A \eta\mu B$ , δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Δ) Αν  $\eta\mu A = 2\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma$ , δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**ΒΓ/84.** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $\frac{\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) - \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} = \sigma\phi B$ , και

$B \neq 90^\circ$  δείξτε ότι : Α)  $\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)$  Β)  $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$

Γ) Το τρίγωνο είναι ισοσκελές

**ΒΓ/85.** Α) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\varepsilon\phi A = 2$  και  $\varepsilon\phi B = 3$  βρείτε τη γωνία  $\Gamma$ .  
(Υπόδειξη:  $A+B+\Gamma=\pi$ , άρα  $\Gamma=\pi-(A+B)$   
κ.τ.λ.)

Β) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Αν  $\varepsilon\phi A = \frac{1}{3}$  και  $\varepsilon\phi B = \frac{1}{2}$  βρείτε τη γωνία  $\Gamma$ .

**ΒΓ/86.** Α) Να αποδειχθεί ότι: 
$$\frac{\varepsilon\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\sigma\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}$$

**ΒΓ/87.** Αν  $\sigma\phi\theta = \frac{1}{2}$  λύστε την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu(x + \theta) + 3\sigma\upsilon\nu(x - \theta) = 0$ .  
στο  $(-\pi, \pi)$ .

**ΒΓ/88.** Δείξτε ότι  $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\phi\alpha$  και  $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \sigma\phi\alpha$ .

**ΒΓ/89.** Δείξτε ότι  $\varepsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$ .

**ΒΓ/90.** Δείξτε ότι: Α)  $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\frac{\alpha}{2}$  Β)  $\frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\phi\alpha}{1 + \varepsilon\phi\alpha}$ .

**ΒΓ/91.** Δείξτε ότι  $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\phi\alpha$ .

**ΒΓ/92.** Δείξτε ότι  $\frac{1 + \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\phi\frac{\alpha}{2}$ .

**ΒΓ/93.** Δείξτε ότι  $\frac{\eta\mu 4\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha} \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\phi\alpha$ .

**ΒΓ/94.** Δείξτε ότι  $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\phi\frac{\alpha}{2}$ .

**ΒΓ/95.** Δείξτε ότι  $\varepsilon\phi(45^\circ - \alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}$ .

**ΒΓ/96.** Δείξτε ότι  $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\phi\alpha$ .

**ΒΓ/97.** Δείξτε ότι  $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha + \eta\mu\frac{\alpha}{2}} = \sigma\phi\frac{\alpha}{2}$ .

**ΒΓ/98.** Δείξτε ότι: Α)  $\frac{2\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\phi^2\frac{\alpha}{2}$ .

$$B) \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = \frac{\epsilon\varphi 2\alpha}{2}.$$

**BΓ/99.** Δείξτε ότι : A)  $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu^2\alpha} = 1 - \epsilon\varphi^2\alpha$

B)  $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{4}\eta\mu 4\alpha.$

Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις

**BΓ/100.** A)  $\sigma\upsilon\nu 2x + 3\eta\mu x = 2$

B)  $2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x = 0$

**BΓ/101.** A)  $\sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

B)  $\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu^2 2x = 1$

**BΓ/102.** A)  $\sigma\upsilon\nu 2x = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$

B)  $1 + \sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}.$

**BΓ/103.** A)  $\eta\mu 2x - 2\eta\mu x = 2\sigma\upsilon\nu x - 2$

B)  $\eta\mu 2x - \sqrt{2}\eta\mu x = 0.$

**BΓ/104.** A)  $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} = 0$

B)  $2\sigma\upsilon\nu x + 3 = 4\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}.$

**BΓ/105.** A)  $1 + \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x = 0$

B)  $1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}\eta\mu 2x.$

**BΓ/106.** A)  $1 + \sqrt{3}\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$

B)  $\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} = 2.$

**BΓ/107.** A)  $4\eta\mu^2 \frac{x}{2} - 2\eta\mu x + 2\eta\mu 2x = 1.$

B) Λύστε την εξίσωση:  $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - \sigma\upsilon\nu 2x$  στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

Γ)  $\eta\mu x(\sigma\varphi x - 1) = 0.$  Δ)  $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{4}.$  Ε)  $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{4}.$

ΣΤ)  $2\eta\mu x\epsilon\varphi x - 2\sqrt{3}\eta\mu x = \epsilon\varphi x - \sqrt{3}.$

**BΓ/108.** Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  δείξτε ότι  $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \leq \sigma\upsilon\nu^2\alpha.$

**BΓ/109.** A. Να αποδειχθεί ότι:  $\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\sigma\varphi 2\alpha.$

B) Αποδείξτε ότι :  $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2.$

Γ) Υπολογίστε την παράσταση:  $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\eta\mu 15^\circ} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sigma\upsilon\nu 15^\circ}.$

**ΒΓ/110.** Α) Συμπληρώστε την ισότητα:

$$\eta\mu\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha = \dots\dots\dots$$

Β) Δείξτε ότι :  $\frac{\sigma\upsilon\nu3\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu3\alpha}{2\eta\mu\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu2\alpha.$

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu3x}{2\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu3x}{2\eta\mu x}\right) + 5\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0.$

**ΒΓ/111.** Αν  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ , δείξτε ότι:

Α)  $(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta)^2 = 1$

Β)  $(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 = 3.$

**ΒΓ/112.** Α) Αν  $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{2}$  δείξτε ότι:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta.$$

Β) Αν  $\eta\mu(\alpha + \beta) = 2\eta\mu(\alpha - \beta)$  δείξτε ότι:  $\epsilon\phi\alpha = 3\epsilon\phi\beta.$

Γ) Αν  $2\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = 1 + 4\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$  και  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  δείξτε ότι:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}.$$

**ΒΓ/113.** Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των τόξων των

$$75^\circ \text{ και } \frac{7\pi}{12} \qquad \left(\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

**ΒΓ/114.** Α) Λύστε την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu(2x + \alpha) = 1 + \alpha^2$  με  $\alpha \in \mathbb{R}.$

Β) Αν  $(2 + \eta\mu y)(1 - \sigma\upsilon\nu x) = (2 + \eta\mu x)(\eta\mu y - 1)$  βρείτε τα  $x, y \in \mathbb{R}.$

**ΒΓ/115.** Αν  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  να δείξετε ότι  $\frac{\eta\mu\alpha}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu2\alpha}} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu2\alpha}} = 0.$

**ΒΓ/116.** Λύστε την εξίσωση:

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu3x - \sigma\upsilon\nu3x) = 1 - \eta\mu4x.$$

**ΒΓ/117.** Αν  $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{3}$  και  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , να υπολογίσετε το  $\eta\mu2\theta$  και την  $\epsilon\phi2\theta.$

**ΒΓ/118.** Αν  $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ , να αποδείξετε ότι  $\epsilon\phi\beta = \frac{1 - \epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi\alpha}$  και

$$(1 + \epsilon\phi\alpha)(1 + \epsilon\phi\beta) = 2. \qquad (\text{όταν ορίζονται οι } \epsilon\phi\alpha \text{ και } \epsilon\phi\beta)$$

**ΒΓ/119.** Αν  $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$  και  $\eta\mu x > 0$ , να υπολογίσετε το  $\eta\mu 2x$  και το  $\sigma\upsilon\nu 2x$ .

**ΒΓ/120.** Αν  $3\sigma\upsilon\nu 2x - 32\sigma\upsilon\nu x - 21 = 0$  και  $\pi < x < 2\pi$  υπολόγισε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου  $\frac{x}{2}$ .

**ΒΓ/121.** Αν  $5\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ :

A) Βρείτε το  $\sigma\upsilon\nu x$

B) Βρείτε το  $\eta\mu x$

Γ) Βρείτε το  $\eta\mu 2x$

Δ) Βρείτε τις  $\epsilon\phi x$  και  $\epsilon\phi\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**ΒΓ/122.** Αν η εξίσωση  $4\sigma\upsilon\nu x + \lambda\sigma\upsilon\nu 2x - 3\lambda = 0$  έχει λύση  $x = \frac{2\pi}{3}$  βρείτε όλες τις λύσεις.

**ΒΓ/123.** Αν η εξίσωση  $\lambda^2 + \sigma\upsilon\nu 2x = 1 + 6\eta\mu^2 x$  έχει λύση  $x = \frac{\pi}{6}$  βρείτε όλες τις λύσεις.

**ΒΓ/124.** Να αποδείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu^4 \theta + \eta\mu^4 \theta = \frac{3 + \sigma\upsilon\nu 4\theta}{4}$ .

**ΒΓ/125.** Αν  $\epsilon\phi x = \frac{\alpha}{\beta}$  αποδείξτε ότι  $\beta\eta\mu 2x - \alpha\sigma\upsilon\nu 2x = \alpha$ .

(Υπόδειξη: Διαιρέστε με το  $\beta$ )

**ΒΓ/126.** Υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του  $2\alpha$  αν

α)  $\sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{3}{5}$  και  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

β)  $\eta\mu \alpha = -\frac{4}{5}$  και  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**ΒΓ/127.** Υπολογίστε: α) το  $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$  όταν  $\sigma\upsilon\nu \alpha = -\frac{1}{3}$  και  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

β) το  $\eta\mu 2\alpha$  αν  $\eta\mu \alpha = \frac{3}{5}$  και  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

γ) την  $\epsilon\phi 2\alpha$  αν  $\epsilon\phi \alpha = \frac{1}{3}$ .

δ) το  $\eta\mu 2\alpha$  και το  $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$  αν  $\epsilon\phi \alpha = \frac{1}{7}$ .

**ΒΓ/128.** Υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου  $\frac{\pi}{12}$ .

**ΒΓ/129.** Δείξτε ότι  $(\sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \beta)^2 + (\eta\mu \alpha + \eta\mu \beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

**ΒΓ/130.** A) Αν  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$ , υπολόγισε το  $\eta\mu 2x$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**BΓ/131.** Αν  $0 \leq x \leq \pi$  και  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{5}$  να προσδιορίσετε:

α) το  $\eta\mu 2x$  και β) το  $\eta\mu x$  και το  $\sigma\upsilon\nu x$ .

**BΓ/132.** Αν  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$  υπολογίστε τα  $\eta\mu 2x$ ,  $\eta\mu x$ ,  $\sigma\upsilon\nu x$ .

**BΓ/133.** Αν  $\alpha + \beta = \gamma$ , δείξτε ότι  $\epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta = \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta \cdot \epsilon\phi\gamma$ .

**BΓ/134.** Να λυθούν οι εξισώσεις:  $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  και

$$\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{4}.$$

**BΓ/135.** Έστω τρίγωνο ABΓ. Αν οι  $\epsilon\phi A, \epsilon\phi B$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + 6x + 2\sqrt{3} + 1 = 0$ , τότε:

A) Να δείξετε ότι  $\epsilon\phi(A+B) = \sqrt{3}$ , και

B) Να βρείτε τη γωνία Γ του τριγώνου.

**BΓ/136.** A) Δείξτε ότι  $\eta\mu^4 \frac{\pi}{12} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{12} = \frac{7}{8}$  (Υπόδειξη:  $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ )

B) Να λυθεί η εξίσωση:  $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \frac{5}{8}$ .

Γ) Ναδειχθεί ότι:  $\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} - \sigma\upsilon\nu^4 \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{16}$ .

Δ) Ναδειχθεί ότι:  $\epsilon\phi^2 \frac{\pi}{12} + \epsilon\phi^2 \frac{5\pi}{12} = 14$ .

**BΓ/137.** A) Να αποδείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

(Υπόδ.:  $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu 2\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$ )

B) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{8}\right) \cdot \left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

(Υπόδ.: Τα  $\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$  είναι παραπληρωματικά. Το ίδιο και τα  $\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ )

**BΓ/138.** A) Αν  $\sigma\phi\alpha = 3$  να λυθεί η εξίσωση:  $\epsilon\phi(2x + \alpha) = 2$ .

B) Αν  $\sigma\phi\alpha = -2$  να λυθεί η εξίσωση:  $3\sigma\upsilon\nu(x - \alpha) = \sigma\upsilon\nu(x + \alpha)$ .

Γ) Αν  $\varepsilon\varphi\alpha = 5$  να λυθεί η εξίσωση:  $3\eta\mu(\alpha - x) = 2\eta\mu(x + \alpha)$ .

Δ) Αν  $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3}$  να λυθεί η εξίσωση:  $\varepsilon\varphi(x + \alpha) = 2$ .

**ΒΓ/139.** Αν  $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$  και  $\varepsilon\varphi(2\alpha + \beta) = 2$ , τότε

A) Δείξτε ότι  $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3}$ .

B) Λύστε τις εξισώσεις i)  $\sigma\varphi(x - \alpha) = 2$

ii)  $2\eta\mu(x + \alpha) - \eta\mu(x - \alpha) = 0$ .

**ΒΓ/140.** Αν  $\beta = \frac{\pi}{8} + \alpha$  και  $\varepsilon\varphi(3\alpha - 2\beta) = \frac{1}{3}$ :

A) Δείξτε ότι:  $\varepsilon\varphi\alpha = 2$

B) Λύστε την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu(x + \alpha) = -3\sigma\upsilon\nu(x - \alpha)$ .

**ΒΓ/141.** Αν  $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda + 2}$  και  $\sigma\varphi\omega = \frac{\lambda + 2}{4\lambda - 5}$  με  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ , βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του  $\omega$ .

**ΒΓ/142.** A) Αν  $f(x) = \eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$  να την γράψετε στη μορφή  $f(x) = \rho\eta\mu(x + \varphi)$  και λύστε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

B) Όμοια για την  $g(x) = -\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ .

**ΒΓ/143.** Να λυθούν οι εξισώσεις: A)  $\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$

B)  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$  Γ)  $-3\eta\mu x = 3 - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$  Δ)

$\eta\mu \frac{x}{2} = \sqrt{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ .

**ΒΓ/144.** A) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \sigma\upsilon\nu 2x$

B) Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ .

Γ) Βρείτε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα  $[-\pi, 3\pi]$ .

**ΒΓ/145.** Αν  $[2\sigma\upsilon\nu(4\pi - x) + 1] \cdot \left[ 5\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - 4 \right] = 0$  και  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

τότε: A) Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$ .

B) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$ .

Γ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $2x$ .



**ΒΓ/146.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ ,

$x \in \mathbb{R}$ . Α) Να δείξετε ότι:  $f(x) = 2\eta\mu 3x$ .

Β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x \in (0, 2\pi)$  η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της και ποια είναι αυτή.

Γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ .

**ΒΓ/147.** Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\phi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}.$$

Α) Να δείξετε ότι:  $K = \eta\mu^2 \omega - 1$ .

Β) Να λύσετε την εξίσωση:  $K = 0$  στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $2K + \eta\mu\omega + 1 = 0$ .

**ΒΓ/148.** Για τη γωνία  $\alpha$  ισχύει ότι:  $5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0$

Α. Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$ .

Β. Αν επιπλέον ισχύει  $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ , να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\eta\mu 2\alpha$ ,  $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$  και  $\epsilon\phi 2\alpha$ .

(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2001)

**ΒΓ/149.** Για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  να αποδείξετε ότι:

$\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1)\eta\mu x$  και να βρείτε εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  ώστε:  $\sigma\upsilon\nu 2x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ .

(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2003)

**ΒΓ/150.** Α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$ .

Β) Να αποδείξετε ότι  $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$  για όλες τις τιμές του  $\alpha$  που ορίζεται η ισότητα.

(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2004)

# Πολυώνυμο

Καμιά ανθρώπινη έρευνα δεν μπορεί να ονομαστεί αληθινή επιστήμη αν δεν περνά μέσα από μαθηματικές αποδείξεις .  
Leonardo da Vinci

## ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

### \* ΘΕΩΡΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ . Είναι δηλαδή  $\upsilon = P(\rho)$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x - \rho$  γράφεται:  $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon(x)$ .

Επειδή ο διαιρέτης  $x - \rho$  είναι πολυώνυμο 1<sup>ου</sup> βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο  $\upsilon$ . Έτσι έχουμε:

$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$  και αν θέσουμε  $x = \rho$  παίρνουμε:

$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon \Leftrightarrow P(\rho) = \upsilon$ .

### \* ΘΕΩΡΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - \rho$  αν και μόνο αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $P(\rho) = 0$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν το  $x - \rho$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ , τότε:  $P(x) = (x - \rho)\pi(x)$ . Από την ισότητα αυτή για  $x = \rho$  παίρνουμε  $P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$  δηλαδή το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ .

Αντίστροφα: Αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$  θα είναι  $P(\rho) = 0$ . Τότε στην ταυτότητα της διαίρεσης:  $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + \upsilon$  είναι:  $\upsilon = P(\rho) = 0$ . Άρα  $P(x) = (x - \rho)\pi(x)$  που σημαίνει ότι το  $x - \rho$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

### \* ΘΕΩΡΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση  $\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ , με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος  $\rho \neq 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο  $\rho$  είναι διαιρέτης του σταθερού όρου  $\alpha_0$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν ο ακέραιος  $\rho \neq 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε έχουμε:

$$\alpha_v \rho^v + \alpha_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_v \rho^v - \alpha_{v-1} \rho^{v-1} - \dots - \alpha_1 \rho \Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 = \rho(-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_1).$$

Αλλά οι  $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$  είναι ακέραιοι οπότε και ο  $-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_1$  είναι ακέραιος. Ο  $\rho$  προφανώς διαιρεί το δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας άρα και το πρώτο. Δηλαδή ο  $\rho$  διαιρεί τον  $\alpha_0$ .

**BΔ/01.**Βρείτε την τιμή του πραγματικού  $\lambda$  για την οποία το πολυώνυμο  $P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$  είναι μηδενικό .

**BΔ/02.**Βρείτε για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το βαθμό του πολυωνύμου  $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda + 2$ .

**BΔ/03.**Αν το  $P(x) = (9\lambda^3 - \lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 1)x^2 + 3\lambda - 1$  είναι 2<sup>ον</sup> βαθμού, να βρείτε το  $\lambda$ .

**BΔ/04.**Βρείτε τα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  ώστε τα  $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x + \alpha$  και  $Q(x) = (\beta - 1)x^3 + (\beta + \gamma)x^2 - 2\delta x + 1 + \delta$  να είναι ίσα .

**BΔ/05.** Αν  $P(x) = 2x - 1$  και  $Q(x) = x^2 + x - 1$  να υπολογίσετε τα πολυώνυμα:  $P(x) + Q(x)$  ,  $2P(x) - Q(x)$  ,  $P(x) \cdot Q(x)$  ,  $P^2(x) + 2Q(x)$  ,  $P(x) \cdot Q(x) - 3P(x)$ .

**BΔ/06.**Βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$  για το οποίο ισχύει:  
 $(x - 3)P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ .

**BΔ/07.**Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$  έχει ρίζα το  $-1$  , να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει για το  $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$ .

**BΔ/08.**Αν για το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι:  $P(3x + 5) = x^3 - x^2 + 12$  , να δείξετε ότι το  $-1$  είναι ρίζα του  $P(x)$ .

**BΔ/09.**Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει ως ρίζα το  $1$  , να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $Q(x) = P(x^2 - 3) + (x - 2)P(3x)$  έχει ρίζα το  $2$ .

**BΔ/10.**Να βρεθεί το πολυώνυμο  $P(x)$  τρίτου βαθμού , το οποίο να έχει ρίζα το  $0$  και να ικανοποιεί τη σχέση:  $P(x-1) = P(x) - x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

**BΔ/11.**Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^2 + 2x + 5$  . Να προσδιοριστεί ο πραγματικός  $\alpha$  αν ισχύει  $P(\alpha - 1) = 13$ .

**BΔ/12.**Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^2 - (2\alpha + 1)x + 2\beta$  και  $Q(x) = x^2 - (\beta + 2)x + 5\alpha$  . Προσδιορίστε τους  $\alpha, \beta$  αν ο αριθμός  $3$  είναι κοινή ρίζα των  $P(x)$  και  $Q(x)$  .

**BΔ/13.**Το πολυώνυμο  $P(x)$  το οποίο για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  ικανοποιεί την ταυτότητα  $xP(x) = (x - 3)P(x + 1)$  έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες . Βρείτε τρεις από τις ρίζες αυτές .

**BΔ/14.** Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί σε κάθε περίπτωση η ταυτότητα της διαίρεσης:

- A)  $(x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^2 - x + 1)$     B)  $(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (2x + 1)$   
 Γ)  $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$     Δ)  $(x^4 - x^2 + 1) : (x^2 - 1)$   
 E)  $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$     ΣΤ)  $(2x^4 + 2x^3 + 3x^2) : (2x^2 + 1)$   
 Ζ)  $(x^4 - 2x^2 + 3x - 2) : (x^2 + x + 1)$     Η)  $(3x^3 - 4\alpha^2x + \alpha^3) : (x - 2\alpha)$   
 Θ)  $(3x^3 - 4\alpha x^2 - 8\alpha^3) : (x - 2\alpha)$     Ι)  $(x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha^2x - 8\alpha^3) : (x - 2\alpha)$   
 ΙΑ)  $(x^4 - \alpha^4) : (x + \alpha)$     ΙΒ)  $(x^3 - 2\alpha^2x - 21\alpha^3) : (x - 3\alpha)$

| Οι εκφράσεις:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | σημαίνουν:    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Το <math>\rho</math> είναι ρίζα του <math>P(x)</math></li> <li>• Το <math>x - \rho</math> είναι παράγοντας του <math>P(x)</math></li> <li>• Το <math>x - \rho</math> διαιρεί το <math>P(x)</math></li> <li>• Το <math>P(x)</math> διαιρείται από το <math>x - \rho</math></li> <li>• Η διαίρεση <math>P(x) : (x - \rho)</math> είναι τέλεια.</li> <li>• Το υπόλοιπο της διαίρεσης <math>P(x) : (x - \rho)</math> είναι μηδέν</li> </ul> | $P(\rho) = 0$ |

**BΔ/15.** Βρείτε το πολυώνυμο  $F(x)$  το οποίο αν διαιρεθεί με το  $x^2 + 1$  δίνει πηλίκο  $3x - 1$  και υπόλοιπο  $2x + 5$ .

**BΔ/16.** Α) Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 - \alpha x + \beta$ . Να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το πολυώνυμο έχει ρίζες  $1, 2$ .

Β) Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + (2\alpha + 1)x^2 + (\alpha - \beta)x + 1$ .

Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε το  $P(x)$ , να έχει παράγοντα το  $x - 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x + 1$ , να είναι 8.

**BΔ/17.** Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$  διαιρείται ακριβώς με το  $x - 2$  και ισχύει  $P(1) = 8$ .

**BΔ/18.** Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το  $P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$  έχει παράγοντα το  $x - 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $x + 2$  είναι 3.

**BΔ/19.** Βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν το  $P(x) = x^4 - \alpha x^2 - 3x + \beta$  έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $x - 2$  είναι 5.

**BΔ/20.**Α) Έστω το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 5x + 4$ . Να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η διαίρεση του  $P(x)$  με το  $x+1$  να αφήνει υπόλοιπο 6, ενώ η διαίρεση του με το  $x-1$  να αφήνει υπόλοιπο 2.

Β) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $Q(x)$  με το  $x^2 + x - 2$  είναι  $3x + 1$  βρείτε το υπόλοιπο των διαιρέσεων:  $Q(x) : (x-1)$  και  $Q(x) : (x+2)$ .

**BΔ/21.**Α) Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$  διαιρείται με το  $x^2 - x - 6$ , να προσδιορίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**BΔ/22.** Α) Αν  $P(x) = x^4 - x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$  να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το  $P(x)$  διαιρούμενο δια  $x^2 - 3x + 2$  να δίνει υπόλοιπο 2.

Β) Αν  $P(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta$  να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το  $P(x)$  διαιρούμενο δια  $x^2 - x - 2$  να δίνει υπόλοιπο  $2x - 1$ .

**BΔ/23.**Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - (\alpha + 1)x^2 + \beta x - 1$  έχει παράγοντα το  $x^2 - 3x + 2$  να προσδιορίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .

**BΔ/24.**Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + (\beta + 2)x + 3$  έχει παράγοντα το  $x^2 + x - 2$  να προσδιορίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**BΔ/25.**Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $3x^2 - x - 4$  είναι  $2x + 5$ , να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x + 1$ .

**BΔ/26.**Το πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x - 2$  αφήνει υπόλοιπο 10, ενώ διαιρούμενο με το  $x + 3$  αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $(x - 2)(x + 3)$ .

**BΔ/27.**Το πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x + 1$  αφήνει υπόλοιπο 2, ενώ διαιρούμενο με το  $x - \frac{1}{2}$  αφήνει υπόλοιπο  $\frac{3}{2}$ . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $2x^2 + x - 1$ .

**BΔ/28.**Έστω πολυώνυμο  $P(x)$  με ακέραιους συντελεστές και  $P(1) = P(3) = 5$ . Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - 4x + 3)$  είναι  $\nu = 5$ .

**BΔ/29.**Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $Q(x)$  με το  $x - 5$  είναι 3 και για το πολυώνυμο  $P(x)$  ισχύει:  $P(2x + 1) = x^2 \cdot Q(3x + 2) + x^2 - 3$ , να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 3$ .

**BΔ/30.**Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε οι παρακάτω ισότητες να ισχύουν για όλες τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ορίζονται τα κλάσματα.

A)  $\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$

B)  $\frac{2}{x^2-x} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1}$

Γ)  $\frac{3x+1}{x^2-x-6} = \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x+2}$

Δ)  $\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-1}$

**BΔ/31.**Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων:

A)  $(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$

B)  $(x^4 - x^2 + x + 1) : (x + 1)$

Γ)  $(3x^4 - 2x^2 + x - 2) : (x - 1)$

Δ)  $(x^4 - 3x^2 - 2) : (x + 3)$

E)  $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x - 14) : (x - 2)$

ΣΤ)  $(x^5 - 3x^2 + x + 1) : (x - 1)$

Z)  $(x^4 + 1) : (x + 1)$

H)  $(4x^3 - 6x^2 - 15) : (2x - 5)$

Θ)  $(5x^3 + 8x^2 + 6x + 1) : (5x - 2)$

I)  $(x^6 - x^3 + 3x^2 - 2x - 64) : (x - 2)$

ΙΑ)  $(5x^2 - 2\alpha x - 3\alpha^2) : (x - \alpha)$

ΙΒ)  $(x^3 - \alpha x^2 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3) : (x - 2\alpha)$

**BΔ/32.**Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 11x + 7$ .

Ναδειχθεί ότι το  $(x-1)^2$  διαιρεί το πολυώνυμο και να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης.

**BΔ/33.**Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρείτε τα πηλικά και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

A) Του  $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$  με το  $(x-2)^2$ .

B) Του  $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$  με το  $(x-1)(x-2)$ .

Γ) Του  $R(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$  με το  $(x-1)^2$ .

**BΔ/34.**Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x - 6$  να διαιρείται με το  $R(x) = (x-1)^2$ . Στη συνέχεια λύστε την  $P(x) = 0$ .

**BΔ/35.**Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - \alpha x + \beta$  να διαιρείται με το  $(x-2)^2$ .

**BΔ/36.**Προσδιορίστε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το  $x+1$  να είναι παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x) = x^4 - (\lambda-7)x^3 + (\lambda+3)x^2 + 5x + 2\lambda$  και στη συνέχεια λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**ΒΔ/37.** Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε το  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$  να έχει παράγοντα το  $x^2 + 1$ .

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

**ΒΔ/38.** Α)  $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

Β)  $3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$

Γ)  $6x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$

Δ)  $6x^4 + 5x^3 - 23x^2 - 20x - 4 = 0$ .

Ε)  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0$

ΣΤ)  $4x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$

**ΒΔ/39.** Α)  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

Β)  $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

Γ)  $6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = 0$

Δ)  $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0$

**ΒΔ/40.** Α)  $x^3 + x^2 + 3x + 27 = 0$

Β)  $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$

Γ)  $3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 = 0$

Δ)  $x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$

**ΒΔ/41.** Α)  $5x^3 - 7x^2 + 9x - 7 = 0$

Β)  $x^4 + 5x^2 + 5x = 5x^3 + 6$

Γ)  $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0$

Δ)  $\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3} = 0$ .

**ΒΔ/42.** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$2x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x = 0$  και  $2(2x-1)^{1998} + (4x-1)^{1997} = 4x+1$ .

**ΒΔ/43.** Α) Να βρεθεί ένα πολυώνυμο  $P(x)$  για το οποίο να ισχύει

$(2x-3)P(x) = 12x^3 - 8x^2 + x - 24$  και να λυθεί η εξίσωση :

$12x^3 - 8x^2 + x - 6 = 18$ .

Β) Να βρεθεί ένα πολυώνυμο  $P(x)$  για το οποίο να ισχύει

$(3x-2)P(x) = 6x^3 - 7x^2 - x + 2$  και να λυθεί η εξίσωση :

$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ .

**ΒΔ/44.** Να βρεθούν οι ρίζες της  $x^3 - 13x^2 + 15x + 189 = 0$ , αν δύο απ'

αυτές διαφέρουν κατά 2. (Υπόδειξη: Έστω  $\rho$  και  $\rho+2$  οι ρίζες, κάνω Horner για τη  $\rho$  οπότε το υπόλοιπο που θα βρω πρέπει να έχει ρίζα  $\rho+2$ )

**ΒΔ/45.** Δίνεται η εξίσωση  $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ .

Αν  $\alpha\gamma > 0$  και  $\beta\gamma = \alpha\delta$ , δείξτε ότι έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ . (Υπόδ:  $\delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ )

**ΒΔ/46.** Αν  $k$  ακέραιος να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $5x^{2\nu} + 9kx - 1 = 0$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

**ΒΔ/47.** Α)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

Β)  $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

Γ)  $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 < 0$

Δ)  $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

**ΒΔ/48.** Α)  $x^4 + x^3 \geq 3x^2 + 4x + 4$

Β)  $2x^3 + 3x^2 + 4 < x^4 + 8x$

Γ)  $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

Δ)  $x^3(x+1) - 2 > x(x-1)$

**ΒΔ/49.** Α)  $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

Β)  $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

Γ)  $x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$

Δ)  $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 > 0$

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

**ΒΔ/50.** Α)  $\frac{x^3 - 11x}{x-9} = \frac{2}{x-1}$

Β)  $\frac{x}{x-1} + \frac{6}{x-3} = -\frac{6}{x^2 - 3x + 2}$

Γ)  $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4x-8}{x} - \frac{x+2}{x^2 - 2x}$

Δ)  $\frac{2x^2}{x+2} = \frac{3x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2 + x - 2}$

Ε)  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

ΣΤ)  $x^2 + \frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x(2x-1)}$

**ΒΔ/51.** Α)  $2\eta\mu^3x + 5\eta\mu^2x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

Β)  $2\eta\mu^3x - 5\eta\mu^2x - 4\eta\mu x + 3 = 0$  Γ)  $2\eta\mu^3x + 5\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu x - 3 = 0$

**ΒΔ/52.** Α)  $2\eta\mu^3x + 2\sigma\upsilon\nu^2x - \eta\mu^2x - 3\eta\mu x = 0$

Β)  $2\sigma\upsilon\nu^4x - 3\sigma\upsilon\nu^3x - 4\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$

**ΒΔ/53.**  $\frac{2(x-1)^2}{x} + \frac{x^2 - 2x + 12}{x^2 - 4x} = \frac{5}{x-4}$

**ΒΔ/54.** Α)  $\sqrt{x+2} = x-4$

Β)  $\sqrt{2x+1} = x-1$

Γ)  $\sqrt{2x-1} = x-2$

Δ)  $x + \sqrt{5x+10} = 8$

**ΒΔ/55.** Α)  $\sqrt{2x+2} + 3 = x$

Β)  $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x-4$

Γ)  $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{2x+3}$

Δ)  $\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x+1}$

**ΒΔ/56.** Α)  $\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2x} = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$  Β)  $\sqrt[3]{3x+5} = x+1$  Γ)  $\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{3-x}$

**ΒΔ/57.** Α)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$  Β)  $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+5} = 1$

**ΒΔ/58.** Α)  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x-2}$  Β)  $\sqrt{2-x} + \frac{4}{3 + \sqrt{2-x}} = 2$

**ΒΔ/59.** Α)  $2\sqrt{\frac{5x-8}{x-2}} + 5\sqrt{\frac{x-2}{5x-8}} = 7$  Β)  $x = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3.$

**ΒΔ/60.** Να λυθούν οι ανισώσεις: Α)  $\sqrt{5-x} \geq \sqrt{x-1}$

Β)  $\sqrt{x} \leq x+4$

Γ)  $\sqrt{2x+5} < 2x-1$

Δ)  $\sqrt{5-x} \geq x+1$

**ΒΔ/61.** Α)  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4}$

Β)  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Γ)  $(x^2 - 6x)^2 + 13(x^2 - 6x) + 40 = 0$

Δ)  $x^5 - 4x^3 + 3x = 0$

Ε)  $x^4 + x^2 - 2 = 0$

ΣΤ)  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$



**BΔ/62.** A)  $(x^2 + x)^6 - 7(x^2 + x)^3 - 8 = 0$  B)  $x^{20} + 5x^{13} - 6x^6 = 0$

Γ)  $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x - 1) + 4 = 0$  Δ)  $x^5 - 5x^2 + 4 = 0$

E)  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$  ΣΤ)  $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} - 4 = 0$

Z)  $(x-1)^4 - 13(x-1)^2 + 36 = 0$

**Να λυθούν οι ανισώσεις:**

**BΔ/63.** A)  $\frac{2x-1}{x-3} < 0$  B)  $\frac{x^2-3x+2}{x+1} \geq 0$  Γ)  $\frac{x^2-7x+12}{x^2-17x+60} < 0$

Δ)  $\frac{(4-x^2)^3(x^2-2x-3)^5}{(x^2-5x)^2} \leq 0$  E)  $\frac{2x+1}{x-5} > 0$  ΣΤ)  $\frac{x^2+x}{x} \geq 0$

Z)  $\frac{x^2}{x+2} < 1$  H)  $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{3x+1}$  Θ)  $\frac{2x^2+x+6}{x-1} > -4.$

I)  $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2+3x+2} \leq 0$  ΙΑ)  $\frac{x^3-3x+2}{x^3+x} \geq 0$  ΙΒ)  $\frac{x^4+x^3-x-1}{2x^3-x-1} < 0.$

**BΔ/64.** A)  $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} \geq 0$  B)  $\frac{x-5}{x-3} \geq \frac{x-2}{x-1}$  Γ)  $\frac{x^2}{x+2} > 1$

Δ)  $\frac{x^2}{2x+3} + 1 < \frac{5x+1}{2x+3}$  E)  $\frac{x^3+3x-6}{x-4} + 2x > 0$  ΣΤ)  $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-2} < 1$

**BΔ/65.** A)  $\frac{6x^2-3x+9}{x^2-5x+6} \geq 6$  B)  $\frac{5}{x+2} + \frac{1}{x+3} > \frac{7}{6}$

Γ)  $x^2 \geq x - \frac{2(x^2-x-1)}{x-3}$  Δ)  $\frac{2x^2}{x^2-1} > \frac{1}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{x+1}$

**BΔ/66.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 2x^2 + \alpha x + \beta$  έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 .

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  .

B) Λύστε την εξίσωση :  $P(x) = 0$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση :  $P(x) < 0$ . Δ) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = -18x$ .

**BΔ/67.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta$  έχει παράγοντα το  $x-2$  και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $x+1$  είναι  $-6$  :

A) Συμπληρώστε τα :  $P(2) = \dots\dots\dots$  και  $P(-1) = \dots\dots\dots$

B) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  .

Γ) Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$  λύστε την εξίσωση :  $P(x) = 0$

Δ) Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = 2$  λύστε την ανίσωση :  $P(x) < 0$ .

Ε) Δείξτε ότι:  $P(-\sqrt{2}) \cdot P\left(\frac{3}{4}\right) \cdot P\left(\frac{6}{5}\right) > 0$

ΣΤ) Λύστε την εξίσωση :  $2\sigma\upsilon\nu^3x + 5\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

**ΒΔ/68.** Έστω το πολυώνυμο  $f(x) = \lambda x^3 + 2\lambda^3 x^2 - \lambda^2 x - 2$ .

Α) Να βρείτε για ποια  $\lambda$  το  $x - 1$  είναι παράγοντας του  $f(x)$ .

Β) Για τις τιμές του  $\lambda$  που βρήκατε στο Α) λύστε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

**ΒΔ/69.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 + 2\alpha x + 2 - \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Α. Αν το 1 είναι ρίζα του  $P(x)$  βρείτε το  $\alpha$ .

Β. Βρείτε το ηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 1)$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $x^3 + 4 = x^2 + 4x$ .

Δ. Να λύσετε την ανίσωση:  $P(x) \geq 0$ .

**ΒΔ/70.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 3$  έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες:

Α) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  Β) Λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$

Γ) Λύστε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$

Δ) Δείξτε ότι:  $P\left(-\frac{10}{3}\right) \cdot P\left(\frac{1}{8}\right) \cdot P(\sqrt{2}) \cdot P(\pi) > 0$

**ΒΔ/71.** Αν το  $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - 7x^2 + x + \beta$  έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $x - 2$  είναι  $-12$  :

Α) Συμπληρώστε τα :  $P(1) = \dots\dots\dots$  και  $P(2) = \dots\dots\dots$

Β) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  . Γ) Λύστε την εξίσωση :  $P(x) = 0$

Δ) Βρείτε τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = P(x)$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$  .

**ΒΔ/72.** Αν το  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta$  έχει παράγοντα το  $x - 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το  $x - 2$  είναι 12:

Α) Συμπληρώστε τα :  $P(1) = \dots\dots\dots$  και  $P(2) = \dots\dots\dots$

Β) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  .

Γ) Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$  λύστε την εξίσωση :  $P(x) = 0$

Δ) Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$  λύστε την ανίσωση :  $P(x) < 0$ .

Ε) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $P(-\pi)$  και  $P\left(-\frac{31}{27}\right)$

ΣΤ) Λύστε την εξίσωση :  $\sigma\upsilon\nu^4x + \sigma\upsilon\nu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ .

**ΒΔ/73.** Θεωρούμε το πολυώνυμο:  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 7x + 4$ , για το οποίο ισχύει:  $P(1) = P(0) - 4$ .

- A) Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ . B) Να λύσετε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .  
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .  
 Δ) Δείξτε ότι:  $P(-3) \cdot P(5) \cdot P(3) \cdot P(-7) \neq 0$ .

**ΒΔ/74.** Θεωρούμε το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - (\alpha - 3)x^3 + \beta x^2 - x - 2$ , το οποίο έχει παράγοντα το  $x + 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το  $x - 1$  είναι  $-4$ . A) Να δείξετε ότι  $\alpha = 4$  και  $\beta = -1$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ . Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

**ΒΔ/75.** Αν το  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 4x + 4$  έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το  $x - 2$  :

- A) Συμπληρώστε τα :  $P(1) = \dots\dots\dots$  και  $P(2) = \dots\dots\dots$   
 B) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Γ) Λύστε την εξίσωση :  $P(x) = 0$   
 Δ) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = -5x + 5$ .  
 E) Βρείτε τα  $x \in \mathbb{R}$  για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = P(x)$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

**ΒΔ/76.** Δίνεται το:  $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx + 8$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ώστε  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 11$ .

- A) να δείξετε ότι  $k = 6$ .  
 B) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (2x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.  
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq 11$ .

**ΒΔ/77.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3$  έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες:

- A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . B) Λύστε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .  
 Γ) Αφού κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 - x - 2)$  και γράψετε την ταυτότητά της, λύστε την ανίσωση  $P(x) < 5x - 11$ .

**ΒΔ/78.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$  έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες που διαφέρουν κατά 1:

- A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . B) Λύστε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .  
 Γ) Αφού κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x - 3)$ , γράψτε την ταυτότητά της και λύστε την ανίσωση  $P(x) < 10$ .

**ΒΔ/79.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 3x + 5$ .

- A) Να γίνει η διαίρεση:  $P(x) : (2x - 1)$  και να γραφτεί η ταυτότητά της.  
 B) Να λυθεί η εξίσωση:  $P(x) = 3$ .  
 Γ) Να λυθεί η ανίσωση:  $(x - 1)[P(x) - 3] < 0$ .

**BΔ/80.** Αν  $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + \beta$ .

A) Βρες το  $\beta$  αν η διαίρεση  $P(x) : (2x - 1)$  έχει υπόλοιπο 3.

B) Λύσε την ανίσωση  $P(x) \leq 3$ .

**BΔ/81.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 18x^3 - 27x^2 + kx + 1$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

A) Βρείτε το  $k$  ώστε διαίρεση:  $P(x) : (x - 1)$  να δίνει υπόλοιπο 5.

B) Για  $k = 13$  να γίνει η διαίρεση:  $P(x) : (3x - 2)$  και να γραφεί η ταυτότητά της.

Γ) Για  $k = 13$  να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 3$ .

**BΔ/82.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x^2 - \alpha x + \beta$  έχει παράγοντα το  $x^2 - 2$ :  
A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

B) Βρείτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

**BΔ/83.** Έστω  $P(x) = 12x^3 - 4x^2 + \alpha x + \beta$ . Αν το  $P(x)$  έχει ρίζα το 1 και διαιρούμενο με το  $x + 1$  αφήνει υπόλοιπο  $-22$ :

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

B) Να γίνει η διαίρεση του  $P(x)$  με το  $6x^2 - 5x + 1$  και να γραφεί η ταυτότητά της.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση:  $P(x) > 2x - 8$ .

**BΔ/84.** Αν  $P(x) = x^9 - 12x^6 + 35x^3 + \alpha$  να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το  $x - 1$  να είναι παράγοντας του  $P(x)$ . Για τις τιμές που θα βρείτε να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**BΔ/85.** Δίνεται το  $P(x) = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^7 - (\lambda^2 - 6\lambda + 8)x^6 - 6x^4 + \alpha x^2 + \beta$  με  $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

A) Αν το πολυώνυμο είναι 6<sup>ο</sup> βαθμού δείξτε ότι  $\lambda = 3$ .

B) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 2$  είναι 6 και το  $x + 1$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ :

B1) Βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

B2) Λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

B3) Λύστε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

B4) Λύστε την εξίσωση:  $2\eta\mu^3 x + \frac{5}{1 + \varepsilon\phi^2 x} - 4\eta\mu x - 2 = 0$ .

**BΔ/86.** Δίνεται το  $A(x) = x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 - (\alpha + 1)x + 8$  με  $\alpha \in \mathbb{Z}$  και

$B(x) = x^2 - x + 1$ . Αν ισχύει:  $A(-9) \cdot A(-3) \cdot A(5) \cdot A(2) = 0$ :

A) Δείξτε ότι  $\alpha = 9$ .

Β) Γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης  $A(x) : B(x)$ .

Γ) Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + \beta x + \gamma$  έχει παράγοντα το πηλίκο της  $A(x) : B(x)$  βρείτε τα  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και λύστε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

**ΒΔ/87.** Δίνεται το πολυώνυμο  $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ .

α. Να αποδείξετε ότι το  $x+1$  είναι παράγοντας του  $f(x)$  και να βρείτε το πηλίκο  $\pi(x)$  της διαίρεσης του  $f(x)$  με το  $x+1$ .

β. Να αποδείξετε ότι το  $x-2$  είναι παράγοντας του  $\pi(x)$  και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του  $\pi(x)$  με το  $x-2$ .

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f(x)$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ . **(2<sup>ο</sup> θέμα Σεπτεμβρίου 2001)**

**ΒΔ/88.** Έστω  $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$  όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί. α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x+1$  είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 4$ .

β) Για τις τιμές των  $\alpha, \beta$  του ερωτήματος α), να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ . **(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2000)**

**ΒΔ/89.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$ ,  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ .

α. Αν  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$  και  $P(-1) = 23$ , να αποδείξετε ότι  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ .

β. Να γίνει η διαίρεση του  $P(x)$ , για  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ , με το πολυώνυμο  $2x+1$  και να γραφεί το  $P(x)$  με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Λύστε την  $P(x) > 7$  για  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ . **(3<sup>ο</sup> θ. Πανελλαδικών 2002)**

**ΒΔ/90.** Δίνεται το  $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α. Να κάνετε την διαίρεση του  $P(x)$  δια του  $x^2 - 1$  και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ. Για  $\alpha = 3$ , να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $P(x) = 0$  καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'x$ . **(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2004)**

# Εκθετική συνάρτηση

"Όσοι δεν γνωρίζουν μαθηματικά είναι δύσκολο να νιώσουν την ουσία και την ομορφιά, τη βαθύτερη ομορφιά της φύσης"

Richard Feynman

## ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

✱ ΟΡΙΣΜΟΣ: Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a \neq 1$  ονομάζεται εκθετική.

✱ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

► Για να ορίζεται η  $f(x) = a^x$  σε όλο το  $\mathbb{R}$  πρέπει:  $a > 0$ .

► Αν  $a > 1$  η  $f(x) = a^x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  οπότε ισχύει:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

► Αν  $0 < a < 1$  η  $f(x) = a^x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  οπότε ισχύει:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

► Σε κάθε περίπτωση η  $f(x) = a^x$  είναι συνάρτηση 1-1 δηλαδή ισχύει:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

**ΒΕ/01.** Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων: Α)  $f(x) = 2^x$  και  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Β)  $f(x) = 3^x$  και  $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  Γ)  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

Δ)  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 2^x + 1$  και  $h(x) = 2^x - 2$ .

Ε)  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 2^{x+1}$  και  $h(x) = 2^{x-2}$ .

**ΒΕ/02.** Αν  $f(x) = \left(\frac{3-\alpha}{\alpha+3}\right)^x$ , να βρεθεί το  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση  $f(x)$ :

Α) να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$

Β) να είναι γνησίως αύξουσα.

**ΒΕ/03.** Α) Να βρεθούν τα  $\alpha \in \mathbb{R}$  για τα οποία η  $f(x) = \left(\frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)^x$ :

Α1. Ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Α2. Είναι γνησίως αύξουσα

Α3. Είναι γνησίως φθίνουσα

Β) Όμοια για την  $f(x) = \left(\frac{3-\alpha}{\alpha-1}\right)^x$ .

Γ) Όμοια για την  $f(x) = (3\alpha - 4)^x$ .

Δ) Όμοια για την  $f(x) = (3\alpha^2 + 8\alpha + 5)^x$ .

Ε) Όμοια για την  $f(x) = (6\alpha^3 - 7\alpha^2 + 1)^x$ .

**ΒΕ/04.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{3-2\alpha}{\alpha+1}\right)^x$ .

Α) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Β) Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα και εκείνες για τις οποίες είναι γνησίως φθίνουσα.

**ΒΕ/05.** Δίνεται η εκθετική συνάρτηση  $f(x) = (4 - \lambda^2)^x$  με  $4 - \lambda^2 \neq 1$ .

Για ποιες τιμές του  $\lambda$  ορίζεται η συνάρτηση σε όλο το  $\mathbb{R}$ ; Για ποιες τιμές του  $\lambda$  είναι γνησίως αύξουσα; Βρείτε το  $\lambda$  ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το  $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ .

**ΒΕ/06.** Α) Έστω  $f(x) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$  εκθετική συνάρτηση..

A1. Βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση να ορίζεται στο  $\mathbb{R}$ .

A2. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα και εκείνες για τις οποίες είναι γνησίως φθίνουσα.

Β) Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f(x) = \left(1 - \frac{5}{\alpha}\right)^x$  να είναι γνησίως φθίνουσα.

**Να λυθούν οι εξισώσεις :**

**ΒΕ/07.** Α)  $2^{3x-1} = 2^{x+5}$  Β)  $2^{2x+1} = 32$  Γ)  $2^{\frac{x}{2}+1} = 16$

Δ)  $3^{x-2} = 27$  Ε)  $3^x = \frac{1}{9}$  ΣΤ)  $3^{x-1} = \sqrt{3}$  Ζ)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \frac{1}{64}$

Η)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 9$  Θ)  $2^{3x-2} = 4^{x+3}$  Ι)  $4^{4x-3} = 8^{x+3}$  ΙΑ)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x} = 4^{x+5}$

**ΒΕ/08.** Α)  $\left(\frac{4}{3}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-6}$  Β)  $3^{x^2-9x+11} = 27$  Γ)  $3^{2x} = \frac{1}{81}$

Δ)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$  Ε)  $2^{1-x} = \frac{1}{16}$  ΣΤ)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} = 64$  Ζ)  $\sqrt{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+2}$ .

**BE/09.** A)  $5^{x^2-3x} = 625$

B)  $(\sqrt{5} + 2)^{x^2-4x+3} = 1$

Γ)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x} = \frac{2}{3}$

Δ)  $134^{2x+1} = 1$

Ε)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+3}$

ΣΤ)  $3^{2x+1} - 27 = 0$

Ζ)  $2^x \cdot 2^{x+1} - 64 = 0$

Η)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6} = \frac{27}{8}$

**BE/10.** A)  $2^{5x} = 8^{x+2}$

B)  $3^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}$

Γ)  $3^{x-1} = \frac{1}{27}$

Δ)  $2^{|x|-6} - \frac{1}{4} = 0$

Ε)  $\sqrt[3]{4^x} = \sqrt{2^{4x+3}}$

ΣΤ)  $27^{\frac{x+1}{x-2}} = 3^{2x+2}$ .

**BE/11.** A)  $\sqrt[3]{16} = 8 \cdot \sqrt[3]{2^{-8}}$

B)  $4^x \cdot 2^{x-9} = 8$

Γ)  $9 \cdot 3^{2x-7} = 3^{13-x}$

Δ)  $5^{x^2} = 25^{3x-4}$

Ε)  $(\sqrt{5})^{x+3} = 5^{x-1}$

ΣΤ)  $5^{2\sin x + 1} = 1$

Ζ)  $17^{\sqrt{3} \cdot \sin x - 1} = 1$

**BE/12.** A)  $\sqrt[3]{27^{x+1}} = 3^{2x-4}$

B)  $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$

Γ)  $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2} = (\sqrt{6})^{x-12}$

**BE/13.** A)  $(x-2)^{x+3} = 1$

B)  $(x^2 - 5x + 6)^{x^2-2x} = 1$

Γ)  $(7^{3-x})^{8-x} = 1$

**BE/14.** A)  $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$

B)  $4^x + 3 \cdot 2^x = 28$

Γ)  $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

Δ)  $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$ .

**BE/15.** A)  $5^{x+1} + 5^x = 150$

B)  $3^{x+3} + 3^{x+1} = 63 + 3^{x+2}$

Γ)  $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$

Δ)  $3^{x+2} = 24 \cdot 3^{x-1} + \frac{1}{9}$

**BE/16.** A)  $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$

B)  $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$

Γ)  $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

Δ)  $8^x - 5 \cdot 4^x + 2 \cdot 2^x + 8 = 0$

**BE/17.** A)  $4 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x} = 0$

B)  $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$

Γ)  $9^x + 16^x = 2 \cdot 12^x$

Δ)  $5 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$

**BE/18.** A)  $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$

B)  $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$

Γ)  $2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0$

Δ)  $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

**BE/19.** A)  $4^x + 8 = 6 \cdot 2^x$

B)  $3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0$

Γ)  $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$

Δ)  $16^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 4^{x-1} + 1 = 0$

**BE/20.** A)  $9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} + 9 = 0$

B)  $5^{x-2} + 25^x = 626$

Γ)  $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

Δ)  $2^x - 3\sqrt{2^x} + 2 = 0$



**BE/21.** A)  $8^x - 5 \cdot 4^x - 28 \cdot 2^x + 32 = 0$  B)  $3 \cdot 27^x - 27 \cdot 3^{2x-3} - 3^{x+3} + 9 = 0$   
 Γ)  $4^{\eta\mu^2 x} + 4^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 5$  Δ)  $2^{\eta\mu x} + 8 \cdot 2^{-\eta\mu x} = 6$

**BE/22.** A)  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$  B)  $e^{2x} - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0$   
 Γ)  $e^x + e^{-x} = e + e^{-1}$

**BE/23.** Να λυθούν τα συστήματα: A)  $\begin{cases} 2^{x-2y} = 8 \\ 3^{\frac{x}{2}+y} = 3\sqrt{3} \end{cases}$  B)  $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 36 \\ 4^x \cdot 3^y = 48 \end{cases}$   
 (Υπόδειξη: στο B) Πολλαπλασίασε και διαίρεσε κατά μέλη)

Γ)  $\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$  Δ)  $\begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^y = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \end{cases}$  E)  $\begin{cases} 2^x + 3^y = 13 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \end{cases}$

**BE/24.** Λύστε στο  $(0, \pi)$  την εξίσωση  $(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x} = (\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}$ .

**BE/25.** Να λυθούν οι ανισώσεις: A)  $5^{3x-7} < 5^{x-1}$  B)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+12}$

Γ)  $2^{2x+3} < 2^{x+7}$ , Δ)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+4}$ , E)  $4^{2x+1} < 2^{x+7}$  ΣΤ)  $8^{x+1} \leq 4^{x+3}$

Z)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} > \left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}$  H)  $\left(\frac{25}{4}\right)^{x+3} \geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-x+7}$  Θ)  $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} > \left(\frac{7}{3}\right)^{2x+5}$ ,

I)  $27 \cdot 2^x \leq 8 \cdot 3^x$ , IA)  $4 \cdot 2^{x+1} > 9 \cdot 3^{x+1}$ , IB)  $27 \cdot 4^{2x-1} \geq 64 \cdot 3^{2x-1}$

II)  $3^{x^2-7x+6} < 1$  IΔ)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$  IE)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} > 8$ .

**BE/26.** Λύστε τις ανισώσεις: A)  $2^{x+2} + 2^x < 80$ , B)  $3^{x+1} + 3^x - 108 \geq 0$ ,

Γ)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 > 0$ , Δ)  $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$ , E)  $8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 < 0$

ΣΤ)  $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \leq 0$  Z)  $2^{2x-1} + 8 < 5 \cdot 2^x$  H)  $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0$

**BE/27.** A) Να λυθούν οι ανισώσεις: A)  $(2^x - 4) \cdot (1 - 3^x) > 0$ ,

B)  $(1 - e^{2x}) \cdot (3^x - 27) \cdot (5^x - 25) \geq 0$ , Γ)  $(e^x - 1)(4 - 2^x)(x^2 + 2x) \geq 0$ ,

Δ)  $(e - e^x)(2^x - 8)(x^2 - x) < 0$ .

**BE/28.** Συγκρίνετε τους αριθμούς:

A)  $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$  και 1 B)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$  και 1 Γ)  $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$  και 1 Δ)  $2^{\frac{3}{4}}$  και  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$E) (\sqrt{3}-1)^{\frac{5}{3}} \text{ και } 1 \quad \Sigma T) \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} \text{ και } \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \quad Z) (\sqrt{7}-\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \text{ και } 1$$

$$H) (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} \text{ και } (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$$

**BE/29.** Να λυθεί η ανίσωση:  $(3x^2 - 6x + 5)^{-6x+5} \geq (3x^2 - 6x + 5)^{-x^2}$

**BE/30.** Να λυθεί η ανίσωση : A)  $\frac{e^x - e}{e^x - 1} > 0$  B)  $\frac{e^x - 1}{e^x - e^2} > 0$

**BE/31.** Λύστε τις ανισώσεις: A)  $e^{2x} - (1+e)e^x + e < 0$  B)  $\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2 \cdot 4^x} > 1$

**BE/32.** Να λυθεί η ανίσωση  $\alpha^{x^2-1} < \alpha^{x+1}$  με  $\alpha > 0$ , αν είναι γνωστό ότι αληθεύει για  $x = 0$ .

**BE/33.** Αν η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι αριθμητική πρόοδος, δείξτε ότι η ακολουθία  $\beta_n = 2^{\alpha_n}$  είναι γεωμετρική πρόοδος.

**BE/34.** Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 8 χρόνια, να βρεθεί η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική του απόσβεση. Τί μέρος από την αρχική ποσότητα θα έχει απομείνει μετά από 24 χρόνια;

**BE/35.** Αναλύοντας δείγμα υφάσματος από προϊστορικό τάφο οι επιστήμονες βρήκαν ότι η ποσότητα  $C_{14}$  είναι το  $\frac{1}{4}$  της αρχικής ποσότητας που περιέχονταν στο ύφασμα. Ποιας εποχής είναι ο τάφος αν είναι γνωστό ότι ο ραδιενεργός άνθρακας  $C_{14}$  έχει ημιζωή 4600 έτη;

**BE/36.** Ένα αβγό, που βράζει στους  $98^\circ C$ , τοποθετείται σε ένα δοχείο νερού θερμοκρασίας  $18^\circ C$  για να κρυώσει.

Η θερμοκρασία  $T(t)$  του αυγού μετά από χρόνο  $t$  δίνεται από τον τύπο  $T(t) - \delta_0 = \lambda e^{ct}$ , όπου  $\delta_0$  η θερμοκρασία του δοχείου νερού για την οποία υποθέτουμε ότι δεν μεταβάλλεται αισθητά. α) Βρείτε τη σταθερά  $\lambda$   
β) Αν μετά από 5 λεπτά η θερμοκρασία του αυγού είναι  $38^\circ C$ , να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η θερμοκρασία του θα γίνει  $23^\circ C$ .

**BE/37.** Μια ποσότητα 50 ml μιας κολώνιας εξατμίζεται με ρυθμό 15% ανά ημέρα. Βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της κολώνιας μετά από  $t$  ημέρες και να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση. Πόσα ml θα έχουν απομείνει μετά από 20 ημέρες και πόσα μετά από 40;

(Χρησιμοποιείτε computer)

**BE/38.** Σ' έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία  $Q(t)$  του ασθενούς  $t$  ώρες μετά τη λήψη του

φαρμάκου , δίνεται , σε βαθμούς Κελσίου , από τον τύπο

$$Q(t) = 36 + 4 \cdot 0,5^t.$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία που είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

Β) Σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα επανέλθει στη φυσιολογική τιμή των  $36,5^\circ C$

γ) Αν η δράση του φαρμάκου διαρκέσει 6 ώρες , ποια θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η δράση του φαρμάκου;

**ΒΕ/39.** Αν  $f(x) = \left(\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\right)^x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  , τότε:

Α) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

Β) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα .

Γ) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα .

Δ) Αν  $\alpha \in (-1,1)$  να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2 + x - 1) > \frac{3-\alpha}{1+\alpha}$ .

Ε) Βρείτε τα  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η ανίσωση  $f(2x-3) > \frac{3-\alpha}{1+\alpha}$  να έχει λύση  $x < 2$ .

**ΒΕ/40.** Αν  $f(x) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  , τότε:

Α) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

Β) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα .

Γ) Αν  $\alpha = \frac{1}{3}$  να λύσετε την εξίσωση:  $f(2x) + f(x+1) = 3$ .

Ε) Βρείτε τα  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η ανίσωση  $f(2x-3) < \frac{1}{\alpha} - 1$  να έχει λύση  $x < 2$ .

**ΒΕ/41.** Βρείτε το  $x$  αν οι  $e$ ,  $e^x$ ,  $e^x + e^{x-1} - 1$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**ΒΕ/42.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\alpha} - 8$

διέρχεται από το σημείο  $M(-3, -4)$

**A.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  .

**B.** Να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) \geq 0$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $e^{2x} + 5e^x + f\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$ .

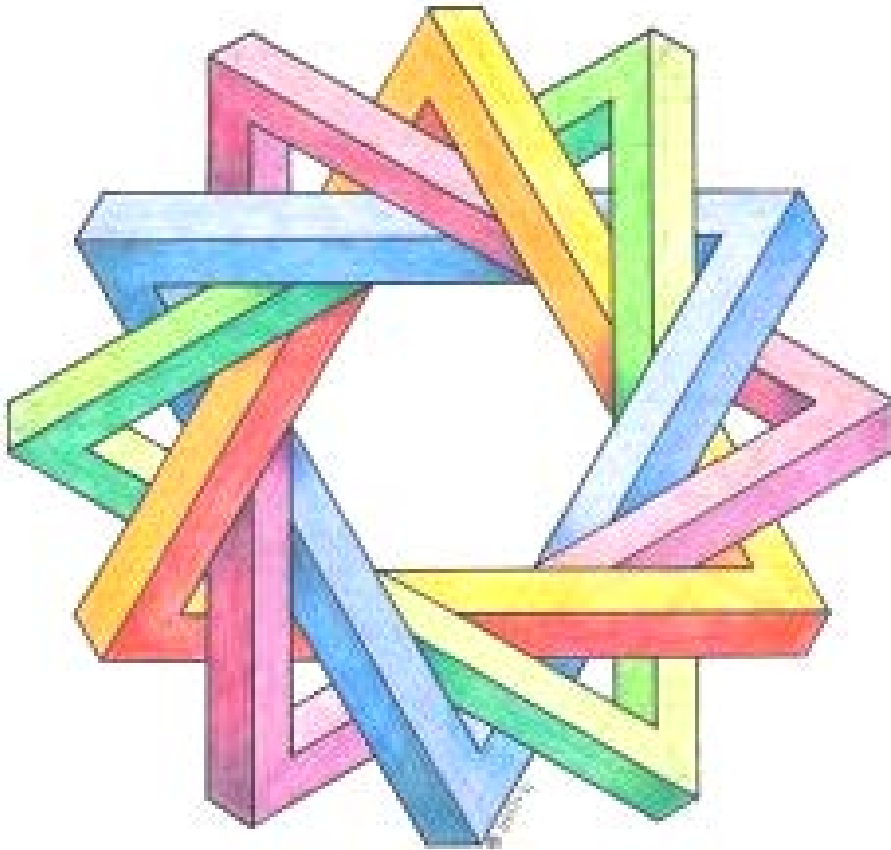
**ΒΕ/43.Α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

$$f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}.$$

**Β.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = 5^x$ . Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}.$$

(4<sup>ο</sup> Θέμα Πανελλαδικών 2004)



# Λογάριθμοι

"Τα μαθηματικά φαίνεται να εφοδιάζουν αυτόν που ασχολείται μαζί τους με μια καινούργια αντίληψη για τα πράγματα"

Charles Darwin

## ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

✱ ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν  $0 < \alpha \neq 1$  και  $\theta > 0$ , ονομάζω λογάριθμο με βάση  $\alpha$  του  $\theta$  και συμβολίζω  $\log_{\alpha} \theta$ , τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον  $\alpha$  για να βρούμε τον  $\theta$ . Δηλαδή:  $\log_{\alpha} \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$ .

✱ Ειδικά το  $\log_{10} \theta$  το συμβολίζω  $\log \theta$  και το  $\log_e \theta$  το συμβολίζω  $\ln \theta$ .

✱ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

► Α)  $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω  $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1$  οπότε  $\alpha^{x_1} = \theta_1$  και  $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2$  οπότε  $\alpha^{x_2} = \theta_2$ . Τότε είναι:  $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \theta_2$  και από τον ορισμό του λογαρίθμου ισοδύναμα:  $\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$  δηλαδή τελικά:  $\log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$ .

► Β)  $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω  $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1$  οπότε  $\alpha^{x_1} = \theta_1$  και αν  $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2$  οπότε  $\alpha^{x_2} = \theta_2$ . Τότε είναι:  $\frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow \alpha^{x_1-x_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$  και από τον ορισμό έχω

ισοδύναμα:  $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = x_1 - x_2$  δηλαδή τελικά:  $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$ .

(Η απόδειξη αυτή δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο)

► Γ)  $\log_{\alpha} \theta^k = k \cdot \log_{\alpha} \theta$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω  $\log_{\alpha} \theta = x$  οπότε  $\alpha^x = \theta$  και έτσι  $\alpha^{kx} = \theta^k$ . Τότε από τον ορισμό του λογαρίθμου ισοδύναμα:  $\log_{\alpha} \theta^k = kx$  δηλαδή τελικά:  $\log_{\alpha} \theta^k = k \log_{\alpha} \theta$ .

► Δ) Επίσης ισχύουν:  $\log_{\alpha} \alpha^k = k$ ,  $\alpha^{\log_{\alpha} k} = k$ ,  $\log_{\alpha} \alpha = 1$  και  $\log_{\alpha} 1 = 0$

Ε)  $\log 10^k = k$ ,  $10^{\log k} = k$ ,  $\log 10 = 1$  και  $\log 1 = 0$

ΣΤ)  $\ln e^k = k$ ,  $e^{\ln k} = k$ ,  $\ln e = 1$  και  $\ln 1 = 0$ .

**BZ/01.** Υπολογίστε τους:  $\log_2 8$ ,  $\log_5 25$ ,  $\log_3 9$ ,  $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $\log_3 3$ ,  $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$ ,  $\log_2 \sqrt{2}$ ,  $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)$ ,  $\log_2 \sqrt[3]{2^4}$ ,  $\log_{\sqrt{3}} 3$ ,  $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right)$ ,  $\log_{10} 0,01$ .

**BZ/02.** Βρείτε τον  $x > 0$  αν: A)  $\log_3 x = 2$  B)  $\log_2 x = -1$   
 Γ)  $\log_x 8 = 3$  Δ)  $\log_x 4 = \frac{1}{2}$  E)  $\log_2 64 = x$  ΣΤ)  $\log_x 9 = -2$   
 Ζ)  $\log_x 8 = -3$  Η)  $\log_2 x = 4$  Θ)  $\log_3 81 = x$  Ι)  $\log_{1/8} x = -\frac{2}{3}$

**BZ/03.** Αποδείξτε ότι : A)  $\log 25 + \log 4 - \log 2 - \log 5 = 1$   
 B)  $\log 4 + \log 20 - 3\log 2 = 1$  Γ)  $2\log 5 + 3\log 2 - \log 60 + \log 3 = 1$   
 Δ)  $\frac{1}{2}\ln 4 + \frac{2}{3}\ln 27 - \ln 6 = \ln 3$  E)  $\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$   
 ΣΤ)  $e^{\ln 2 - 2\ln 3} = \frac{2}{9}$  Ζ)  $\frac{2\log 3 + 3\log 2 + \log 5 - 1}{2\log 2 + \log 150 - 2} = 2$   
 Η)  $\frac{\log \sqrt{216} + \log \sqrt{343} - \log \sqrt{125}}{\log 42 - \log 5} = \frac{3}{2}$ .

**BZ/04.** Υπολογίστε τα:  
 A)  $\log 2 + \log 40 - 2\log 4$  B)  $2\log 20 + \log 4 - 4\log 2$   
 Γ)  $2\log_2 5 + \log_2 6 - \log_2 3 - \log_2 25$   
 Δ)  $\ln(e^3 + e^2) - 2\ln(e + 1) + \ln(e^2 + e)$   
 E)  $\log_2(3 - \sqrt{2}) + \log_2(3 + \sqrt{2}) - 2\log_2 \sqrt{14}$   
 ΣΤ) Αν  $\ln x = 2$  και  $\ln y = 5$  υπολογίστε τον  $\ln \frac{x^5 e^4}{y^2}$ .

**BZ/05.** Έστω η ακολουθία  $a_n = \ln 2^n$ .

A. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.

B. Δείξτε ότι  $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \ln 2$ .

**BZ/06.** Αν μια αριθμητική πρόοδος έχει 1° όρο τον  $\ln 3$  και 3° όρο τον  $\ln 243$  να δείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της είναι:

$$S_n = n^2 \ln 3.$$

**BZ/07.** Αν ο  $2^{\text{ος}}$  όρος μιας αριθμητικής προόδου  $\alpha_n$  ισούται με  $1 + \ln 2$  ενώ ο  $4^{\text{ος}}$  όρος ισούται με  $1 + \ln 8$ , βρείτε τον  $1^{\text{o}}$  όρο της, τη διαφορά, το άθροισμα των 5 πρώτων όρων και το  $S = \alpha_6 + \alpha_7 + \dots + \alpha_{13}$ .

### ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

► Πεδίο ορισμού της  $f(x) = \log_{\alpha} x$  είναι το  $D_f = (0, +\infty)$  δηλαδή οι λογάριθμοι ορίζονται μόνο για θετικούς αριθμούς.

► Σύνολο τιμών της  $f(x) = \log_{\alpha} x$  είναι όλο το  $\mathbb{R}$  δηλαδή ο λογάριθμος παίρνει τιμές σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

► Μονοτονία της  $f(x) = \log_{\alpha} x$ .

• Αν  $\alpha > 1$  η  $f(x) = \log_{\alpha} x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , δηλαδή ισχύει:

$$\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Έτσι:  $\log x_1 < \log x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$  και  $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

• Αν  $0 < \alpha < 1$  η  $f(x) = \log_{\alpha} x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  δηλαδή ισχύει:

$$\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

• Σε κάθε περίπτωση η  $f(x) = \log_{\alpha} x$  είναι συνάρτηση 1-1 δηλαδή ισχύει:

$$\log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

► Πρόσημο της  $f(x) = \log_{\alpha} x$  με  $\alpha > 1$ .

Για  $x > 1$  είναι  $\log_{\alpha} x > 0$  ενώ για  $0 < x < 1$  είναι  $\log_{\alpha} x < 0$

► Οριακές τιμές της  $f(x) = \log_{\alpha} x$  με  $\alpha > 1$ :

Αν  $x \rightarrow 0^+$  τότε  $\log_{\alpha} x \rightarrow -\infty$ , ενώ αν  $x \rightarrow +\infty$  τότε  $\log_{\alpha} x \rightarrow +\infty$ .

**BZ/08.** Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A)  $f(x) = \log(2x - 4)$

B)  $f(x) = \log(x - 1) + \log(7 - x)$

Γ)  $f(x) = \log(2|x - 3| - 6)$

Δ)  $f(x) = \log(3^x - 27) - \log(64 - 2^x)$

E)  $f(x) = \ln(9 - x^2)$

ΣΤ)  $f(x) = \ln(16 - |x - 1|)$

Z)  $f(x) = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{8}\right)$

H)  $f(x) = \ln(4^x - 10 \cdot 2^x + 16)$

Θ)  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{8-2x}\right)$

I)  $f(x) = \ln(x^2)$

Λύστε τις εξισώσεις:

**BZ/09.** A)  $\log(2x - 1) = \log(x + 4)$     B)  $\ln(4x - 1) = \ln 7$

$$\Gamma) \log(x+10)=2 \quad \Delta) \log x + \log(x-21)=2 \quad \text{E)} \log x + \log(x+3)=1$$

$$\Sigma\text{T)} 1 + \log(x-2) = \log 30$$

$$\text{Z)} \ln x + \ln(x+6) = 4 \ln 2$$

$$\text{H)} \ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(8-x)$$

$$\Theta) \log(x+1) = 1 + \log(1-x)$$

$$\text{I)} 2 \log(x+2) - 1 = \log(x+6) - \log 5$$

$$\text{IA)} \log 9 + x \log 2 = \log 4 + x \log 3$$

$$\text{IB)} x + \ln(e^x + 1) = \ln 2$$

$$\text{IF)} \log x + \log(x-1) = \log 6$$

$$\text{I}\Delta) 2 \ln x + \ln(x+1) = \ln 2e - 1$$

$$\text{IE)} \ln(e^x + e^2 - 1) = 2$$

$$\text{I}\Sigma\text{T)} \ln(2x+1) - \ln(x+4) = -\ln 3$$

$$\text{I}\text{Z)} \ln(27 - x^2) = \ln(5-x) + \ln 9.$$

$$\text{IH)} \ln(x+4) - \ln(x-1) = \ln(x-2) - \ln 2.$$

$$\text{I}\Theta) \log 9 + x \log 3 = \log 54 - \log 2 \quad \text{K)} \log x + \log(x+6) = 4 \log 2.$$

**BZ/10.** A)  $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln 18$  B)  $\log(4x+20) = 2$

$$\Gamma) \log(x+1) = -1$$

$$\Delta) \ln(x^2 + 1) - \ln(x+2) = \ln 2$$

$$\text{E)} 2 \ln x + \ln(x+3) = 2 \ln 2$$

$$\Sigma\text{T)} \ln x + \ln(x+e) = \ln 2 + 2$$

$$\text{Z)} \log x + \log(x+4) = \log 4 + \log(x+1) \quad \text{H)} \ln x^2 - \ln(2x-2) = \ln 2e - 1$$

$$\Theta) \ln(x^2 - x) = 1 + \ln(x-1)$$

$$\text{I)} \log(x^2 - 7x) = 1 + \log(1-x)$$

$$\text{IA)} 5 \log x - 3 \log \frac{x}{2} = \log 288 \quad \text{IB)} \frac{1}{2} \log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$$

**BZ/11.** A)  $\log \sqrt{x+1} + \log \sqrt{5x} = 1$  B)  $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2$

**BZ/12.** A)  $\ln(3^x + 2) = 2x \ln 3$  B)  $\ln(e^{2x} + 2) = x + \ln 3$

$$\Gamma) x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6$$

$$\Delta) \ln(2^x + 2) = 2x \ln 2$$

$$\text{E)} \log(5^x - 2 \cdot 3^x) + \log 27 = \log 71 + x \log 3$$

**BZ/13.** A)  $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

$$\text{B)} \log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 178.$$

$$\Gamma) x \log 2 = \log(2^x + 4) - \log(2^{x+1} - 1)$$

$$\Delta) (x-2) \ln 4 + (2x-4) \ln 3 = \ln 144 - 2 \ln 2.$$

**BZ/14.** A)  $\log[\log(2x^2 + x - 11)] = 0$  B)  $\ln(\ln(x-e)) = 0$

$$\Gamma) \log(x-2) - \log \sqrt{2x+17} = \log 2$$

$$\Delta) \log[\log(x^2 + 2x + 2)] = 0$$

$$\text{E)} \log[\log(x^2 + 1) + 9] = 1$$

$$\Sigma\text{T)} \ln[\log(150 - |x|) - 1] = 0$$



**BZ/15.** A)  $\ln(e^x + 9 - e) = 1 - x + \ln 9$ , B)  $\ln(\sin x) = 0$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$

B)  $\ln(3x - 2) - \ln(x + 1) = \ln 2e - 1$

**BZ/16.** A)  $x + \ln(e^x - 1) = \ln 20$  B)  $\ln(e^x - 3) + x = 2 \ln 2$  Γ)  $\ln \frac{x}{4} = \frac{\ln x}{3}$

**BZ/17.** A)  $3^x = 5$  B)  $5^{3x-1} = 2^{x+3}$  Γ)  $2^{x+3} = 5^{1-x}$  Δ)  $3^{x-2} = 2^{3-x}$

E)  $5^{\ln x} - 3^{\ln x-1} = 3^{\ln x+1} - 5^{\ln x-1}$  (Θέτω  $\ln x = \omega$ ) ΣΤ)  $2^{\log x+1} + 2^{\log x+2} = 48$

Z)  $9^x - 3^x - 2 = 0$

H)  $4^{\ln x} + 2^{\ln x} - e^{2 \ln \sqrt{6}} = 0$ .

**BZ/18.** A)  $x^2 = 10^{2 + \frac{1}{2} \log 16}$

B)  $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

**BZ/19.** A)  $\log^2 x - \log x - 2 = 0$  B)  $\log^2 x - 2 \log x - 3 = 0$

Γ)  $2 \log^2 x + 5 \log x - 3 = 0$

Δ)  $\log^2 x + 3 \log \sqrt{x} - 1 = 0$

E)  $\log^2 x^2 - 2 \log x^4 - 12 = 0$

ΣΤ)  $\ln^2 x^3 - 9 \ln x = 54$

Z)  $\sqrt{\log x - 1} = \log x - 1$  H)  $\ln^2 x = \frac{2}{\ln x + 1}$  Θ)  $(x+1)^{\ln(x+1)} = e^2(x+1)$

I)  $\ln^2 x + \ln x^2 - 3 = 0$ .

**BZ/20.** A) Δείξτε ότι  $3^{\log x} = x^{\log 3}$

B) Λύστε την εξίσωση:  $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$ .

**BZ/21.** A) Να λυθεί η ανίσωση:  $\log(x-3) > \log(7-x)$ .

B) Να λυθεί η ανίσωση:  $\log(x-1) > \log(5-x)$ .

Γ) Να λυθεί η ανίσωση:  $\log(x^2 - 9) > \log x + 3 \log 2$ .

Δ) Να λυθεί η ανίσωση:  $2 \ln x < \ln(x+2)$ .

**BZ/22.** A) Να λυθούν οι ανισώσεις:

A)  $\ln(5x-3) \geq \ln(3x+5)$ ,

B)  $\log^2 x - 3 \log x + 2 < 0$

Γ)  $\ln^2 x - 5 \ln x + 6 \leq 0$ ,

Δ)  $\ln x + \ln(x+4) \geq \ln 3 + 2 \ln 2$ ,

E)  $2 \ln x \geq \ln(x-2) + \ln(x+6)$ ,

ΣΤ)  $\log(x^2 + 2) - \log(3x+12) \geq 0$ ,

Z)  $\log 3 + \log(x+2) \leq 2 \log 6$

H)  $1 + \log(x+1) \leq \log(32-x)$

Θ)  $\log^2 x - \log x^3 + 2 \geq 0$ .

I)  $\log^2 x - \log x^2 < 0$

ΙΑ)  $\ln^2 x - \ln x - 2 > 0$

ΙΒ)  $2 \ln^2 x - \ln x^3 + 1 < 0$

ΙΓ)  $2 \ln^2 x - 5 \ln x + 2 > 0$

ΙΔ)  $\log^2 x - \log x^3 - 4 \leq 0$

ΙΕ)  $(\log x - 2) \cdot (\log x - 1) \leq 0$

ΙΣΤ)  $(2^x - 8) \cdot (\log 5 - \log x) \leq 0$

ΙΖ)  $(x-2)(\ln x + \ln 2)(1 - \log(x+1)) \geq 0$  ΙΗ)  $\frac{2 \ln x - 1}{\ln x} \geq 1$

**BZ/23.** Να λυθούν οι ανισώσεις: Α)  $\log^2 x - 4\log x + 3 \leq 0$

Β)  $\log[\log(x+2) + 99] > 2$  Γ)  $\log[\log(x+3)] < 0$

Δ)  $2^{3x+2} < 3^{x+1}$

Ε)  $3^{x+1} < 2^{3x+1}$ .

**BZ/24.** Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{1}{\log x + 1} - \frac{1}{\log x - 1} > 2$

**BZ/25.** Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{1}{2}\log^2 x + \log \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

**BZ/26.** Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση  $x^2 - 2x + \log \alpha = 0$  έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες ;

**BZ/27.** Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  οι αριθμοί  $\log x$ ,  $\log(2\sqrt{3})$  και  $\log(x-1)$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

**BZ/28.** Αν σε μια αριθμητική πρόοδο  $\alpha_n$  είναι  $\alpha_1 = \log 2$  και  $\alpha_2 = \log 8$  βρείτε τη διαφορά της αριθμητικής προόδου και τον όρο  $\alpha_{25}$ .  
Β) Όμοια αν  $\alpha_2 = \log 6$  και  $\alpha_4 = \log 54$ .

**Να λυθούν τα συστήματα**

**BZ/29.** Α)  $\begin{cases} \log x + 2\log y = 6 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

Β)  $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 5 \end{cases}$

Γ)  $\begin{cases} \log y - \log x = \log 11 \\ y - x = 1 \end{cases}$

Δ)  $\begin{cases} \log y - \log x = -\log 3 \\ \log(x-y) = 1 \end{cases}$

Ε)  $\begin{cases} \log(6-4x) = 1 \\ \log(x-y) = 0 \end{cases}$

ΣΤ)  $\begin{cases} \log(x-2y) = 3\log 2 \\ \log x + \log y = \log 24 \end{cases}$

**BZ/30.** Α)  $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \log(x+y) = 2\log 5 \end{cases}$

Β)  $\begin{cases} 3^{\log x} + 2^{\log y} = 11 \\ 9^{\log x} - 4^{\log y} = 77 \end{cases}$

Γ)  $\begin{cases} 2^{\log x} - 3^{\log y} = 1 \\ 4^{\log x} - 9^{\log y} = 7 \end{cases}$

Δ)  $\begin{cases} x^{\log y} = 100 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$

**BZ/31\*.** Αφού μετατρέψετε τους λογαρίθμους σε ίσους τους με βάση το 10, αποδείξτε ότι  $\log_3 2 < \log_6 4$ .

**BZ/32\*.** Λύσε την εξίσωση  $2\log_2 x - 3\log_x 4 = 4$

(Υπόδειξη: μετατρέψτε τα σε λογαρίθμους με βάση το 10)

**BZ/33\*.** Να βρείτε, σε ένα σύστημα αξόνων, τον γεωμ. τόπο των σημείων  $M(x, y)$  για τα οποία ισχύει:  $\log_y x - \log_x y = 0$ .

**BZ/34\*.** Λύστε το σύστημα: 
$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \quad (\text{Υπόδ.: } \log_x y = \frac{1}{\log_y x})$$

**BZ/35\*.** Να λυθεί η εξίσωση:  $x^{\log_3 5} = 5^{\log_x 3}$ .

**BZ/36.** Να λυθεί η εξίσωση:  $5^{\log x} - \frac{175}{5^{\log x}} = 18$ .

**BZ/37.** Να λυθεί η εξίσωση:  $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \eta \mu x = 2$ .

**BZ/38.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

A)  $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

B)  $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e - e^x}$

Γ)  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 2}$

Δ)  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

E)  $f(x) = \sqrt{3^x - 2}$

ΣΤ)  $f(x) = \frac{x}{2^x - 3}$

**BZ/39.** Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln \left( \frac{x-2}{x+2} \right) \cdot \sigma \upsilon \nu x$  είναι περιττή.

**BZ/40.** Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \ln \left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right)$  είναι άρτια ενώ η

$g(x) = \ln \left( \frac{2-x}{2+x} \right)$  περιττή.

**BZ/41.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$f(x) = \eta \mu x \cdot \ln \frac{7-x}{7+x}$  και να δείξετε ότι είναι άρτια.

**BZ/42.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$f(x) = \sigma \upsilon \nu x + x \ln \frac{x+2}{x-2}$  και να δείξετε ότι είναι άρτια.

**BZ/43.** Βρείτε τις τιμές του  $x$  ώστε να ορίζεται ο αριθμός:

$\alpha = \ln \frac{e - e^x}{e^x - 1} + \ln(2x - 1)$ .

**BZ/44.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = (2 \ln \alpha - 1)^x$

A) Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ ;

B) Να βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $C_f$  να έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα  $Ox$ .

**BZ/45.** Αν οι αριθμοί  $\alpha^2, 17\alpha\beta, \beta^2$  με  $\alpha, \beta > 0$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι:  $\ln \frac{\alpha + \beta}{6} = \frac{\ln \alpha + \ln \beta}{2}$ .

**BZ/46.** Βρείτε τον  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  αν οι:  $\ln(1 + \sin 2\theta)$ ,  $\ln \eta \mu \theta$ ,  $-\ln 2$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**BZ/47.** Α. Βρείτε τον  $x \in \mathbb{R}$  αν οι:  $e$ ,  $e^x$ ,  $e^x + e^{x-1} - 1$  είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**BZ/48.** Α) Βρείτε τον αριθμό  $x$  αν οι αριθμοί:  $\ln 7$ ,  $\ln \sqrt{3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x}$ ,  $x \ln 10$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Β) Όμοια βρείτε τον αριθμό  $x$  αν οι αριθμοί:  $\ln 2$ ,  $\ln(2^x - 1)$ ,  $\ln(2^x + 3)$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**BZ/49.** Α) Βρείτε τον αριθμό  $x$  αν οι αριθμοί:  $x^{\ln x}$ ,  $\sqrt[4]{ex}$ ,  $x$ , με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

**BZ/50.** Έστω ότι η ακολουθία  $\alpha_n$  έχει θετικούς όρους. Αν η  $\alpha_n$  είναι γεωμετρική πρόοδος, να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $\beta_n = \log \alpha_n$ , είναι αριθμητική πρόοδος και αντίστροφα.

**BZ/51.** Αν  $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ : Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της

Β) Δείξτε ότι είναι περιττή Γ) Υπολογίστε το  $f(x) + f(-x)$ .

**BZ/52.** Αν  $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ :

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β) Δείξτε ότι είναι περιττή

**BZ/53.** Ο 1<sup>ος</sup> όρος μιας αριθμητικής προόδου  $\alpha_n$  είναι  $\alpha_1 = \ln 2$  και ο 4<sup>ος</sup>  $\alpha_4 = \ln 16$ .

Α. Βρείτε τη διαφορά της προόδου και τον 2<sup>ο</sup> όρο της.

Β. Υπολογίστε το άθροισμα  $S = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{23}$

Γ. Αν  $\beta_n$  μια γεωμετρική πρόοδος με  $\beta_1 = \alpha_1$  και  $\beta_2 = \alpha_2$  όπου  $\alpha_1, \alpha_2$  ο 1<sup>ος</sup> και 2<sup>ος</sup> όρος της προηγούμενης Α.Π. βρείτε τον γενικό όρο της γεωμετρικής προόδου καθώς και το άθροισμα  $A = \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \dots + \beta_{14}$ .

**BZ/54.** Α. Να λυθεί η εξίσωση:  $2^{x+1} + 2^{x+2} - 24 = 0$

Β. Να λυθεί η εξίσωση:  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Γ. Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x) = \ln \left( \frac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8} \right)$

**BZ/55.** Οι πωλήσεις  $S(t)$  σε χιλιάδες μονάδες ενός προϊόντος σε διάστημα  $t$  χρόνων από την είσοδο του στην αγορά δίνονται από τη σχέση  $S(t) = \alpha + \beta e^{kt}$ ,  $t \geq 0$ ,  $\alpha, \beta, k$  σταθερές.

α) Εξηγήστε γιατί ισχύει  $\beta = -\alpha$ .

β) Υπολογίστε τους  $\alpha, \beta, k$ , αν στο 1<sup>ο</sup> έτος οι πωλήσεις ανήλθαν σε 4000 μονάδες και μετά από 1 ακόμη χρόνο σε 6000 μονάδες.

γ) Πόσες θα είναι οι πωλήσεις στα 3 πρώτα χρόνια;

δ) Πόσες θα είναι οι πωλήσεις στο χρονικό διάστημα από τον 3<sup>ο</sup> μέχρι και τον 6<sup>ο</sup> χρόνο;

**BZ/56.** Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος ενός σεισμού εντάσεως  $I$  δίνεται από τον τύπο  $R = \log \frac{I}{I_0}$  όπου  $I_0$  είναι ορισμένη

ελάχιστη ένταση. α) Να εκφράσετε το  $I$  ως συνάρτηση των  $R$  και  $I_0$

β) Βρείτε το μέγεθος ενός σεισμού έντασης  $I = 10000I_0$

γ) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά μία μονάδα Richter;

**BZ/57.** Ο αριθμός των βακτηριδίων που εμφανίζονται σε μια καλλιέργεια μετά από  $t$  μέρες δίνεται από τη συνάρτηση :

$Q(t) = Q_0 \cdot e^{\frac{t \ln 3}{5}}$ , όπου  $Q_0$  ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων.

Πόσος χρόνος θα περάσει ώστε ο αριθμός των βακτηριδίων να εννεαπλασιαστεί;

**BZ/58.** Οι πωλήσεις  $Q(t)$  ενός προϊόντος σε διάστημα  $t$  ετών μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνονται από τη συνάρτηση :  $Q(t) = \alpha(1 - e^{\beta t})$ .

Αν οι πωλήσεις κατά το 1<sup>ο</sup> εξάμηνο ανήλθαν σε 54 μονάδες και κατά το 1<sup>ο</sup> έτος σε 72 μονάδες, τότε: Α) να βρείτε τα  $\alpha, \beta$

Β) για  $\alpha = 81$  και  $\beta = -2 \ln 3$  να βρείτε σε πόσα έτη από την εισαγωγή του στην αγορά οι πωλήσεις θα είναι 80 μονάδες.

Γ) να βρείτε πόσα έτη χρειάζονται το πολύ ώστε οι πωλήσεις να είναι τουλάχιστον 60 μονάδες.

**BZ/59.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (\alpha - 2)^x$ .

Α) Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Β) Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η  $C_f$  να διέρχεται από το σημείο  $A(3, e^3)$ .

Δ) Για  $\alpha = e + 2$  λύστε την εξίσωση:  $\ln f(2x) + \ln f(x) - 6 = 0$  καθώς και την ανίσωση  $f(3 \ln x) - 3f(\ln x) + 2 < 0$ .

**BZ/60.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 2, 3)$ .

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

B) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή.

Δ) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) > 2$ .

**BZ/61.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln(e^x - 1)$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

B) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \ln 2$ .

Γ) Βρείτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $xx'$ .

Δ) Συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(\ln 2)$  και  $f(1)$ .

E) Λύστε την εξίσωση  $f(2x) - f(x) = f(1)$ .

ΣΤ) Να λυθεί η ανίσωση:  $e^{f(2x)} + e^{f(x)} > 0$ .

**BZ/62.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2) + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$

B) Αν η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 3, 1)$ :

i) Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

ii) Βρείτε τα σημεία τομής της  $C_f$  με τους άξονες.

iii) Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

iv) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 2$ .

v) Λύστε την ανίσωση:  $e^{f(2x)-1} + e^{f(x)-1} + 2 > 0$ .

**BZ/63.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln\left(\frac{2^{2x} - 1}{2^x + 1}\right)$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

B) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 0$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x) < \ln 5$ .

**BZ/64.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

Β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή .

Γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(0)$  και  $f\left(\frac{1}{3}\right)$

Δ) Λύστε την:  $f(x) + f(x+1) = 0$ . **(4<sup>ο</sup> θέμα εξετάσεων Ιουλίου 2001)**

**BZ/65.** Δίνεται η  $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x)$ ,  $x > 0$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$

A) Αν  $f(10) = 25$  , να δείξετε ότι  $\alpha = 1$

B) Για την τιμή  $\alpha = 1$  να:

B1) δείξτε ότι η  $f(x)$  γράφεται στη μορφή  $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$

B2) να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$  .

**(3<sup>ο</sup> θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2001)**

**BZ/66.** Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου  $(\alpha_n)$  είναι ίσος με  $\alpha_3 = \log 125$  και η διαφορά της είναι ίση με  $\omega = \log 5$ .

A) Δείξτε ότι ο πρώτος όρος  $\alpha_1$  της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά  $\omega$  .

B) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$  .

Γ) Έστω  $(\beta_n)$  μια γεωμετρική πρόοδος με  $\beta_1 = \alpha_1$  και  $\beta_2 = \alpha_2$  όπου  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα . Υπολογίσετε το άθροισμα

$B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$ . **(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2001)**

**BZ/67.** Έστω  $Q(t)$  η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές) ,  $t$  έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά . Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές , ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής . Αν είναι γνωστό ότι ισχύει :  $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$  ,  $t \geq 0$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  , τότε :

A) να δείξετε ότι  $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$  ,  $t \geq 0$

B) να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το  $1/16$  της αρχικής του τιμής

Γ) να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το  $1/9$  της αρχικής του τιμής . **(4<sup>ο</sup> θέμα , Πανελλαδικές 2001)**

**BZ/68.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right)$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$  .

B) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2 \ln 2$  .

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$  . **(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2002)**

**BZ/69.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln(5 - 3^x)$ .

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .
- B) Βρείτε πού η  $C_f$  τέμνει τους άξονες.
- Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = x \ln 3$ .
- Δ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x) > 0$ .

**BZ/70.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \log\left(\frac{2^x - 6}{2^x - 4}\right)$ .

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .
- B) Βρείτε πού η  $C_f$  τέμνει τους άξονες.
- Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = -\log 2$ .
- Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = x \log 2$ .

**BZ/71.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 \log 2 + x^2 \log 5 - x \log 4 + \lambda$ , το οποίο έχει παράγοντα το  $x - 2$ .

- A) Να αποδείξετε ότι  $\lambda = -4$ .
- B) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x + 1$ .

**BZ/72.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$  και  $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$ .

- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των  $f(x)$  και  $g(x)$
- β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$
- γ. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 2g(x)$ . (4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2003)

**BZ/73.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln(6 - x) - \ln(x + 2)$ .

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .
- B) Δείξτε ότι  $f(0) = 2 \ln 2 + \ln 12 - 4 \ln 2$
- Γ) Βρείτε που η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .
- Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \ln x + \ln 3$ .

**BZ/74.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 2 \log(12 - x) - \log(x + 8) - 1$ .

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης .
- B) Δείξτε ότι  $f(0) = \log 9 - \log 5$ .
- Γ) Βρείτε που η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .
- Δ) Βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .



**Σ - Λ στην τριγωνομετρία**

- ★1) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu 4x$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{\pi}{2}$ .
- ★2) Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi$ .
- ★3) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu 3x + 1$  έχει μέγιστο το 2.
- ★4) Ισχύει:  $\eta\mu x = \eta\mu \alpha \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
- ★5) Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
- ★6) Η εξίσωση:  $\epsilon\phi x = 2$  είναι αδύνατη.
- ★7) Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{\eta\mu x + 2}$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
- ★8) Η εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu x = -2$  είναι αδύνατη.
- ★9) Ισχύει  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi \alpha \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}$ .

**Σ – Λ στα πολυώνυμα**

- ★1) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι:  $\upsilon = P(\rho)$ .
- ★2) Το πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρείται με το  $x - \rho$  αν ισχύει:  $P(\rho) = 0$ .
- ★3) Υπάρχει ακέραιος  $\lambda$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - \lambda x^2 - x + 1$  να έχει ρίζα το 2.
- ★4) Υπάρχει ακέραιος  $\lambda$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - \lambda x + 13$  να έχει ρίζα το 2.
- ★5) Υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{Z}$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x) = x^5 + \lambda x + 4$  να έχει παράγοντα το  $x - 3$ .
- ★6) Το πολυώνυμο  $P(x) = \lambda x^4 + x^3 + 2x + \lambda$  είναι 4<sup>ου</sup> βαθμού ανεξάρτητα από τις τιμές που μπορεί να πάρει το  $\lambda$ .
- ★7) Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου  $P(x) = x^4 + \lambda x^3 + x^2 + x - \lambda$ , για  $x = 1$ , είναι 3.
- ★8) Το πολυώνυμο:  $P(x) = \lambda x^4 - \lambda x^3 - x^2 - x - 8\lambda + 6$  έχει ρίζα το 2.
- ★9) Το  $x - \rho$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x)$  αν το  $\rho$  είναι ρίζα του  $P(x)$ .
- ★10) Υπάρχει  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε το 2011 να είναι ρίζα του πολυωνύμου  $P(x) = x^3 + x^2 + x + \mu^2 + 1$ .

- ★11) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x^2 + x + 2$  είναι  $\lambda x^2 + x + \lambda$ , τότε  $\lambda = 0$ .
- ★12) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρεί το  $\Pi(x)$  αλλά και το  $R(x)$ , τότε θα διαιρεί και το  $\Pi(x) + R(x)$ .
- ★13) Στη διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο πρέπει να είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του πηλίκου.
- ★14) Κάθε αριθμός  $\alpha \neq 0$  μπορεί να θεωρηθεί πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.
- ★15) Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
- ★16) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 2)$  είναι 3, τότε το  $x - 2$  διαιρεί το πολυώνυμο  $R(x) = P(x) - 3$ .
- ★17) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και το  $Q(x)$  2<sup>ου</sup>, τότε το  $P(x) \cdot Q(x)$  είναι 6<sup>ου</sup> βαθμού.
- ★18) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και το  $Q(x)$  2<sup>ου</sup>, τότε το  $P(x) + Q(x)$  είναι 5<sup>ου</sup> βαθμού.

### Σ – Λ στις εκθετικές και λογαριθμικές

- ★1) Ισχύει  $\log_a(\theta_1 + \theta_2) = \log_a \theta_1 \cdot \log_a \theta_2$  με  $\theta_1, \theta_2 > 0$  και  $0 < a \neq 1$ .
- ★2) Η συνάρτηση:  $f(x) = 3^x, x \in \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ★3) Για κάθε  $x_1, x_2 > 0$  ισχύει:  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ .
- ★4) Αν  $\theta_1, \theta_2 > 0$ , τότε ισχύει:  $\ln(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\ln \theta_1}{\ln \theta_2}$ .
- ★5) Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  ονομάζεται εκθετική αν  $a > 0$  και  $a \neq 1$ .
- ★6) Ισχύει:  $\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2$  για κάθε  $x_1, x_2 > 0$ .
- ★7) Ισχύει:  $\log(x_1 + x_2) = \log x_1 + \log x_2$  για κάθε  $x_1, x_2 > 0$ .
- ★8) Ισχύει:  $\ln e^x = x$ .
- ★9) Η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .
- ★10) Για κάθε  $\theta$  θετικό και  $k \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\log \theta^k = k + \log \theta$ .
- ★11) Ισχύει:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^y \Leftrightarrow x < y$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- ★12) Αν  $0 < x < 1$  τότε  $\ln x < 0$ .
- ★13) Είναι:  $\log 10^v = v$ .
- ★14) Η συνάρτηση:  $f(x) = (e - 2)^x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ★15) Ισχύει η ισοδυναμία:  $\log \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$ .

- ★16) Ισχύει:  $\ln \sqrt{2^3} = \frac{3}{2} \ln 2$ .
- ★17) Ισχύει:  $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .
- ★18) Ισχύει:  $\log 10 = 0$ .
- ★19) Ο  $\log x$  παίρνει μόνο θετικές τιμές.
- ★20) Η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  έχει πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ .
- ★21) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:  $f(x) = \ln x$  και  $f(x) = e^x$  είναι καμπύλες συμμετρικές ως προς την ευθεία:  $y = x$ .
- ★22) Όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \ln x$  ανήκουν στο 1<sup>ο</sup> ή το 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.
- ★23) Η συνάρτηση  $f(x) = \ln(1 + e^x)$  παίρνει θετικές τιμές για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

| ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ | ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ | ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ |
|---------------|-----------|------------|
| 1 → Σ         | 1 → Σ     | 1 → Λ      |
| 2 → Λ         | 2 → Σ     | 2 → Σ      |
| 3 → Σ         | 3 → Λ     | 3 → Σ      |
| 4 → Λ         | 4 → Λ     | 4 → Λ      |
| 5 → Λ         | 5 → Λ     | 5 → Σ      |
| 6 → Σ         | 6 → Λ     | 6 → Λ      |
| 7 → Σ         | 7 → Σ     | 7 → Λ      |
| 8 → Σ         | 8 → Σ     | 8 → Σ      |
| 9 → Λ         | 9 → Σ     | 9 → Σ      |
|               | 10 → Λ    | 10 → Λ     |
|               | 11 → Σ    | 11 → Λ     |
|               | 12 → Σ    | 12 → Σ     |
|               | 13 → Λ    | 13 → Σ     |
|               | 14 → Σ    | 14 → Σ     |
|               | 15 → Λ    | 15 → Λ     |
|               | 16 → Σ    | 16 → Σ     |
|               | 17 → Λ    | 17 → Σ     |
|               | 18 → Λ    | 18 → Λ     |
|               |           | 19 → Λ     |
|               |           | 20 → Λ     |
|               |           | 21 → Σ     |
|               |           | 22 → Σ     |
|               |           | 23 → Σ     |

## **Ασκήσεις Επανάληψης – Προτεινόμενα Θέματα στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου**

**BT/01.** Αν  $f(x) = 3\eta\mu 2x + 1$ :

A) Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

B) Βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστό της.

Γ) Για ποια τιμή του  $x \in (0, \pi)$  η  $f$  παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της;

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \frac{5}{2}$ .

E) Λύστε την εξίσωση:  $2\eta\mu^2 2x + 3f(x) + 1 = 0$ .

ΣΤ) Να γίνει γραφική παράσταση της  $f$  σε πλάτος μιας περιόδου.

**BT/02.** Αν  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} - 1$

A) Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

B) Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστό της καθώς και το σημείο  $x_0 \in [0, 2\pi]$  στο οποίο παρουσιάζει το ελάχιστο.

Γ) Λύστε την εξίσωση;  $f(2x) - f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Δ) Να γίνει γραφική παράσταση της  $f$  σε πλάτος μιας περιόδου.

**BT/03.** Αν η συνάρτηση  $f(x) = \alpha + \beta\eta\mu\alpha x$  με  $\alpha > 0, \beta > 0$ , έχει περίοδο  $T = \frac{\pi}{2}$  και έχει μέγιστο το 6:

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

B) Βρείτε το σύνολο των τιμών της.

Γ) Λύστε την εξίσωση;  $f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

Δ) Να γίνει γραφική παράσταση της  $f$  σε πλάτος μιας περιόδου.

**BT/04.** Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - \alpha x + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

A) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x$  είναι 2, να αποδειχθεί ότι  $\alpha = 7$  και  $\beta = 2$ .

B) Για τις τιμές  $\alpha = 7$  και  $\beta = 2$  να λυθεί η ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

**BT/05.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$  έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$  και την ανίσωση  $P(x) < x^2 - 2x + 1$ .

**BT/06.** Αν  $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + \alpha$ :

A) Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε το  $2x - 1$  να είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

B) Λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$ . Γ) Λύστε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

Δ) Να γίνει η διαίρεση  $P(x) : (2x^2 - 3x - 2)$  και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης. Ε) Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) < 30x + 15$ .

**BT/07.** Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ . Αν οι ρίζες του είναι διαδοχικοί όροι αύξουσας αριθμητικής προόδου και η μικρότερη ρίζα είναι ο  $3^{\text{ος}}$  της όρος βρείτε τον  $\alpha_{17}$ , το  $S_{17}$  και το  $S = \alpha_{13} + \alpha_{14} + \dots + \alpha_{17}$ .

**BT/08.** Αν το πολυώνυμο:  $P(x) = x^4 - x^3 + (\log \alpha)^2 - 17$  με  $\alpha > 999$  έχει παράγοντα το  $x - 2$ , τότε:

A) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

B) Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 1)$ .

Γ) Να αποδειχθεί ότι:  $\log \left( \frac{P(10) + 8}{9} \right) = 3$ .

Δ) Να λυθεί η ανίσωση:  $P(x) > -8$

**BT/09.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , διαιρείται με το  $(x - 1)^2$ :

A) Δείξτε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 3$ .

B) Για  $\alpha = 1, \beta = 3$  λύσε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .

Γ) Για  $\alpha = 1, \beta = 3$  λύσε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

**BT/10.** Έστω  $f(x) = (\alpha - 3)^x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

B) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Γ) Αν  $3 < \alpha < 4$  λύστε την ανίσωση:  $f(x^2 - 5x + 7) + 3 > \alpha$ .

**BT/11.** Αν το  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  έχει αρνητική ακέραια ρίζα και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το  $x - 1$  είναι 6:

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 6$ .

**BT/12.** Αν το  $P(x) = x^3 + (2\eta\mu^2\theta - 1)x + 2$ ,  $\theta \in (0, \pi)$  διαιρείται με το  $x + \eta\mu\theta$ , βρείτε το  $\theta$  και λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 0$

**BT/13.** Αν το  $P(x) = 2x^3 - \alpha x + \beta$  διαιρούμενο με το  $x^2 - 4$  δίνει υπόλοιπο  $3x - 2$  γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης και:

A) Βρείτε τα  $P(2)$  και  $P(-2)$ .

B) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Γ) Κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 4)$  και γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Δ) Λύστε την ανίσωση:  $P(x) > 3x - 2$ .

**BT/14.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + kx + 4$ ,  $k \in \mathbb{R}$  διαιρούμενο με το  $x - 2$  δίνει υπόλοιπο 2, τότε:

A) Βρείτε το  $k$

B) Για την παραπάνω τιμή του  $k$  να γίνει η παραπάνω διαίρεση και να γράψετε την ταυτότητά της.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση:  $P(x) < 2$ .

**BT/15.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$  διαιρείται με το  $(x - 1)(x - 2)$  βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$  και την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

**BT/16.** Αν η διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 1)$  έχει υπόλοιπο  $2x + 1$  και το μηδέν είναι ρίζα του  $P(x)$  βρείτε το  $P(1)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - x)$ .

**BT/17.** Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = x^3 + x^2 + (\alpha - 2)x + \beta + 5$ .

A) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$ , και διαιρούμενο με το  $x + 2$  να αφήνει υπόλοιπο 6, δείξτε ότι:  $\alpha = -2$  και  $\beta = -3$ .

B) Αν  $\alpha = -2$  και  $\beta = -3$  λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

**BT/18.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

A) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x + 1$  και η αριθμητική τιμή του για  $x = 2$  να ισούται με 12.

B) Αν  $\alpha = -2$  και  $\beta = 3$  να λύσετε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

Γ) Αν  $\alpha = -2$  και  $\beta = 3$  να γίνει η διαίρεση  $P(x) : (x - 2)$  και να γράψετε την ταυτότητά της.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 12$ .

**BT/19.** Το  $P(x) = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + 2\beta - 6)x + 3\alpha + 2\beta - 1$  έχει παράγοντα το  $x - 1$  ενώ διαιρούμενο με το  $x + 1$  αφήνει υπόλοιπο 8.

A) Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

B) Να γίνει το  $P(x)$  γινόμενο.

Γ) Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) > 0$ .

**BT/20.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + 2x^2 - (\beta + 1)x - 6$ .

A) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το  $x + 1$  και οι  $\alpha, \beta, 7$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 4$ .

B) Για τις τιμές των  $\alpha, \beta$  που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

Γ) Για τις ίδιες τιμές να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$ .

**BT/21.** Θεωρώ το πολυώνυμο:  $P(x) = 4x^3 - \alpha^2 x^2 - 5x + 2\alpha + 1$ , με  $\alpha \neq 0$  και ρίζα το 1. A) Δείξτε ότι  $\alpha = 2$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ . Γ) Λύστε την ανίσωση  $P(x) < 1 - x$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $x^4 - x^3 - x^2 + 1 = P(x)$ .

**BT/22.** A) Δείξτε ότι αν  $\alpha, \beta, \gamma$  διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου τότε ισχύει:  $\alpha + \gamma = 2\beta$ .

B) Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \kappa x^3 + 2x^2 - (\lambda + 1)x - 6$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .

1. Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το  $x = -1$  και οι  $\kappa, \lambda, 7$  είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 4$ .

2. Για τις τιμές των  $\kappa, \lambda$  από το προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

3. Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$  αν  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 4$ .

**BT/23.** Έστω  $P(x) = x^3 - \lambda x^2 + 23x - 15$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

A) Αν το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - 1$ , τότε  $\lambda = 9$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

Δ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης  $P(x) = 0$  είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αύξουσας Αριθμητικής Προόδου, βρείτε τον 12<sup>ο</sup> όρο της και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της.

**BT/24.** Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + \alpha$  με το  $x - 3$  είναι 2, βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$ , γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης και λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 2$ .

**BT/25.** Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) = x^4 - x^3 - \alpha x + \beta$  με το  $x^2 - 3x + 2$  είναι  $2x + 1$ , βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης και λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 2x + 1$ .

**BT/26.** Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 - x + \alpha$  με το  $x^2 - x - 2$  είναι  $\beta x - 10$ , βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης και λύστε την ανίσωση:  $P(x) + 5x + 10 < 0$ .

**BT/27.** Αν  $P(x) = (\lambda - 1)x^5 + 2\lambda x^4 - 5x^3 + \alpha x + \lambda\beta$  είναι 4<sup>ου</sup> βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το  $x^2 + 2x$  είναι  $-31x - 2$ , βρείτε τα  $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$  και την ανίσωση:  $P(x) \leq 0$ .

**BT/28.** Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$  με το  $x^2 - x$  είναι  $x + 1$ :

A) δείξτε ότι  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 1$

B) Να γίνει η παραπάνω διαίρεση και να γράψετε την ταυτότητα της.

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $P(x) < x + 1$ .

**BT/29.** Αν το πολυώνυμο:  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 2$  έχει δύο θετικές ακέραιες ρίζες, βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και λύστε την ανίσωση:

$$P(x)(x^2 - 9) < 0.$$

**BT/30.** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης που ορίζει το πολυώνυμο:  $P(x) = \lambda x^3 + 2\lambda^3 x^2 - \lambda^2 x - 2$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(1, 0)$ , βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Για αυτή την τιμή του  $\lambda$  βρείτε όλα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον  $x'x$  καθώς και όλα τα διαστήματα στα οποία η γραφ. παράσταση βρίσκεται πάνω από τον  $x'x$ .

**BT/31.** Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x^2 + 2x$  είναι  $x - 2$ :

A) Γράψτε την ταυτότητα της διαίρεσης.

B) Βρείτε τα  $P(0)$  και  $P(-2)$ .

Γ) Αν το  $P(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και η διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 2)$  αφήνει υπόλοιπο  $5x + 4$ , βρείτε το βαθμό του πηλίκου αυτής της διαίρεσης, καθώς και το  $P(x)$ .

**BT/32.** Έστω  $P(x) = x^3 - 7x + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

A) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 2$  είναι  $-12$  να δείξετε ότι  $k = -6$ .

B) Αν  $k = -6$  λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .

Γ) Αν  $k = -6$  λύστε την ανίσωση:  $P(x) > 0$ .

Δ) Λύστε την ανίσωση:  $e^{3\ln x} - 7e^{\ln x} - 6 < 0$ .



**BT/33.** Έστω  $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

A) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x-1$  είναι 7, βρείτε το  $k$ .

B) Αν  $k = 2$  να γίνει η διαίρεση  $P(x):(3x-1)$  και να γραφεί η ταυτότητά της.

Γ) Αν  $k = 2$  λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 1$ .

Δ) Αν  $k = 2$  λύστε την ανίσωση:  $(x+1) \cdot (P(x)-1) < 0$ .

**BT/34.** Έστω  $P(x) = 12x^3 + 8x^2 - 13x + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

A) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x):(x-1)$  είναι 8, δείξτε ότι  $k = 1$ .

B) Αν  $k = 1$  κάνετε τη διαίρεση  $P(x):(2x+3)$  και γράψτε την ταυτότητά της.

Γ) Αν  $k = 1$  λύστε την εξίσωση:  $P(x) = -2$ .

Δ) Αν  $k = 1$  λύστε την ανίσωση:  $P(x) > -2$ .

**BT/35.** Έστω  $P(x) = 2x^4 - 2x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

A) Αν το  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x+1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το  $x+2$  είναι 28, βρείτε το  $\alpha, \beta$ .

B) Αν  $\alpha = 5$  και  $\beta = 1$  λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .

Γ) Αν  $\alpha = 5$  και  $\beta = 1$  λύστε την ανίσωση:  $P(x) < 0$ .

**BT/36.** Βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με άθροισμα 70 και τέτοιους ώστε αν πολλαπλασιάσω τους δύο άκρους με 4 και τον μεσαίο με 5 να προκύπτει γεωμετρική πρόοδος.

**BT/37.** Αν  $f(x) = \ln(e^x - 3^{x-1})$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = x - 2\ln 2$ .

**BT/38.** Αν  $f(x) = \ln(9^x - 3^x \cdot e^x)$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Δείξτε ότι  $f(1) < 0$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x) > 2x + \ln 2$ .

**BT/39.** Αν  $f(x) = \ln[\ln(x-1)]$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Βρείτε τα σημεία όπου η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες.

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x-e) < 0$ .

**BT/40.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log[\log(x-3)]$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

Β) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 0$ .

Γ) Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Δ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x^2 - 7x + 23) < 0$ .

**BT/41.** Αν  $f(x) = (\ln \alpha - 1)^x$ ,  $\alpha \in (0, +\infty)$ .

Α) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Β) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η γραφ. παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $M(2, 4)$ .

**BT/42.** Αν  $f(x) = (3 - 2 \ln \alpha)^x$ ,  $\alpha \in (0, +\infty)$ .

Α) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Β) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η γραφ. παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $M(1, 5)$ .

**BT/43.** Αν  $f(x) = (1 - 2 \ln \alpha)^x$ ,  $\alpha \in (0, +\infty)$ .

Α) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Β) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η γραφ. παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $M(1, 1)$ .

**BT/44.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(10^x + 2)$ .

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Β) Δείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να λυθεί την εξίσωση:  $f(2x) = \log 3 + f(x)$ .

Δ) Να λυθεί την ανίσωση:  $10^{f(x)} + 10^{f(2x)} > 6$ .

**BT/45.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log\left(\frac{7^{2x} - 1}{7^x + 5}\right)$ .

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Β) Να λυθεί η εξίσωση:  $f(x) = 2 \log 2$ .

Γ) Να λυθεί η ανίσωση:  $f(x) < 0$ .

**BT/46.** Έστω  $f(x) = \ln \frac{4^x - 2^x}{2^{x+1} + 4}$ .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της..

Β) Λύστε την εξίσωση  $f(x) + 2 \ln 2 = 0$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση  $f(x) < 0$ .

**BT/47.** Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x[\ln^2(x+3) - \ln(x+3)]}.$$

**BT/48.** Έστω  $f(x) = \ln(e^x - 2)$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Δείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(2x) = \ln 7 + f(x)$

Δ) Αν  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου να αποδείξετε ότι:  $(e^\beta - 2)^2 = (e^\alpha - 2) \cdot (e^\gamma - 2).$

**BT/49.** Αν  $f(x) = \log(2^x - 8)$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Δείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Βρείτε σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

Δ) Να λυθεί η εξίσωση:  $f(x) + x \log 2 = \log 12$

Ε) Δείξτε ότι δεν υπάρχει  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  τέτοιο που να ισχύει:  $f(2x) = f(x) + \log 2 - \log 3.$

**BT/50.** Σε Αριθμητική Πρόοδο  $\alpha_n$  έχουμε πρώτο όρο  $\alpha_1 = \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2}$  και διαφορά  $\omega = 2.$

A) Ποιος όρος της ισούται με  $\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + 6$ ;

B) Βρείτε το  $\theta \in (0, \pi)$  ώστε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της να ισούται με 36.

**BT/51.** Λύστε τις εξισώσεις:

A)  $4^{\ln x} - 2^{\ln x} - e^{2\ln\sqrt{2}} = 0$

B)  $2^{\ln x^2} - 2^{1+\ln x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$

**BT/52.** Να λυθούν οι ανισώσεις:

A)  $2^{1+\ln x^2} - 2^{\ln x} < 1$

B)  $\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} < 1$

Γ)  $\frac{e^{2x} - 3}{e^x - 1} < 3$

**BT/53.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(3e^{2x} - e^x - 2).$

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

B) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 3x.$

**BT/54.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- B) Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$ .
- Γ) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η  $C_f$  είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

**BT/55.** Οι αριθμοί  $\alpha_1 = x + 2$ ,  $\alpha_2 = 6x - 2$  και  $\alpha_3 = 5x + 6$  είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου.

- A) Να αποδείξετε ότι  $x = 2$ .
- B) Να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  της προόδου.
- Γ) Να υπολογίσετε τον δέκατο όρο  $\alpha_{10}$  της προόδου.
- Δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $S_{10}$  των δέκα πρώτων όρων της προόδου.

**BT/56.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $f(x) = \ln(e^x - e) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- B) Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 2e, 0)$  να αποδείξετε ότι  $k = -1$ .
- Γ) Αν  $k = -1$  λύστε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- Δ) Αν  $k = -1$  λύστε την ανίσωση  $f(2 \ln x) > \ln(e - 1)$ .

**BT/57.** Αν  $f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}$  τότε:

- A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- B) Βρείτε τα σημεία όπου η  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .
- Γ) Λύστε την εξίσωση  $f(x) = 2 \log x - 1$ .
- Δ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x) \geq 2$ .
- E) Δείξτε ότι  $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ .

**BT/58.** Αν  $f(x) = \left(\frac{\alpha^2 - \alpha - 2}{\alpha - 3}\right)^x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- A) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .
- B) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.
- Γ) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ) Αν  $f(3) = \frac{8}{27}$  και  $\alpha$  ακέραιος λύστε την ανίσωση:

$$3f^2(x) - 5f(x) + 2 < 0.$$

**BT/59.** Αν  $f(x) = (6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha + 1)^x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να ορίζεται σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

B) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Βρείτε το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ) Αν  $\alpha = \frac{1}{2}$  λύστε την ανίσωση:  $f(x) < \frac{4}{81}$ .

**BT/60.** Αν  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  τότε:

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Να συγκρίνετε τα  $f(2)$  και  $f(3)$ .

Γ) Λύστε την εξίσωση  $f(x) + f(x+2) = \ln 2$ .

Δ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x) < f(x-1)$ .

**BT/61.** Αν  $f(x) = \log(\log x)$  τότε:

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Βρείτε τα σημεία όπου η  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

Γ) Βρείτε τα διαστήματα όπου η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση  $f(5x) = \log 2$ .

E) Λύστε την ανίσωση:  $\left[f(10^x)\right]^2 - 3f(10^x) + 2 < 0$ .

**BT/62.** Αν  $f(x) = \log(1+9^x) + \alpha + \beta x$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 0 \text{ και } f(1) = 0.$$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

Γ) Δείξτε ότι:  $f(x) = \log\left(\frac{1+9^x}{2 \cdot 5^x}\right)$ .

**BT/63.** Αν  $f(x) = \ln \sqrt{4 \cdot 2^x - 9 \cdot 3^x}$ :

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  αν οι αριθμοί  $\ln 5$ ,  $f(2\alpha)$  και  $\alpha \ln 6$  είναι διαδοχικοί όροι Α.Π..

Γ) Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε, λύστε την ανίσωση:

$$\log(\log y) + \log(\log y^2 + \alpha + 1) > 0.$$

**BT/64.** Αν  $f(x) = e^{\alpha x + \ln 2} - 2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

A) Εξετάστε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B) Αν  $f(1) = -\frac{3}{2}$  βρείτε το  $\alpha$ .

Γ) Αν  $\alpha = -\ln 4$  δείξτε ότι:  $f(x) = 2^{1-2x} - 2$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = -3 \cdot 2^{-x}$ .

**BT/65.** Αν  $f(x) = 3 - \log(10 - 2x)$  τότε:

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Βρείτε τα σημεία όπου η  $C_f$  τέμνει τους άξονες.

Γ) Μελετήστε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $8^x = f\left(\frac{99}{20}\right)$ .

**BT/66.** Αν  $f(x) = \log(x+1) + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  τότε:

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Αν η  $C_f$  τέμνει τον  $x'$  στο σημείο  $B(9,0)$  δείξτε ότι:  $\alpha = -1$

Γ) Αν  $\alpha = -1$  βρείτε πού η  $C_f$  τέμνει τους άξονες.

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \log 2$ , για  $\alpha = -1$ .

**BT/67.** Αν  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{4} + 1$

A) Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

B) Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστό της.

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 0$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(4x) - f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**BT/68.** Θεωρούμε τα πολυώνυμα  $P(x) = x^3 + \alpha x + 3$  και

$R(x) = x^3 + \beta x^2 - 4x + 4$  με ακέραιους συντελεστές.

A) Αν έχουν θετική κοινή ακέραια ρίζα, δείξτε ότι  $\alpha = -4$  και  $\beta = -1$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $R(x) = 0$

Γ) Βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x):(x-2)$  και στη συνέχεια λύστε την ανίσωση:  $P(x) \leq 3$ .

**BT/69.** Αν  $f(x) = \ln(2^x - 1)$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Β) Βρείτε σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

Γ) Αποδείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση:  $f(x) + x \ln 2 = 2 \ln 4 - 3 \ln 2$ .

Ε) Να λυθεί η εξίσωση:  $f(2x) + f(x) = f(2)$ .

ΣΤ) Να λυθεί η ανίσωση:  $f(2x) - f(x) > \ln 12 - x \ln 2$ .

**BT/70.** Αν  $f(x) = \log(1 - \log x)$ .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .      Β) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 1$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση:  $f(x) > 0$ .

**BT/71.** Αν  $f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}$

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Β) Δείξτε ότι η  $f$  είναι περιττή.

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) + f(x+1) = 0$ .

**BT/72.** Δίνεται η περιοδική συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu 2x + 1$ .

Α) Βρείτε την περίοδό της.

Β) Βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστό της,

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \frac{3}{2}$ .

Δ) Να λυθεί η εξίσωση  $2\eta \mu^2 2x + 3f(x) - 5 = 0$

**BT/73.** Αν  $f(x) = \ln(e^x - 1) + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Β) Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(\ln 2, 1)$  να δείξετε ότι  $k = 1$ .

Γ) Για  $k = 1$  να λυθεί η εξίσωση:  $f(3x) - f(x) = f(\ln 8) - 1$ .

Δ) Να λυθεί η ανίσωση  $f(x) > 0$ .

**BT/74.** Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x + 10$ .

Α) Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 2 δείξτε ότι:  $\alpha = 3$

Β) Για  $\alpha = 3$  λύστε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

Γ) Για  $\alpha = 3$  λύστε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .

Δ) Αν οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι τρεις πρώτοι όροι αύξουσας αριθμητικής προόδου  $(\alpha_n)$ , βρείτε τον 15° όρο της προόδου και το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της. Ποιος όρος της προόδου ισούται με 59;

**BT/75.** Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = 4x^4 + (\alpha + \beta)x^2 + \alpha - \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

A) Αν  $P(1) = 12$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 2$  είναι 93, δείξτε ότι  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$ .

B) Για  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$  λύστε την εξίσωση  $P(x) = x^2 + 11$ .

Γ) Για  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$  να γίνει η διαίρεση  $P(x) : (2x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητά της.

Δ) Για  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$  να λύσετε την ανίσωση:  $P(x) < 3$ .

**BT/76.** Έστω  $f(x) = \log(2 + \sin x)$ .

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \log 3 - \log(\sin x)$  στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Γ) Βρείτε το  $x$  ώστε οι  $\log 2$ ,  $\frac{1}{2}\log 3$  και  $f(x)$  να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**BT/77.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x + \beta$  διαιρούμενο με το  $x^2 - x - 2$  δίνει υπόλοιπο  $2x + 1$ :

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

B) Λύστε την ανίσωση  $P(x) \geq 2x + 1$ .

**BT/78.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx + 4$  διαιρούμενο με το  $x - 1$  δίνει υπόλοιπο  $-3$ :

A) Αποδείξτε ότι:  $k = -8$ .

B) Λύστε την ανίσωση:  $P(x) \geq 0$ .

Γ) Λύστε την εξίσωση:  $2\sin^2 x + \eta \mu^2 x - 8\sin x + 3 = 0$  στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**BT/79.** Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} x + 2y = \mu \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να βρείτε

B) Αν  $(x_0, y_0)$  η μοναδική λύση του συστήματος λύστε την ανίσωση:  $x_0^2 - y_0^2 < 5$ .

**BT/80.** Δίνεται το σύστημα:  $\begin{cases} 2x - y = \mu \\ x + y = 1 - \mu^2 \end{cases}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

A) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  η οποία και να βρεθεί.

B) Βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε:  $6x_0 + 3y_0 \leq 3$ .



**BT/81.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} x + 2y = \mu \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

A) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  η οποία και να βρεθεί.

B) Βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε:  $(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 \leq 8$ .

**BT/82.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

A) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  η οποία και να βρεθεί.

B) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $g(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(x_0 + y_0)$

Γ) Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $g(\lambda) = 0$ , να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες  $x_1 = \rho_1^2 \rho_2$  και  $x_2 = \rho_1 \rho_2^2$ .

**BT/83.** A) Σε ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  με δύο αγνώστους  $x, y$  ισχύει:  $4D = 3D_x - (\mu + 2)D_y$ . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x, y) = (1, -2)$  να βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$ .

B) Αν  $f(x) = x^2 + 4x - 2k$ , να βρείτε την τιμή του  $k \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

Γ) Για τις τιμές των  $\lambda, \mu$  που βρήκατε προηγουμένως να λύσετε την ανίσωση:  $f(x) > -\frac{8}{3}\mu$ .

**BT/84.** Σε ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  με δύο αγνώστους  $x, y$  ισχύει:  $D_x^2 + D_y^2 + 5D^2 - 2DD_x + 4DD_y = 0$ . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση βρείτε τα  $x, y$ .

**BT/85.** Σε ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:  $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D + 4D_x - 5$ . Βρείτε τα  $x, y$ .

**BT/86.** Αν ένα  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:  $D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 2DD_x$  και  $D \neq 0$  βρείτε τα  $x, y$ .

**BT/87.** Αν το σύστημα  $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$  έχει μοναδική λύση:

A) Βρείτε τη μοναδική λύση.

B) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $2y_0^2 - x_0^2 - 2 < 0$ .

Γ) Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης:  $f(\lambda) = 2x_0^2 - y_0^2$ .

**BT/88.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y = \lambda - 1 \end{cases}$$

A) Βρείτε τις ορίζουσες:  $D, D_x, D_y$

B) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  η οποία και να βρεθεί.

Γ) Να βρεθεί το  $\lambda$  ώστε να ισχύει ή σχέση  $x_0 + y_0 \geq 1$ .

**BT/89.** Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ x + 2\lambda y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

A) Υπολογίστε τις ορίζουσες  $D, D_x, D_y$ .

B) Να βρείτε τη λύση  $(x, y)$  του  $(\Sigma)$ .

Γ) Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού  $\lambda$  ώστε για τη λύση  $(x, y)$  του  $(\Sigma)$  που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να ισχύει:

$$(2\lambda^2 + 1)(x - y)(\lambda^2 - \lambda - 2) < 0.$$

**BT/90.** Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} (\lambda + 2)x - 3y = 2\lambda + 3 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$

A) Υπολογίστε τις ορίζουσες  $D, D_x, D_y$ .

B) Δείξτε ότι το παραπάνω σύστημα έχει ,για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  .

Γ) Να βρεθεί η μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  .

Δ) Βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε να ισχύει:  $x_0 + 3y_0 = 7$ .

**BT/91.** Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} (\lambda + 2)x - 3y = 2\lambda + 3 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$

A) Υπολογίστε τις ορίζουσες  $D, D_x, D_y$ .

B) Δείξτε ότι το παραπάνω σύστημα έχει ,για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  .

Γ) Να βρεθεί η μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  .

Δ) Βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε να ισχύει:  $x_0 + 3y_0 = 7$ .

**BT/92.** Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} (\lambda + 2)x - y = \lambda \\ 3x + (\lambda - 2)y = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

A) Υπολογίστε τις ορίζουσες  $D, D_x, D_y$ .

Β) Βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  και προσδιορίστε την.

Γ) Βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε για τη μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$  να ισχύει:  $x_0 + y_0 < -1$ .

Δ) Για ποια τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  οι ευθείες:  $(\varepsilon): (\lambda + 2)x - y = \lambda$  και  $(\eta): 3x + (\lambda - 2)y = 1$  δεν έχουν κοινό σημείο;

**BT/93.** Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Α) Να βρείτε τις ορίζουσες  $D, D_x, D_y$ .

Β) Αποδείξτε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού  $\lambda$  έχει μοναδική λύση την οποία να βρείτε.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες είναι  $|(\lambda - 1)D_x - 2D_y| < 4$ .

**BT/94.** Θεωρώ το σύστημα:  $\begin{cases} x + y = 2t + 1 \\ 2x + 3y = 5t + 4 \end{cases}.$

Α. Δείξτε ότι για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x_0, y_0)$ .

Β. Βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος  $(x_0, y_0)$ .

Γ. Βρείτε τις τιμές του  $t \in \mathbb{R}$  ώστε:  $x_0^2 + y_0^2 < 17$ .

Δ. Λύστε την ανίσωση:  $(x_0^2 + y_0^2 - 17) \cdot (x_0 + 2) \cdot y_0 < 0$ .

**BT/95.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ .

Α) Βρείτε το πεδίο ορισμού.

Β) Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Δείξτε ότι η  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

Δ) Λύστε την ανίσωση  $f(2x) - f(x) < x - \ln 2 + \ln\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$ .

Ε) Δείξτε ότι  $f(\ln 2) + f(\ln 3) + f(\ln 4) + \dots + f(\ln n) = -\ln n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**BT/96.** Αν  $P(x) = x^3 + x^2 + (\log \alpha - 2)x - \log \alpha$ , με  $\alpha > 0$ :

Α) Δείξτε ότι η διαίρεση:  $P(x) : (x - 1)$  είναι τέλεια.

Β) Βρείτε τις τιμές του  $\alpha$  ώστε το  $P(x)$  να έχει τρεις διαφορετικές ρίζες.

Γ) Για  $\alpha = 10$  λύστε την ανίσωση:  $P(x) \geq 0$  και την εξίσωση:  $P(\sin x) = -\eta \mu^2 x$ .

**BT/97.** Δίνεται η γωνία  $x$ , με  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , για την οποία ισχύει

$$15\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x - 12 = 0.$$

A) Να αποδείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ .

B) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$ .

Γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(17\pi + x)}{4\varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) + 3\sigma\varphi\left(x - \frac{17\pi}{2}\right)}.$$

**BT/98.** A) Να λύσετε την εξίσωση:  $4^x - 17 \cdot 2^x + 16 = 0$

B) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \ln\left(\frac{1-2^x}{2^x-16}\right)$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) = -\ln 4$ .

**BT/99.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log(x-6) + \log(x+1)$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$

B) Να λύσετε την εξίσωση:  $\log(x-6) + \log(x+1) = 3\log 2$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$ .

**BT/100.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$  και

$$g(x) = \log(9^x - 3^x)$$

A) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) + \ln x = 3\ln 2$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $g(x) - g(1) < \log 2$ .

**BT/101.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$  και

$$g(x) = \ln(e^x - 1).$$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $g$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \ln 2 + g(x)$ .

**Δ.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > \ln 2 + g(x)$ .

**BT/102.** A) Να δείξετε ότι:  $8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 3$

**B.** Να λύσετε την εξίσωση:  $3^{2\log_2 x} - 2 \cdot 3^{\log_2 x} - 8^{\log_2 \sqrt[3]{3}} = 0$ .

**BT/103.** Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$P(x) = (\alpha^2 - 1)x^4 + (\alpha + 1)x^3 + x^2 + (4\beta - 1)x + 6, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - 1$  είναι  $-4$ :

**A.** Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$ .

**B.** Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = -3$ , να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

**BT/104.** Δίνεται η παράσταση:  $K = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

A) Να δείξετε ότι:  $K = \eta\mu x$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση:  $K = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $\ln K = 0$  στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

Δ) Να λύσετε την εξίσωση  $e^{K\sqrt{3}} - \frac{1}{e\sqrt{e}} = 0$ .

**BT/105.** Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\eta\mu(\pi - 2\alpha)}{1 + \sigma\upsilon\nu(-2\alpha)}$  και

$$B = \eta\mu^3\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha \cdot \eta\mu\alpha.$$

A) Να δείξετε ότι:  $A = \epsilon\phi\alpha$  και  $B = \frac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση:  $e^{A\sigma\upsilon\nu\alpha + B} - 1 = 0$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $4^A - 2^A = 2$ .

**BT/106.** Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ , το οποίο έχει παράγοντα το  $x - 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το  $x + 1$  είναι  $-18$ .

A) Να δείξετε ότι  $\alpha = 7$  και  $\beta = -2$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση  $P(\eta\mu 2x) = 0$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $2 \cdot 8^x - 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^x = 2$ .

**BT/107.** Δίνεται ο αριθμός  $\alpha = \frac{2\log 3 + 3\log 2 + \log 5 - 1}{2\log 2 + \log 150 - 2}$ .

A) Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση  $(\log 10000)^x = \frac{100^{\alpha \log \alpha}}{\alpha}$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\alpha}$ .

**BT/108.** Για τη γωνία  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  ισχύει ότι  $\eta\mu\theta = 100^{\frac{3}{2}\log 2 - \frac{1}{2}}$ .

A) Να δείξετε ότι  $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ .

B) Βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$ .

Γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = \left(\sqrt{10}\right)^{\varepsilon\phi\theta \cdot \log \frac{1}{27}} - \left(\frac{1}{10}\right)^{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \log 32}$ .

Δ) Να λύσετε την εξίσωση  $2^x - 5 \cdot \sqrt{2^x} - 20 = 25\eta\mu 2\theta$ .

**BT/109.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu 2x \cdot \sigma\phi x - 2\eta\mu^2 x$  και

$g(x) = \log\left(\frac{11-x}{11+x}\right)$ . A) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$ .

B) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + g(9) = 0$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

**BT/110.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ , του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 10 και ακόμα ισχύει

$P\left(\frac{P(0)}{3}\right) = 10$ . A) Να δείξετε ότι  $\alpha = -5$  και  $\beta = 8$ .

B) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του  $P(x)$  βρίσκεται πάνω από την ευθεία:  $(\varepsilon): y = 10$ .

Γ) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - e^{\ln(2\log 5 + \log 40)}$ .

**BT/111.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta$ , το οποίο έχει παράγοντα το  $x+1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το  $x-2$  είναι  $-9$ .

A) Να δείξετε ότι  $\alpha = -4$  και  $\beta = 3$ .

B) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $2\eta\mu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4\eta\mu x + 2$ .

**BT/112.** Θεωρούμε τα πολυώνυμα  $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$  και

$Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$ , όπου  $\alpha > 0$ , τα οποία είναι ίσα.

A) Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $P(x) = 0$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $25^{P(x)} - 3 \cdot 5^{P(x)} = 10$ .

**BT/113.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = (\ln \kappa + 1)x^4 + x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$ , το οποίο είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και έχει παράγοντα το  $x^2 - x - 6$ .

Α) Να δείξετε ότι  $\kappa = \frac{1}{e}$ ,  $\alpha = -5$  και  $\beta = 6$ .

Β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(\ln x) = 0$ .

Δ) Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu^3 x = 5(\eta\mu x - 1) - 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$ .

**BT/114.** Δίνεται το  $P(x) = (x^2 - x - 1)^{2015} - (x^2 - 2x)^{2014} + \alpha x + \beta$ , πολυώνυμο του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι 9 και ο σταθερός όρος 7.

Α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 3$  και  $\beta = 8$ .

Έστω επιπλέον το πολυώνυμο,  $Q(x) = x^3 - 8x^2 + \lambda x + 20$  το οποίο διαιρούμενο με το  $x - 100^{\log \sqrt{\alpha}}$  αφήνει υπόλοιπο  $(\sqrt{e})^{2\ln \beta}$ .

Β) Να δείξετε ότι  $\lambda = 11$ .

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $Q(x) \geq 0$ .

**BT/115.** Δίνονται οι  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - 4x\right) + \eta\mu(21\pi + 4x)$  και

$$g(x) = \eta\mu\left(\frac{37\pi}{2} + 2x\right) - \sigma\upsilon\nu(37\pi - 2x).$$

Α) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\eta\mu 4x$  και  $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$ .

Β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποια  $x$  παίρνει τη τιμή αυτή.

Γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $g$ , καθώς και για ποια  $x$  παίρνει τη τιμή αυτή.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + g(x) = \ln\left(f\left(\frac{\pi}{24}\right)\right)$  στο  $(-\pi, \pi)$ .

**BT/116.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 5\eta\mu\theta \cdot x^2 - 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ , όπου  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , το οποίο έχει παράγοντα το  $x - \epsilon\phi\frac{3\pi}{4}$ .

A) Να δείξετε ότι  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

B) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$ .

Γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(\sin x) = 0$ .

**BT/117.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^x$ .

A) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι εκθετική συνάρτηση.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Για  $\alpha = 3$  να λύσετε την ανίσωση  $f(2x+1) - 18f(x-1) + 4 \leq 0$ .

Δ) Για  $\alpha = 3$  να λύσετε την εξίσωση  $\ln f(x) + \ln(f(x) + 6) = 4 \ln 2$ .

**BT/118.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x + 5)$ .

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

B) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2 \ln 2$ .

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 0$ .

**BT/119.** Για ποιες τιμές του  $\theta \in \mathbb{R}$  δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$  η εξίσωση:  
 $x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 1 + \log^2 \theta = 0$ ;

**BT/120.** Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + (\log \alpha)x - 1 = 0$ :

A) Βρείτε τον  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει:  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ .

B) Για το  $\alpha$  του B) ερωτήματος λύστε την εξίσωση.

**BT/121.** Αν το πολυώνυμο

$f(x) = (2\sin \theta + 1)x^4 + x^3 \ln^2 \alpha + x^2 \ln \alpha + x - 1$  με  $\theta \in (0, \pi)$  είναι 3<sup>ου</sup> βαθμού και έχει ρίζα το 1:

A) Δείξτε ότι  $\theta \in \frac{2\pi}{3}$  και  $\alpha \in \frac{1}{e}$ .

B) Βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης  $f(x) : x^2$ .

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \leq 5x - 5$ .

**BT/122.** Αν το πολυώνυμο  $f(x) = x^3 + 2\alpha x^2 - \beta x - 1$  έχει παράγοντα το  $x - 1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $f(x)$  με το  $x + 1$  είναι 6.

A) Δείξτε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 4$ . B) Δείξτε ότι  $4^{\ln x} = x^{\ln 4}$ .

Γ) Λύστε την εξίσωση  $\beta^{2 \ln x} = 5 + 4x^{\ln 2 \alpha}$ .

**BT/123.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln \sqrt{2^x - 3}$  και

$g(x) = \sqrt{\ln(2^x - 3)}$ .



A) Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

B) Λύστε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

Γ) Συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(3)$  και  $g(3)$ .

**BT/124.** Αν το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - (\alpha + 2)x^2 - (\beta + 3)x + 4$  έχει ρίζα το  $-1$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 2$  είναι  $-18$ :

A) Βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

B) Λύστε την εξίσωση:  $P(x) = 0$ .

Γ) Να λυθεί η εξίσωση  $2^{3x+1} - 7 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x = 2^{x+1} - 4$ .

Δ) Αν  $Q(x) = P(x) + 3x^2 + 3x$  λύστε την εξίσωση:  $Q(x) = 0$  και την  $Q(\ln x) = 0$ .

**BT/125.** Αν  $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$ :

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = 1 + \ln(e - 1)$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση  $f(x) \leq \ln 2$ .

**BT/126.** Αν  $f(x) = \ln(4^{x+1} - 1)$  και  $g(x) = \ln(2^{x+3} - 2^{1-x})$ :

A) Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

B) Λύστε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

Γ) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $g$ .

**BT/127.** Αν  $f(x) = \ln(3^{x+1} - 1)$  και  $g(x) = \ln(3 + 7 \cdot 3^x)$ :

A) Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων.

B) Λύστε την εξίσωση  $2\ln(3^x + 1) - \ln 2 = f(x)$ .

Γ) Λύστε την ανίσωση  $x \ln x + f(x) \geq g(x)$ .

**BT/128.** Αν  $f(x) = 2x + \ln(e^{2x} - 1)$ :

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και δείξτε ότι ο τύπος της γράφεται  $f(x) = \ln(e^{4x} - e^{2x})$ .

B) Αν  $g(x) = \ln(e^{3x} - e^x)$  με  $x > 0$ , να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  έχουν κοινά σημεία.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \leq 2x + 2\ln 3 + \ln(e^x + 1)$ .

**BT/129.** Αν  $f(x) = 2\eta\mu(7\pi - 2x) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + 2x\right) + 1$ :

A) Απλοποιήστε τον τύπο της  $f$ .

Β) Βρείτε την περίοδο, το μέγιστο και το ελάχιστο της  $f$ .

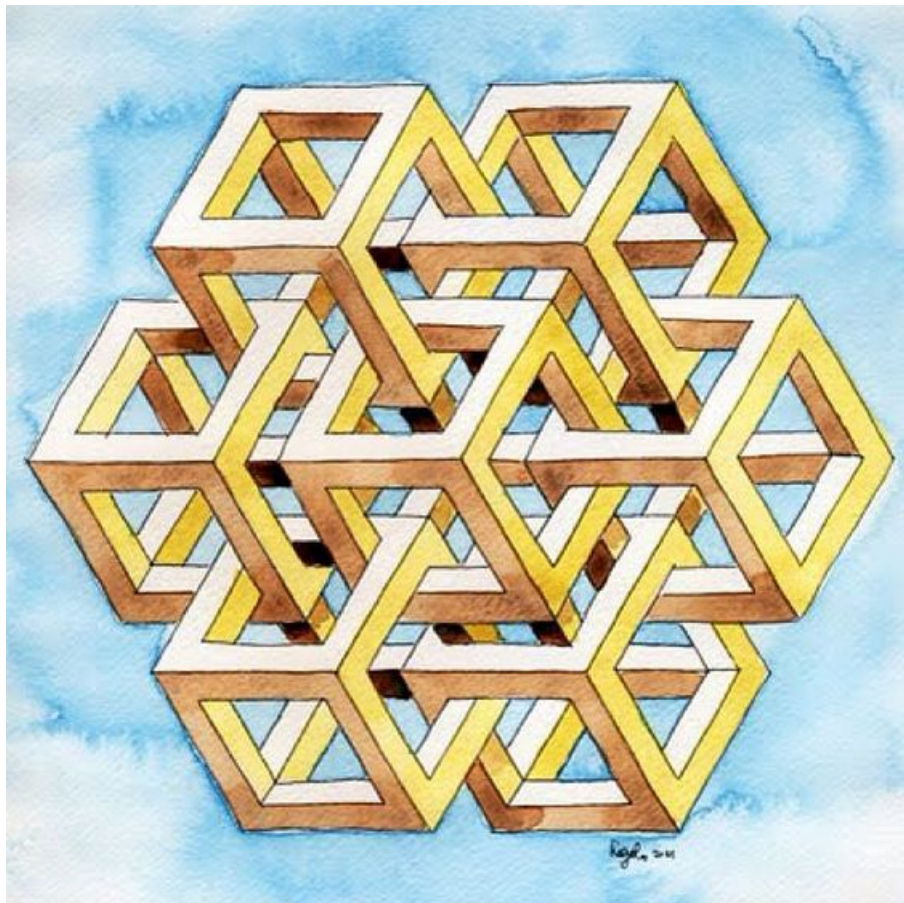
Γ) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Δ) Λύστε την εξίσωση:  $f(x) = \frac{3}{2}$ .

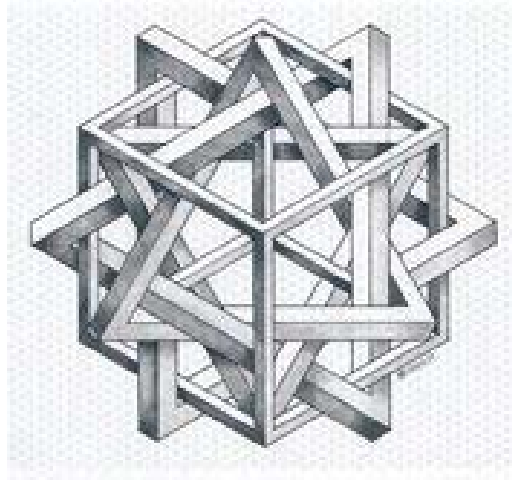
**ΒΤ/130.Α)** Αν  $7\eta\mu(9\pi - x) - 6\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2} + x\right) = 24\sigma\upsilon\nu\frac{35\pi}{3}$  και

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου  $x$ .

Β) Αν  $4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) + 3\eta\mu\left(\frac{35\pi}{2} - x\right) = \eta\mu\frac{\pi}{10} + \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{5}$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , υπολογίστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου  $x$ .



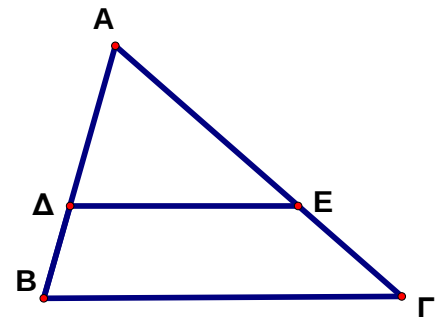
# Γεωμετρία



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ ΚΑΙ Θ. ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ

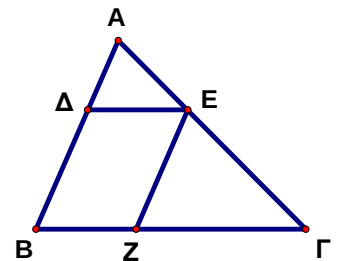
**ΒΛ/01.** Α) Αν  $\Delta E \parallel B\Gamma$ ,  $A\Delta = 6$ ,  $\Delta B = 2$ ,  $A\Gamma = x + 4$  και  $E\Gamma = x$  υπολογίστε το  $x$ .

Β) Αν  $\Delta E \parallel B\Gamma$ ,  $A\Delta = 4$ ,  $\Delta B = x$ ,  $A\Gamma = x + 3$  και  $E\Gamma = 1$  υπολογίστε το  $x$ .

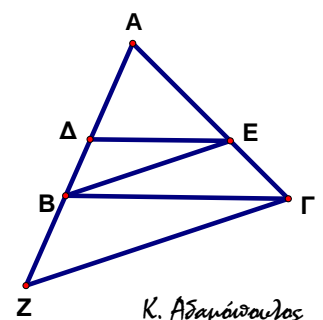


Γ) Αν  $A\Delta = x$ ,  $\Delta B = 2$ ,  $A\Gamma = 4$  και  $A\Gamma = x + 2$  υπολογίστε το  $x$  ώστε να είναι:  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

Δ) Αν  $\Delta E \parallel B\Gamma$ ,  $EZ \parallel AB$ ,  $A\Delta = 4$ ,  $\Delta B = 8$ ,  $A\Gamma = 24$  και  $B\Gamma = 18$  υπολογίστε τα  $A\Gamma$  και  $Z\Gamma$ .



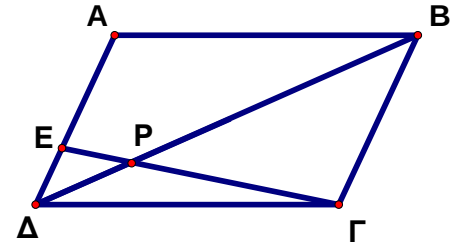
**ΒΛ/02.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρνω  $\Delta E \parallel B\Gamma$  και  $ΓΖ \parallel BE$ . Αν  $A\Delta = 6$ ,  $A\Gamma = 8$  και  $A\Gamma = 12$ , βρείτε τα  $AB$  και  $AZ$ .



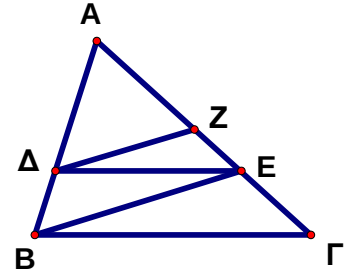
Κ. Αδαμίδης

**ΒΛ/03.** Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και σημείο  $P$  της διαγωνίου  $B\Delta$  ώστε  $\frac{P\Delta}{PB} = \frac{1}{4}$ .

Αν η  $ΓP$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $E$  να δείξετε ότι:  
 $E\Gamma = 5 \cdot PE$ .

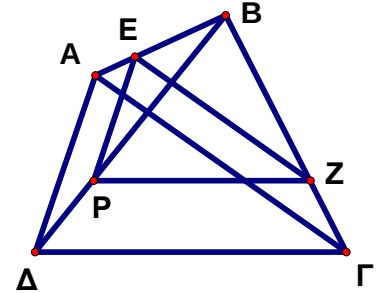


**ΒΛ/04.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ευθεία  $\Delta E$  παράλληλη στη  $B\Gamma$ . Αν η ευθεία  $\Delta Z$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $BE$  να αποδείξετε ότι:  $AE^2 = AZ \cdot A\Gamma$ .



**ΒΛ/05.** Έστω τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και τυχαίο σημείο  $P$  της διαγωνίου  $\Delta B$ . Φέρουμε την ευθεία  $PE$  παράλληλη στην  $A\Delta$  και τη  $PZ$  παράλληλη στη  $\Delta\Gamma$ . Δείξτε ότι η  $EZ$  είναι παράλληλη στην  $A\Gamma$ .

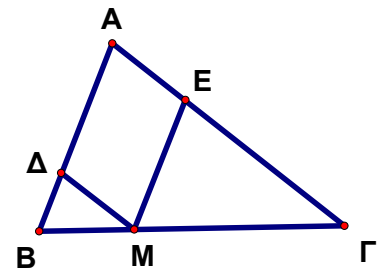
(Αρκεί  $\frac{BE}{EA} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$ )



**ΒΛ/06.** Από την κορυφή  $\Gamma$  παρ/μου  $AB\Gamma\Delta$  φέρνουμε ευθεία έξω από αυτό που τέμνει τις  $AB$ ,  $A\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Δείξτε ότι:  
 $\frac{AB}{AE} + \frac{A\Delta}{AZ} = 1$ .

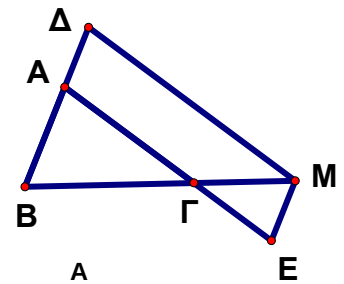
**ΒΛ/07.** Από ένα σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνουμε  $\Delta E \parallel B\Gamma$ ,  $EZ \parallel AB$ ,  $ZH \parallel \Gamma A$ . Δείξτε ότι:  $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$

**ΒΛ/08.** Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ . Φέρνω  $ME \parallel AB$  και  $M\Delta \parallel A\Gamma$ . Δείξτε ότι:  $\frac{\Delta B}{AB} + \frac{E\Gamma}{A\Gamma} = 1$ .

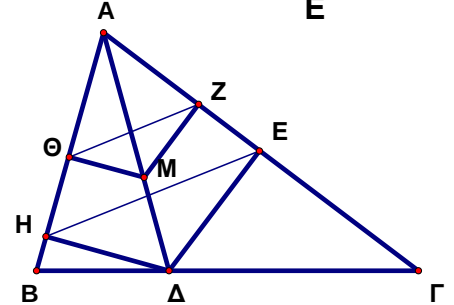


**ΒΛ/09.** Αν  $\Delta$  τυχαίο σημείο της διαμέσου  $AM$  τριγώνου  $AB\Gamma$  και φέρω τις ευθείες  $B\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  που τέμνουν τις  $A\Gamma$  και  $AB$  στα  $Z$  και  $E$ , να αποδειχθεί ότι:  $EZ \parallel B\Gamma$ . (Υπόδειξη: Παίρνω στην προέκταση της  $AM$  τμήμα  $ME = M\Delta$  οπότε το  $B\Delta\Gamma E$  είναι παρ/μο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται)

**ΒΛ/10.** Έστω σημείο Μ στην προέκταση της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, προς το Γ. Από το Μ φέρνω παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις προεκτάσεις τους στα Δ και Ε. Δείξτε ότι:  $\frac{ΜΔ}{ΑΓ} - \frac{ΜΕ}{ΑΒ} = 1$ .



**ΒΛ/11.** Έστω τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της ΑΔ. Φέρνω ΔΕ ⊥ ΑΓ, ΔΗ ⊥ ΑΒ, ΜΖ ⊥ ΑΓ, ΜΘ ⊥ ΑΒ. Δείξτε ότι ΘΖ // ΗΕ.



**ΒΛ/12.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΔΓ) και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από το Ο φέρνουμε δύο ευθείες παράλληλες προς τις ΑΔ, ΓΒ που τέμνουν την μεγάλη βάση ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι ΑΕ = ΖΒ.

**ΒΛ/13.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ και από τις κορυφές του Α και Γ φέρνω δυο παράλληλες ευθείες που τέμνουν τις ευθείες των μη παράλληλων πλευρών ΓΔ και ΑΒ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ΔΖ // ΒΕ.

(Υπόδειξη: Προεκτείνετε τις μη παράλληλες πλευρές μέχρι που να τμηθούν στο Ο)

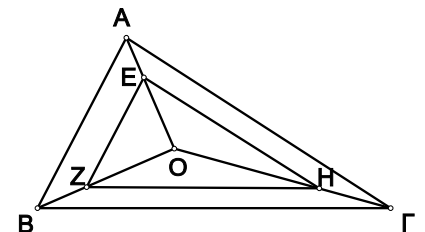
**ΒΛ/14.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν ΔΖ και ΕΗ είναι τα ύψη του τριγώνου ΑΔΕ να δείξετε ότι:

I)  $ΑΔ \cdot ΑΕ = ΑΒ \cdot ΑΗ = ΑΓ \cdot ΑΖ$  II)  $ΖΗ // ΒΓ$

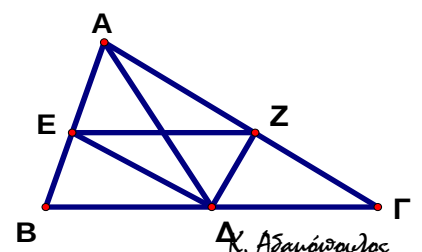
**ΒΛ/15.** Έστω σημείο Ρ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ. Φέρνω ΡΔ // ΑΒ και ΡΕ // ΑΓ. Αποδείξτε ότι: ΜΔ = ΜΕ.

**ΒΛ/16.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ ώστε ΒΔ = ΕΓ. Φέρνω ΔΖ // ΑΓ και ΕΗ // ΑΒ. Αποδείξτε ότι: ΖΗ // ΒΓ.

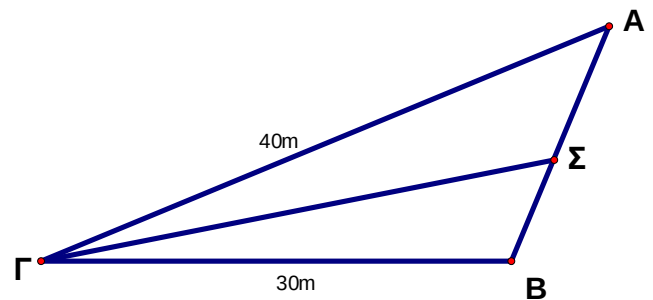
**ΒΛ/17.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο στο εσωτερικό του. Από σημείο Ε του ΑΟ φέρνω ΕΗ // ΑΓ και από το Η φέρνω ΗΖ // ΒΓ. Δείξτε ότι ΕΖ // ΑΒ.



**ΒΛ/18.** Αν ΑΔ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και φέρουμε τις διχοτόμους ΔΕ και ΔΖ των γωνιών  $\hat{A}B$  και  $\hat{A}G$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι: ΕΖ // ΒΓ.

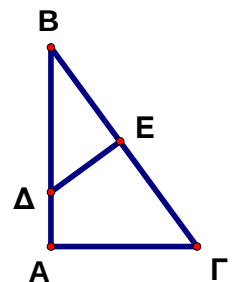


**ΒΛ/19.** Αν σε τοίχο  $AB = 21m$  θα τοποθετηθούν διαφημιστικές ταμπέλες  $ΑΣ$  και  $ΣΒ$ , βρείτε τη θέση του  $Σ$  ώστε οι δύο ταμπέλες να φαίνονται από το σταυροδρόμι  $Γ$  υπό την ίδια γωνία.

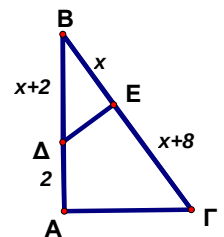


### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

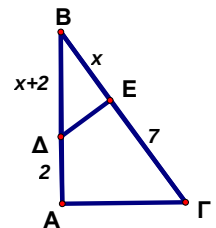
**ΒΛ/20.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $ABΓ$ ,  $Δ$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $AB$  και  $ΔΕ$  κάθετο τμήμα προς την υποτείνουσα  $ΒΓ$ .  
 Α) Δείξτε ότι:  $BE \cdot ΑΓ = ΔΕ \cdot AB$ .  
 Β) Αν  $AB = 9$ ,  $ΔB = 6$  και  $ΒΓ = 12$ , υπολογίστε το  $BE$ .



**ΒΛ/21.** Έστω τρίγωνο  $ABΓ$ ,  $Δ$  τυχαίο σημείο της  $AB$  και  $ΔΕ \perp ΒΓ$ . Αν  $ΑΔ = 2$ ,  $ΔB = x + 2$ ,  $BE = x$  και  $ΕΓ = x + 8$  υπολογίστε το  $x$ .

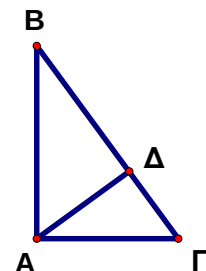


**ΒΛ/22.** Έστω τρίγωνο  $ABΓ$ ,  $Δ$  τυχαίο σημείο της  $AB$  και  $ΔΕ \perp ΒΓ$ . Αν  $ΑΔ = 2$ ,  $ΔB = x + 2$ ,  $BE = x$  και  $ΕΓ = x + 8$  υπολογίστε το  $x$ .



**ΒΛ/23.** Έστω τρίγωνο  $ABΓ$ , τα ύψη του  $ΑΔ$  και  $ΒΕ$  και το ορθόκεντρό του  $H$ . Να αποδείξετε ότι:  $HΔ \cdot ΗΑ = ΗΒ \cdot ΗΕ$ .

**ΒΛ/24.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $ABΓ$  και  $ΑΔ$  το ύψος του. Να αποδείξετε ότι:  
 Α) Δείξτε ότι:  $AB^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ .  
 Β) Δείξτε ότι:  $ΑΔ^2 = ΔB \cdot ΔΓ$ .

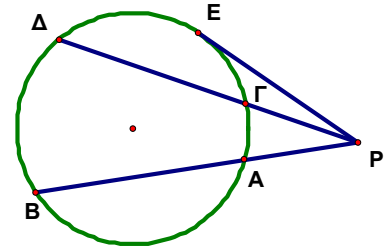




**ΒΛ/25.** Έστω P τυχαίο σημείο στο εξωτερικό του κύκλου, PA, PB τυχαίες τέμνουσες και PE η εφαπτομένη του κύκλου. Δείξτε ότι:

A)  $PA \cdot PB = PG \cdot PD$ .

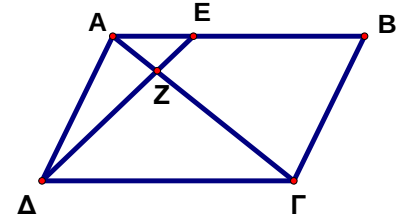
B)  $PE^2 = PA \cdot PB$



**ΒΛ/26.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και σημείο E στην πλευρά AB τέτοιο

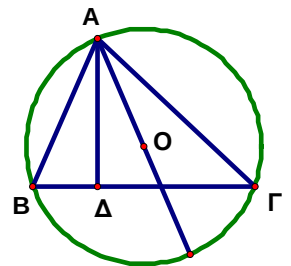
ώστε  $AE = \frac{1}{3}AB$ . Αν  $AG = 12$  να

υπολογίσετε το AZ.



**ΒΛ/27.** Έστω τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και  $AD = v_\alpha$  το ύψος του.

Αποδείξτε ότι  $\beta \cdot \gamma = 2R \cdot v_\alpha$ .



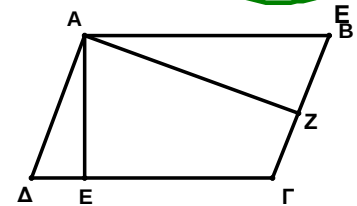
**ΒΛ/28.** Σε κάθε τρίγωνο ABΓ

δείξτε ότι:  $\alpha \cdot v_\alpha = \beta \cdot v_\beta = \gamma \cdot v_\gamma$ .

**ΒΛ/29.** Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ.

Φέρω  $AE \perp \Delta\Gamma$  και  $AZ \perp B\Gamma$ .

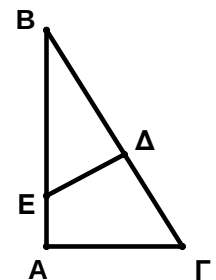
Να αποδείξετε ότι  $AB \cdot AE = AD \cdot AZ$ .



**ΒΛ/30.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ

( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Από τυχαίο σημείο E της AB φέρνω την EΔ κάθετη στην BΓ.

Να αποδείξετε ότι:  $BE \cdot AG = BG \cdot DE$ .



**ΒΛ/31.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$ .

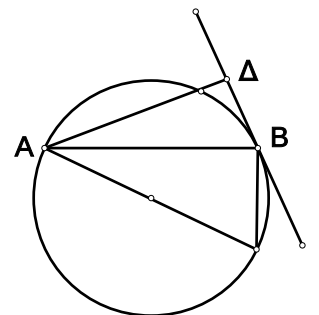
Αν AD είναι το ύψος του να δείξετε ότι  $AD^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$ .

**ΒΛ/32.** Αν AB χορδή και φέρω την

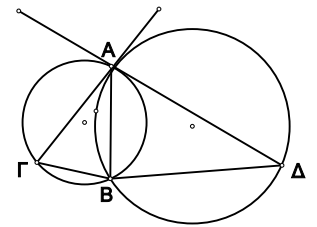
AD κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο

B, να αποδείξετε ότι  $AB^2 = 2R \cdot AD$

όπου R η ακτίνα του κύκλου.



**ΒΛ/33.** Αν στο σημείο τομής Α δύο τεμνόμενων κύκλων φέρω τις εφαπτόμενες των κύκλων που τους τέμνουν στα Γ και Δ να δείξετε ότι:  $AB^2 = BG \cdot BD$



**ΒΛ/34.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία ΒΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Δ τέτοια ώστε  $\hat{GBD} = \hat{A}$ . Να δείξετε ότι:  $BG^2 = \Delta\Gamma \cdot A\Gamma$ .

**ΒΛ/35.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και την  $\Delta E \perp AB$ . Δείξτε ότι:  $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$ .

**ΒΛ/36.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Δείξτε ότι  $EZ \parallel \frac{B\Delta}{3}$ .

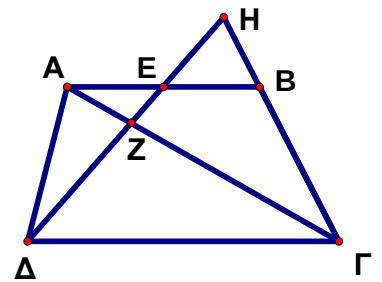
**ΒΛ/37.** Σε κάθε τραπέζιο να δείξετε ότι το σημείο τομής των διαγωνίων του διχοτομεί το τμήμα που φέρεται παράλληλα στις βάσεις από το σημείο αυτό και έχει τα άκρα του στις μη παράλληλες πλευρές.

**ΒΛ/38.** Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και ευθεία ε παράλληλη προς τις βάσεις του που τέμνει τις ΑΔ, ΑΓ, ΒΔ, ΒΓ στα Ε, Ζ, Η, Θ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι  $EZ = H\Theta$ .

**ΒΛ/39.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στη διαγώνιο ΔΒ σημείο Ε έτσι που  $3\Delta E = 2EB$ . Αν η ΑΕ τέμνει τη ΔΓ στο Ζ, υπολογίστε το ΔΖ αν  $AB = 6$ .

**ΒΛ/40.** Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ και Ε το μέσο της βάσης του ΑΒ. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΓΒ στο σημείο Η και την διαγώνιο ΑΓ στο Ζ.

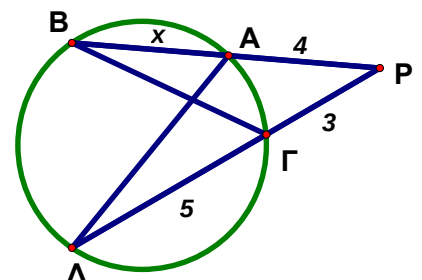
Να αποδείξετε ότι:  $\frac{ZE}{Z\Delta} = \frac{HE}{H\Delta}$ .



**ΒΛ/41.** Αν ΡΑΒ και ΡΓΔ τυχαίες τέμνουσες του κύκλου με  $PA = 4$ ,  $PG = 3$  και  $\Gamma\Delta = 5$ :

Α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΡΑΔ και ΡΒΓ είναι όμοια.

Β) Υπολογίστε το τμήμα ΑΒ.





**ΒΛ/42.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στις προεκτάσεις των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  παίρνουμε τα ίσα τμήματα  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  και ονομάζουμε  $P$  την τομή της  $\Delta E$  με τον φορέα της πλευράς  $B\Gamma$ . Αποδείξτε ότι:  $\frac{PE}{P\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma}$ .

**ΒΛ/43.** Σε τυχαίο σημείο  $\Delta$  της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνω κάθετη στη  $B\Gamma$  που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$ . Δείξτε ότι:  $B\Gamma \cdot AZ = EZ \cdot BA$  και  $BE \cdot EA = EZ \cdot \Delta E$ .

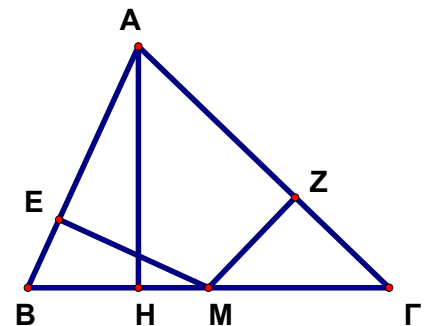
**ΒΛ/44.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Αν η παράλληλη από το  $B$  προς την  $A\Gamma$  τέμνει την ευθεία  $A\Delta$  στο  $M$ , να αποδειχθεί ότι:  $\Delta M \cdot A\Gamma = AB \cdot A\Delta$ .

**ΒΛ/45.** Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνουμε τα κάθετα τμήματα  $ME$  προς την  $AB$  και  $MZ$  προς την  $A\Gamma$  καθώς και το ύψος  $AH$ .

A) Δείξτε ότι  $ME \cdot AB = MB \cdot AH$ .

B) Δείξτε ότι  $MZ \cdot A\Gamma = MG \cdot AH$ .

Γ) Δείξτε ότι  $ME \cdot AB = MZ \cdot A\Gamma$ .



**ΒΛ/46.** Μια μεταλική πλάκα έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το  $1/15$  της. Θα παραμείνει ορθογώνιο το σχήμα της πλάκας;

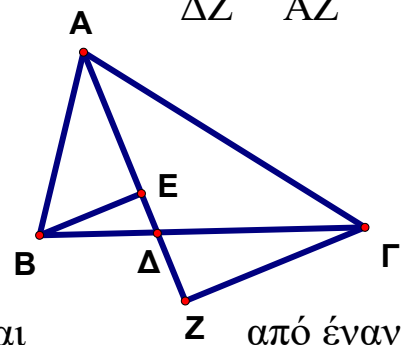
**ΒΛ/47.** Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB \neq A\Gamma$ ) φέρνουμε τις  $BE$  και  $\Gamma Z$  κάθετες προς την διχοτόμο  $A\Delta$ . Να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $Z$  και  $E$  είναι αρμονικά συζυγή ως προς τα  $A$  και  $\Delta$  δηλ.:  $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{AE}{AZ}$ .

**ΒΛ/48.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος  $A\Delta$ . Αν φέρω τις  $BE$  και  $\Gamma Z$  κάθετες στην ευθεία  $A\Delta$  να αποδείξετε ότι:

A)  $BE \cdot \Delta\Gamma = \Gamma Z \cdot \Delta B$

B)  $AB \cdot Z\Gamma = A\Gamma \cdot EB$

Γ)  $AB \cdot \Delta\Gamma = A\Gamma \cdot \Delta B$ .



**ΒΛ/49.** Ένας άνθρωπος ύψους 2m απομακρύνεται φανοστάτη ύψους 8m. Όταν βρίσκεται σε απόσταση 12m από το φανοστάτη πόσο μήκος έχει η σκιά του;

**ΒΛ/50.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 2B\Gamma$  και παίρνουμε σημείο  $Z$  στην  $AB$  έτσι που  $BZ = \frac{1}{2}B\Gamma$ . Ναδειχθεί ότι:  $B\hat{\Gamma}Z = B\hat{A}\Gamma$ .

**ΒΛ/51.** Έστω δυο ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) τέτοια που να ισχύει:  $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ . Δείξτε ότι τα δυο τρίγωνα είναι όμοια.

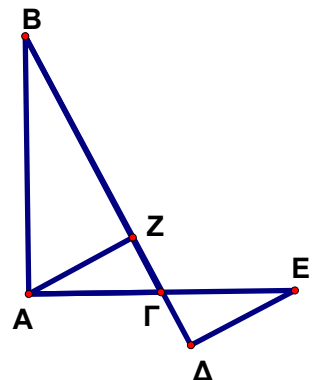
**ΒΛ/52.** Δείξτε ότι αν για δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  ισχύει η σχέση:  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha'}}$  τότε τα τρίγωνα είναι όμοια.

**ΒΛ/53.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και  $A\Gamma \perp B\Delta$ . Δείξτε ότι  $A\Delta^2 = AB \cdot \Delta\Gamma$ .

**ΒΛ/54.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  στις πλευρές του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα έτσι που  $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$  και  $AE = \frac{AB}{2}$ . Δείξτε ότι  $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$  και  $\Delta E = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ .

**ΒΛ/55.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  της  $B\Gamma$ . Από τα  $B$  και  $\Gamma$  φέρνουμε παράλληλες στην  $A\Delta$  που τέμνουν τις  $GA$ ,  $BA$  στα  $E$  και  $Z$ . Δείξτε ότι:  $\frac{1}{A\Delta} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{\Gamma Z}$ .

**ΒΛ/56.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $AZ$  το ύψος του. Αν προεκτείνουμε την  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = \Gamma Z$  και φέρουμε το  $\Delta E$  κάθετο στη  $B\Delta$  να αποδείξετε ότι:  
 Α)  $\Delta E = AZ$   
 Β) Τα τρίγωνα  $AZB$  και  $\Gamma\Delta E$  είναι όμοια.  
 Γ) Αν  $AZ = 6$  και  $\Delta\Gamma = 4$  υπολογίστε το  $BZ$ .



# Μετρικές σχέσεις

"μηδείς αγεωμέτητος εισίτω μου την στέγη, τουτέστιν άδικος μηδείς παρεισερχέσθω τήδε. Ισότης γαρ και δίκαιον εστί γεωμετρία." Πλάτωνας

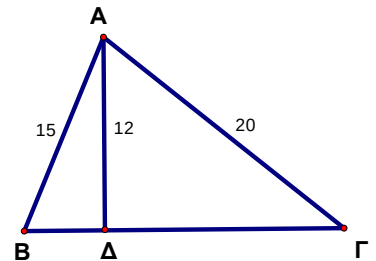
## ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

**ΒΠ/01.** Αν οι διαγώνιες κυρτού τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο απέναντι πλευρών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

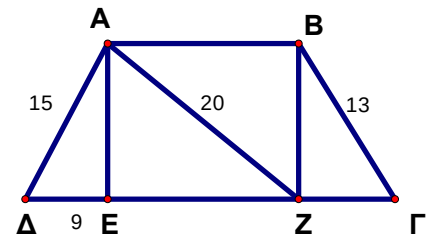
**ΒΠ/02.** Αν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ και ΒΓ ενός τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεών του.

**ΒΠ/03.** Υπολογίστε τις πλευρές πλευρές ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), αν γνωρίζουμε ότι έχουν μήκη  $\alpha = 2x + 3$ ,  $\beta = 2x + 2$ ,  $\gamma = x$ .

**ΒΠ/04.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) του οποίου η περίμετρος είναι 40 και η υποτείνουσα ΒΓ=17. Να υπολογίσετε τα μήκη των κάθετων πλευρών του.



**ΒΠ/05.** Στο διπλανό τρίγωνο το ΑΔ είναι ύψος. Αν ΑΒ=15, ΑΔ=12 και ΑΓ=20 να υπολογίσετε τη ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου.



**ΒΠ/06.** Στο διπλανό τραπέζιο τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη. Αν ΑΔ=15, ΔΕ=9, ΑΖ=20 και ΒΓ=13, υπολογίστε τα ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ και το εμβαδόν του τραπεζίου.

**ΒΠ/07.** Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ η προβολή Δ της κορυφής Α πάνω στη ΒΓ βρίσκεται μεταξύ των Β και Γ. Αν  $AD^2 = DB \cdot DG$  δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

**ΒΠ/08.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB < AG$  και το ύψος του ΑΔ. Αν Μ τυχαίο σημείο του ΑΔ δείξτε ότι:  $MG^2 - MB^2 = AG^2 - AB^2$ .

**ΒΠ/09.**(Θ. Carnot) Αν Μ τυχαίο σημείο στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ και φέρω  $ME \perp BG$ ,  $MD \perp AG$ ,  $MZ \perp AB$ , δείξτε ότι  $AD^2 + GE^2 + BZ^2 = DG^2 + BE^2 + AZ^2$ .

**ΒΠ/10.** Αν Ε σημείο της διαγωνίου ΔΒ τετραγώνου ΑΒΓΔ δείξτε ότι:  $AB^2 - AE^2 = EB \cdot ED$  και  $BE^2 + ED^2 = 2AE^2$ .

**ΒΠ/11.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AD \parallel BG$ ) με  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ . Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του δείξτε ότι:  $GD^2 - AB^2 = 4MN^2$ .

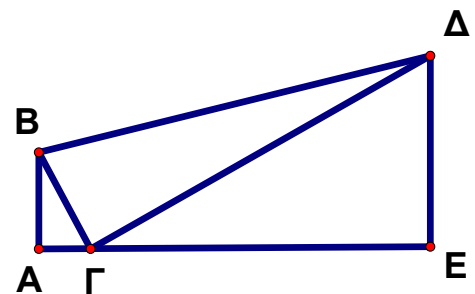
**ΒΠ/12.** Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαμέσων ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με τα  $3/2$  του τετραγώνου της υποτεινούσας.

**ΒΠ/13.** Α) Στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ, AB = 4, BG = 5, AE = 15$$

$$DE = 9 \text{ και } BD = 5\sqrt{10}.$$

Αφού υπολογίσετε τα τμήματα ΑΓ και ΓΔ αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



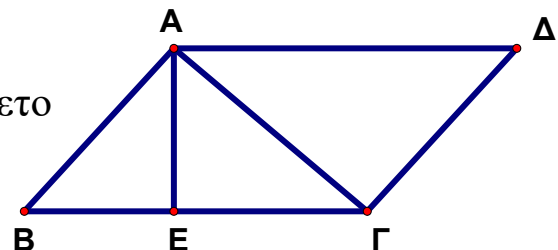
Β) Όμοια αν είναι:  $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ ,  $AB = 6$ ,  $AG = 3$ ,  $GE = 4$ ,  $DE = 8$  και  $BD = \sqrt{125}$ . υπολογίστε τα τμήματα ΒΓ, ΓΔ και αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

**ΒΠ/14.** Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

$$\text{Αν } AB = 2, AE = \sqrt{3} \text{ και } AD = 4:$$

Α) Υπολογίστε τα ΒΕ, ΑΓ.

Β) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.



**ΒΠ/15.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι  $AD^2 = EA \cdot EB + ZA \cdot ZG$ .

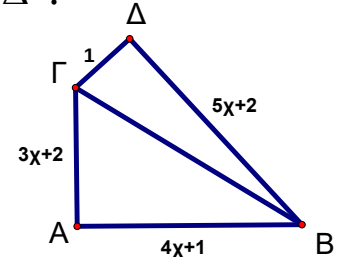
**ΒΠ/16.** Αν Δ τυχαίο σημείο της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι:  $AB^2 - AD^2 = DB \cdot DG$ .

**ΒΠ/17.** Έστω σημείο Μ στην προέκταση της διαγωνίου ΓΑ (προς το Α) ρόμβου ΑΒΓΔ. Δείξτε ότι:  $MD^2 - DA^2 = MA \cdot MG$ .

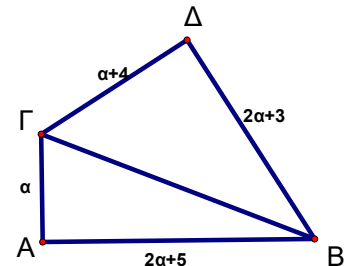
**ΒΠ/18.** Δίνεται γωνία  $\hat{xOy} = 45^\circ$  και σημείο Μ εσωτερικό της. Από το Μ φέρνουμε κάθετη στην Οχ που την τέμνει στο Α και την Ογ στο Β. Δείξτε ότι  $OM^2 = AM^2 + AB^2$ .

**ΒΠ/19.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ και το ύψος του ΒΔ. Δείξτε ότι  $AB^2 + BG^2 + AG^2 = 3BD^2 + 2AD^2 + GD^2$ .

**ΒΠ/20.** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο δείξτε ότι και το τρίγωνο ΒΓΔ είναι επίσης ορθογώνιο.



**ΒΠ/21.** Αν το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο δείξτε ότι και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι επίσης ορθογώνιο.



**ΒΠ/22.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και το ύψος του ΑΔ. Αν  $AG = 6$  και  $AB = 8$ .

Α) Βρείτε τη ΒΓ.

Β) Βρείτε το ΒΔ.

Γ) Βρείτε το ΑΔ.

**ΒΠ/23.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και το ύψος του ΑΔ. Αν  $AD = 6$  και  $BG = 13$ , υπολογίστε τα  $DB$ ,  $GD$ ,  $AB$  και  $AG$ .

**ΒΠ/24.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και το ύψος του ΑΔ. Αν  $AB = 20$  και  $BG = 25$ , υπολογίστε τα  $AG$ ,  $BD$ ,  $GD$ ,  $AD$ .

**ΒΠ/25.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και το ύψος του ΑΔ. Αν  $DB = 6,4$  και  $GD = 3,6$  βρείτε τις πλευρές  $AB$ ,  $AG$ .

**ΒΠ/26.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και το ύψος του ΑΔ. Αν  $\frac{DB}{GD} = \frac{9}{4}$  και  $BG = 26$  υπολογίστε τα  $AD$ ,  $AG$ ,  $AB$ .

**ΒΠ/27.** Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς  $a$ , ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΔ. Υπολογίστε τα  $AD$  και  $BM$ .

**ΒΠ/28.** Έστω ΑΒ διάμετρος κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα  $R$ . Αν ΟΓ, ΟΔ είναι ακτίνες κάθετες μεταξύ τους και Ε, Ζ οι προβολές των Γ και Δ στην ΑΒ, δείξτε ότι  $OE^2 + OZ^2 = R^2$ .

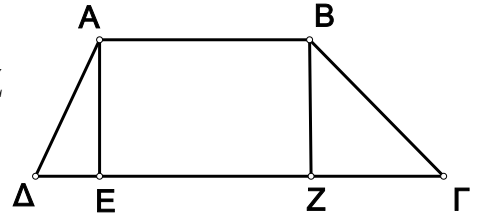
**ΒΠ/29.** Σε ένα τετράγωνο πλευράς 9 παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα, έτσι που  $BE = 3$  και  $ΓΖ = 2$ .

Να αποδείξετε ότι  $AE \perp EZ$ .

**ΒΠ/30.** Έστω  $\Delta A$  η διάμετρος ενός κύκλου και  $B\Gamma$  μια χορδή του παράλληλη στη  $\Delta A$ . Δείξτε ότι  $AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$ .

**ΒΠ/31.** Αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\lambda$  και ισχύει  $\alpha\alpha' = \beta\beta' + \gamma\gamma'$ , δείξτε ότι τα τρίγωνα είναι ορθογώνια.

**ΒΠ/32.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  και  $AE, BZ$  τα ύψη του. Αν  $AB = 10$ ,  $B\Gamma = 15$ ,  $\Delta E = 5$ ,  $\Delta\Delta = 13$ , να υπολογίσετε τα  $AE, ZE, \Delta\Gamma$ .



**ΒΠ/33.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $\frac{\alpha + \gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} = \frac{2\alpha}{\beta}$  να αποδείξετε

ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

**ΒΠ/34.** Αν  $AB\Gamma\Delta$  ορθογώνιο,  $E$  το μέσο της  $B\Gamma$  και  $Z$  το μέσο της  $\Delta\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:  $AE^2 + AZ^2 = \frac{5}{4}A\Gamma^2$

**ΒΠ/35.** Αν τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ορθογώνια και όμοια μεταξύ τους, δείξτε ότι:  $\alpha\alpha' = \beta\beta' + \gamma\gamma'$  (όπου  $\alpha, \alpha'$  οι υποτείνουσες).

**ΒΠ/36.** Έστω ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta = \alpha$  και  $AB = \alpha\sqrt{2}$ . Από τις κορυφές  $\Delta$  και  $B$  φέρνουμε κάθετες στην  $A\Gamma$  που την τέμνουν στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

A) Υπολογίστε την  $A\Gamma$

B) Υπολογίστε το  $AE$

Γ) Αποδείξτε ότι  $AE = EZ = Z\Gamma$ .

**ΒΠ/37.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$  με  $B\Gamma = \alpha$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Αν  $B\Delta = \frac{\alpha}{3}$  υπολογίστε τα:  $AB, A\Gamma, A\Delta$ .

**ΒΠ/38.** Έστω ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και στις πλευρές του  $AB, B\Gamma$  τα σημεία  $E$  και  $Z$  ώστε:  $AE = 3$ ,  $EB = 4$ ,  $BZ = 2$  και  $Z\Gamma = 4$ .

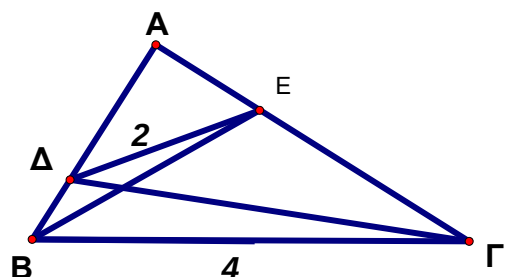
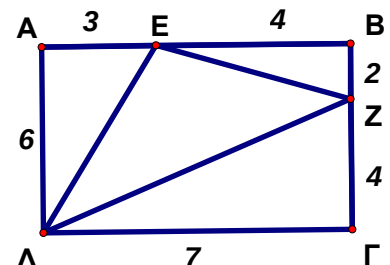
A) Υπολογίστε τα  $\Delta Z, EZ, \Delta E$ .

B) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ορθογώνιο.

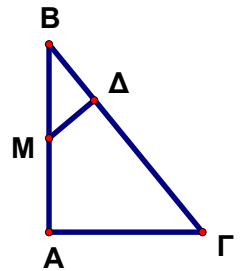
**ΒΠ/39.** Αν  $AB \perp A\Gamma$ ,  $\Delta E = 2$  και

$B\Gamma = 4$ , να υπολογίσετε το

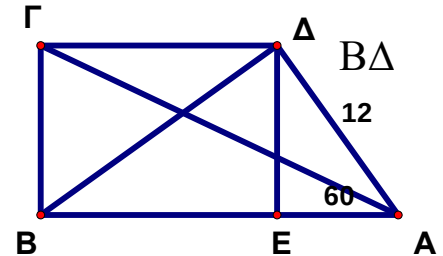
$BE^2 + \Delta\Gamma^2$ .



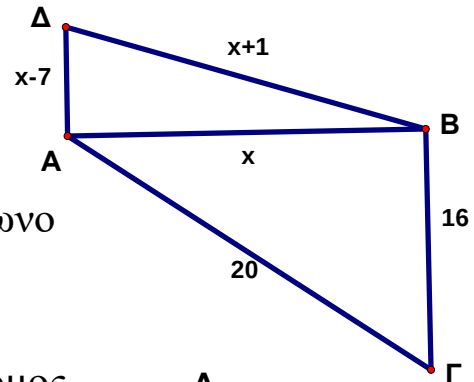
**ΒΠ/40.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$   $\hat{A} = 90^\circ$   
 Μ μέσο της  $AB$  και  $M\Delta \perp B\Gamma$ . Αν  $B\Gamma = 10$  και  $A\Gamma = 6$   
 υπολογίστε τα  $AB$ ,  $MB$ ,  $M\Delta$ ,  $B\Delta$ .



**ΒΠ/41.** Στο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  η διαγώνιος  
 είναι κάθετη στην  
 πλευρά  $A\Delta$  και η πλευρά  $\Gamma B$  κάθετη  
 στην  $AB$ . Αν  $\Delta AB = 60^\circ$  και  $A\Delta = 12$ ,  
 να υπολογιστούν: Α) Η πλευρά  $B\Gamma$   
 Β) Η διαγώνιος  $B\Delta$ . Γ) Η πλευρά  $AB$ , Δ) Η διαγώνιος  $A\Gamma$ .



**ΒΠ/42.** Αν το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  
 ορθογώνιο:  
 Α) Βρείτε το  $x$   
 Β) Δείξτε ότι είναι ορθογώνιο και το τρίγωνο  
 $AB\Gamma$ .

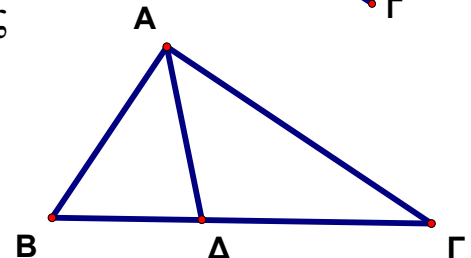


**ΒΠ/43.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta$  η διχοτόμος  
 της γωνίας  $A$  και ισχύει:  $4 \cdot B\Delta = 3 \cdot A\Gamma$ .

Α) Να αποδείξετε ότι  $AB = \frac{3}{4} A\Gamma$

Β) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $B\Gamma = \frac{5}{4} A\Gamma$ , να

εξετάσετε αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.



### ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

**ΒΠ/44.** Αν  $\Delta$  σημείο της βάσης  $B\Gamma$  ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  και  
 είναι  $B\Delta = 3$ ,  $A\Gamma = 7$  και  $AB = A\Gamma = 11$ , να υπολογίσετε το  $A\Delta$ .

**ΒΠ/45.** Για τις βάσεις  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ενός τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  ισχύει:  $\Gamma\Delta = 2AB$ .  
 Δείξτε ότι  $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2$ .

**ΒΠ/46.** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ , τι  
 είδους τρίγωνο είναι το  $K\Lambda M$  με πλευρές  $\kappa, \lambda, \mu$  αν:

Α)  $\kappa = \rho\alpha, \lambda = \rho\beta, \mu = \rho\gamma$  Β)  $\kappa = 5\alpha, \lambda = 5\beta, \mu = 4\gamma$

Γ)  $\kappa = 5\alpha, \lambda = 5\beta, \mu = 6\gamma$  Δ)  $\kappa = \alpha, \lambda = \frac{\beta}{2}, \mu = \frac{2\gamma}{3}$



**ΒΠ/47.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=3$ ,  $B\Gamma=5$  και  $\Gamma A=7$ .

Υπολογίστε τη γωνία  $\hat{B}$ .

**ΒΠ/48.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=6$ ,

$A\Gamma=2\sqrt{13}$  και  $\hat{B}=60^\circ$ .

Υπολογίστε το  $B\Delta$  και την  $B\Gamma$ .

Τι είδους τρίγωνο είναι το  $AB\Gamma$ ;

**ΒΠ/49.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A}=90^\circ$ ) με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Βρείτε το είδος του τριγώνου που έχει πλευρές :

1)  $\kappa\alpha$ ,  $\kappa\beta$ ,  $\kappa\gamma$  και 2)  $4\alpha$ ,  $4\beta$ ,  $3\gamma$ .

**ΒΠ/50.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $B\Gamma=8$ ,  $A\Gamma=4\sqrt{7}$  και  $AB=4$ .

A) Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις γωνίες του.

B) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι η προβολή  $A\Delta$  της πλευράς  $AB$  πάνω στην  $A\Gamma$  είναι  $A\Delta = \frac{8\sqrt{7}}{7}$ .

**ΒΠ/51.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=4$ ,  $A\Gamma=5$  και  $\hat{A}=102^\circ$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν  $\sin 102^\circ \approx -\frac{1}{5}$  τότε:

A) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma=7$ .

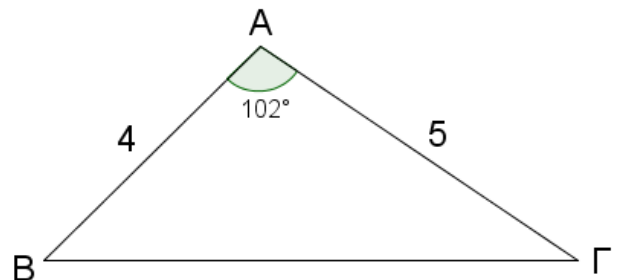
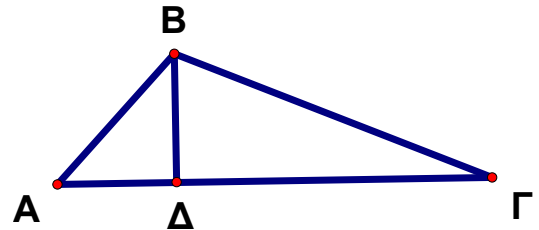
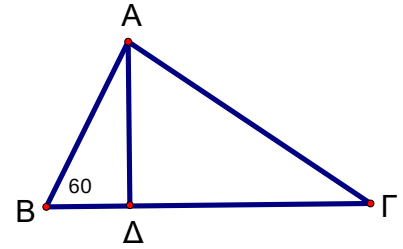
B) Να υπολογίσετε την ημιπερίμετρο  $\tau$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ισούται με  $4\sqrt{6}$ .

Δ) Να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**ΒΠ/52.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Να δείξετε ότι:  $AB^2 - A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$ .

**ΒΠ/53.** Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και χορδή  $EZ \parallel AB$ . Αν  $P$  τυχαίο σημείο της  $AB$  ναδειχθεί ότι:  $PE^2 + PZ^2 = AP^2 + BP^2$ .



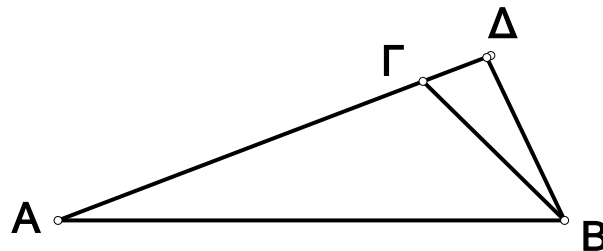


**ΒΠ/54.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A\Gamma = 2 \cdot B\Gamma$ ,  $AB = B\Gamma\sqrt{7}$  και φέρω  $B\Delta \perp A\Gamma$ .

Α) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο.

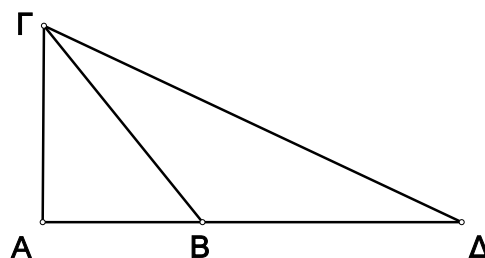
Β) Υπολογίστε το  $\Delta\Gamma$

Γ) Δείξτε ότι  $\hat{\Gamma} = 120^\circ$ .



**ΒΠ/55.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και φέρω ευθεία παράλληλη στη βάση  $B\Gamma$  που τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:  $BE^2 = E\Gamma^2 + B\Gamma \cdot \Delta E$ .

**ΒΠ/56.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  κατά τμήμα  $B\Delta = B\Gamma$ . Αποδείξτε ότι:  $\Gamma\Delta^2 = 2 \cdot B\Gamma \cdot A\Delta$ .



**ΒΠ/57.** Αν  $AB\Gamma\Delta$  τραπέζιο με βάσεις

$AB, \Delta\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:  $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2 \cdot AB \cdot \Gamma\Delta$ .

**ΒΠ/58.** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB < A\Delta$  και  $\Delta\Gamma < B\Gamma$  στο οποίο φέρνουμε τις  $AK \perp B\Delta$  και  $\Gamma\Lambda \perp B\Delta$ . Να δειχθεί ότι:  $A\Delta^2 + B\Gamma^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2 + 2B\Delta \cdot K\Lambda$ .

**ΒΠ/59.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $B\Gamma = 13$  και  $\Gamma A = 7$ .

Βρείτε το είδος των γωνιών του τριγώνου και υπολογίστε τη μεγαλύτερη γωνία του.

**ΒΠ/60.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με μήκη πλευρών  $\alpha = 7, \beta = 5, \gamma = 4\sqrt{2}$  να υπολογίσετε το μήκος του ύψους του  $A\Delta$ .

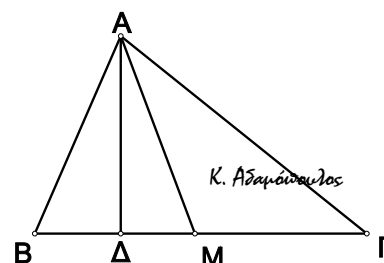
**ΒΠ/61.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}$ , να υπολογιστεί η γωνία  $\hat{\Gamma}$ .

**ΒΠ/62.** Αν  $BB', \Gamma\Gamma'$  είναι ύψη οξυγωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  δείξτε ότι:  $\alpha^2 = \beta \cdot \Gamma B' + \gamma \cdot B\Gamma'$ .

**ΒΠ/63.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 2, B\Gamma = 1 + \sqrt{3}, A\Gamma = \sqrt{6}$ . Δείξτε ότι:  $\hat{B} = 60^\circ$ .

**ΒΠ/64.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Gamma E$  το ύψος του. Να δείξετε ότι:  $AB^2 + AE^2 - EB^2 = 2 \cdot AB \cdot AE$ .

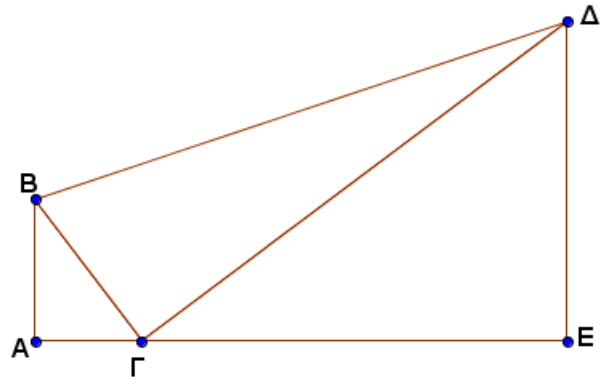
**ΒΠ/65.** Αν στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψος  $A\Delta$  και διάμεσο  $AM$  είναι:



$$ΑΓ = \sqrt{97}, AB = 5, ΒΓ = 12.$$

Α) Βρείτε το είδος του τριγώνου.

Β) Υπολογίστε τα τμήματα : ΒΔ , ΜΔ , ΑΔ.



**ΒΠ/66.** Στο διπλανό σχήμα

έχουμε:  $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $ΒΓ = 5$ ,  $AE = 15$  και  $ΔE = 9$ .

Α) Να βρείτε τη πλευρά ΑΓ

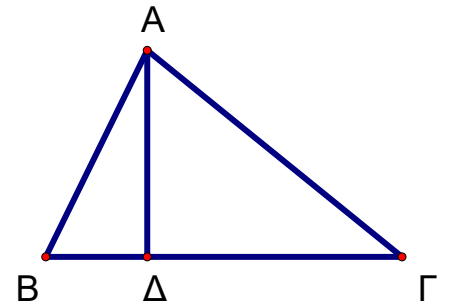
Β) Να βρείτε τη πλευρά ΓΔ

Γ) Αν η πλευρά ΒΔ ισούται με  $5\sqrt{11}$ , να βρείτε το είδος του τριγώνου ΒΓΔ.

**ΒΠ/67.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $AB=13$ ,  $ΑΓ=15$  και  $ΒΓ=14$ .

Α) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;

Β) Υπολογίστε τα ΒΔ και το ύψος ΑΔ.



**ΒΠ/68.** Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$ΒΓ = x^2 + x + 1, ΑΓ = 2x + 1 \text{ και } AB = x^2 - 1.$$

Α) Δείξτε ότι  $x > 1$ .

Β) Βρείτε τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

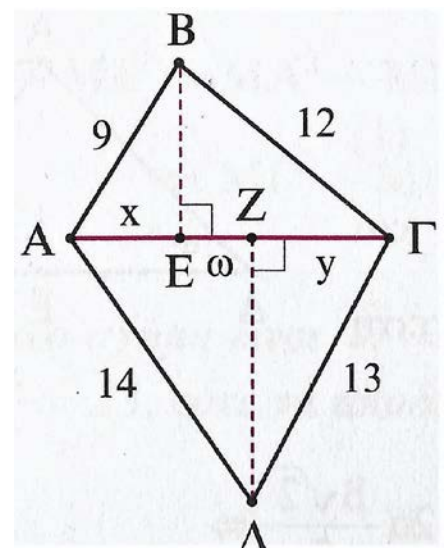
Γ) Βρείτε τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

**ΒΠ/69.** Στο διπλανό σχήμα είναι  $ΑΓ = 15$ .

Α) Τι είδους τρίγωνα (ως προς τις γωνίες τους) είναι τα ΑΒΓ και ΑΔΓ;

Β) Βρείτε τα  $AE = x$ ,  $ZΓ = y$  και  $EZ = \omega$ .

Γ) Υπολογίστε τη γωνία  $\hat{\Delta}$  του τριγώνου ΑΔΓ αν είναι γνωστό ότι  $\sin 68^\circ \approx 0,38$ .



# Εμβαδά

"Η γεωμετρία, η επιστήμη του χώρου, οι διαστάσεις και οι σχέσεις των αντικειμένων μεταξύ τους πάντα καθόριζαν τους κανόνες της ζωγραφικής."

Πρέπει να ειπωθεί ότι η γεωμετρία για τις πλαστικές τέχνες είναι ότι η γραμματική για την τέχνη του συγγραφέα"

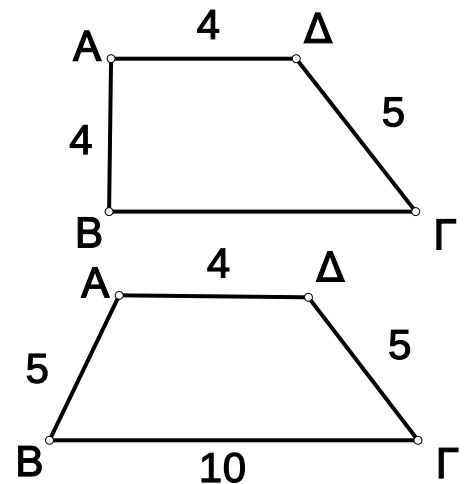
Γκιγιόμ Απολλιναίρ "Η σύγχρονη ζωγραφική" 1972

**BP/01.** Αν  $M$  σημείο της πλευράς  $AB$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , να δείξετε ότι  $(M\Gamma\Delta) = (MA\Delta) + (MB\Gamma)$ .

**BP/02.** Έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της διαμέσου  $BM$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $(\Delta BA) = (\Delta B\Gamma)$ .

**BP/03.** Έστω  $E$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $AB$  ενός παρ-μου  $AB\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι  $(E\Delta\Gamma) + (EBA) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ .

**BP/04.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $A\Delta = 4$  και  $\Delta\Gamma = 5$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου.



**BP/05.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 5$ ,  $A\Delta = 4$  και  $\Delta\Gamma = 5$  και  $B\Gamma = 10$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου.

**BP/06.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι διάμεσοι του  $B\Delta, \Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $\Theta$ . Να αποδείξετε ότι :

A)  $(AB\Delta) = (A\Gamma E)$       B)  $(\Theta B\Gamma) = (A\Theta\Delta)$       Γ)  $(\Theta EB) = (\Theta \Delta\Gamma)$

**BP/07.** Υπολογίστε τις πλευρές ενός παρ-μου με περίμετρο 24 και το ένα ύψος διπλάσιο από το άλλο.

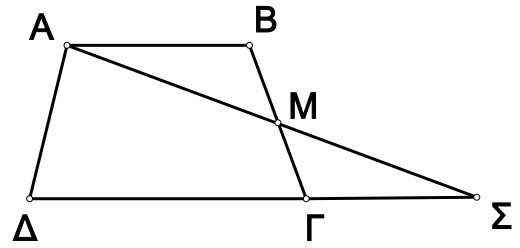
**BP/08.** Αν  $\Sigma$  είναι σημείο της διαγωνίου  $A\Gamma$  παρ-μου  $AB\Gamma\Delta$  να δειχθεί ότι  $(\Sigma B\Gamma) = (\Sigma\Gamma\Delta)$ .

**BP/09.** Από τις κορυφές ενός τετραπλεύρου φέρνουμε παράλληλες προς τις διαγωνίες του. Δείξτε ότι το παρ/γραμμο που σχηματίζεται έχει εμβαδόν διπλάσιο από αυτό του τετραπλεύρου.

**BP/10.** Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $K$  το μέσο της διαγωνίου  $\Delta B$ . Φέρνουμε μια τυχαία ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $K$  και τέμνει τις  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι  $(\text{ΑΕΚΔ}) = (\text{ΚΒΓΖ})$ .

**BP/11.** Αν  $\text{ΑΒΓΔ}$  τραπέζιο και  $\text{Μ}$  μέσο της  $\text{ΒΓ}$ . Αν η  $\text{ΑΜ}$  τέμνει τη  $\text{ΔΓ}$  στο  $\text{Σ}$  να αποδείξετε ότι:  
 $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΔΑΣ})$ .



**BP/12.** Δίνεται τετράγωνο  $\text{ΑΒΓΔ}$  πλευράς 4 και σημείο  $\text{Σ}$  της πλευράς  $\text{ΑΒ}$ , ώστε  $\text{ΑΣ} = 1$ . Να υπολογίσετε το  $\text{ΣΓ}$  το  $(\text{ΣΔΓ})$  και την απόσταση του  $\text{Δ}$  από την  $\text{ΣΓ}$ .

**BP/13.** Σε τρίγωνο  $\text{ΑΒΓ}$  είναι  $\text{ΑΒ} = 2$  και η διάμεσος  $\text{ΒΔ} = 1$ . Αν είναι  $\hat{\text{ΒΔΑ}} = 30^\circ$  να υπολογιστεί το εμβαδόν του  $\text{ΑΒΓ}$ .

**BP/14.** Έστω τρίγωνο  $\text{ΑΒΓ}$  με  $\hat{\text{Β}} = 60^\circ$ . Δείξτε ότι  $(\text{ΑΒΓ}) = \alpha\gamma \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**BP/15.** Έστω  $\text{ΑΒΓΔ}$  ισοσκελές τραπέζιο,  $\text{ΑΒ} < \text{ΓΔ}$  βάσεις, και  $\text{ΑΕ}$  το ύψος του. Δείξτε ότι  $(\text{ΑΒΓΔ}) = 2(\text{ΑΓΕ})$ .

**BP/16.** Η διάμεσος ενός τραπεζίου είναι 10 και χωρίζει το τραπέζιο σε δύο μέρη με λόγο εμβαδών 3:5. Υπολογίστε τις βάσεις του τραπεζίου.

**BP/17.** Α) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές το μέσο μιας από τις μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου και τα άκρα της άλλης, είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τραπεζίου.

Β) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του μήκους μιας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτήν.

**BP/18.** Οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου  $\text{ΑΒΓΔ}$  σχηματίζουν γωνία  $30^\circ$ . Δείξτε ότι  $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{4} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΔ}$ .

**BP/19.** Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 48 και άθροισμα διαγωνίων 26. Υπολογίστε το εμβαδόν του.

**BP/20.** Οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι 16 και 12. Υπολογίστε το εμβαδόν του και την απόσταση των απέναντι πλευρών του.

**BP/21.** Αν το άθροισμα των διαγωνίων ρόμβου είναι 14cm και η περίμετρός του 20cm, να βρεθούν το εμβαδόν του και το ύψος του από την κορυφή  $\text{Α}$ .

**BP/22.** Αν η γωνία ενός ρόμβου είναι  $60^\circ$ , δείξτε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας διαγωνίου επί την πλευρά του.

**BP/23.** Αν  $AD$  το ύψος τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι  $BD = 6$ ,  $D\Gamma = 15$  και  $(AB\Gamma) = 84$ , υπολογίστε τα  $AD$ ,  $AB$ ,  $A\Gamma$  και προσδιορίστε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς τις γωνίες του.

**BP/24.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ),  $M$  το μέσο της  $AB$  και  $N$  σημείο της  $A\Gamma$  ώστε  $GA = 3GN$ . Δείξτε ότι  $(MNB) = \frac{(AB\Gamma)}{3}$ .

**BP/25.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από τυχαίο σημείο  $M$  της βάσης  $B\Gamma$  φέρνω  $MK \perp AB$  και  $ML \perp A\Gamma$ . Δείξτε ότι το άθροισμα  $MK + ML$  είναι σταθερό (ανεξάρτητο της θέσης του  $M$ ).

**BP/26.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από τυχαίο σημείο  $M$  στο εσωτερικό του τριγώνου φέρνω  $MK \perp AB$ ,  $ML \perp A\Gamma$ ,  $MN \perp B\Gamma$ . Δείξτε ότι το άθροισμα  $MK + ML + MN$  είναι σταθερό (ανεξάρτητο της θέσης του  $M$ ).

**BP/27.** Έστω  $M$  τυχαίο σημείο στο εσωτερικό τριγώνου  $AB\Gamma$  και φέρνουμε  $MD \perp B\Gamma$ ,  $ME \perp A\Gamma$ ,  $MZ \perp AB$ . Δείξτε ότι:  $\frac{MD}{\nu_\alpha} + \frac{ME}{\nu_\beta} + \frac{MZ}{\nu_\gamma} = 1$ .

**BP/28.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) κι έστω  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Αν η παράλληλη από το  $M$  προς την  $AD$  τέμνει τις βάσεις στα  $K, \Lambda$  αντίστοιχα και η ευθεία  $\Delta M$  την  $AB$  στο  $\Sigma$ , να αποδειχθεί ότι  $(AK\Lambda\Delta) = (\Delta A\Sigma)$ .

**BP/29.** Στην πλευρά  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $K$  και από τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς την  $AK$  που τέμνουν τις προεκτάσεις των  $A\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $\Lambda$  και  $M$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $(K\Lambda M) = 2(AB\Gamma)$ .

**BP/30.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $K$  δοσμένο σημείο της  $B\Gamma$  τέτοιο που  $\Gamma K = \frac{3}{4}B\Gamma$ . Βρείτε σημείο  $\Lambda$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο που  $(AB\Gamma) = 2(\Gamma K\Lambda)$ .

**BP/31.** Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$  και  $B\Gamma = 10$ . Βρείτε το εμβαδόν του.

**BP/32.** Ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  έχει εμβαδόν  $E = \frac{A\Gamma^2}{4}$ . Αποδείξτε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι διαγώνιοί του είναι  $30^\circ$ .

**BP/33.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και  $\alpha = 2\nu_\alpha$  έχουμε  $(AB\Gamma) = 9$ . Να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών και των υψών του.

**BP/34.** Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  οι μη παράλληλες πλευρές  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $K$ . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα  $KA\Gamma$  και  $KB\Delta$  είναι ισοδύναμα.

**BP/35.** Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 4 μ., το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 136 τ.μ.. Βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού.

**BP/36.** Αν τα σημεία  $M$  και  $N$  χωρίζουν την διαγώνιο  $\Delta B$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  σε τρία ίσα μέρη ( $\Delta M = MN = NB$ ) να αποδείξετε ότι το  $AM\Gamma N$  είναι παραλληλόγραμμο με εμβαδόν το  $1/3$  του εμβαδού του  $AB\Gamma\Delta$ .

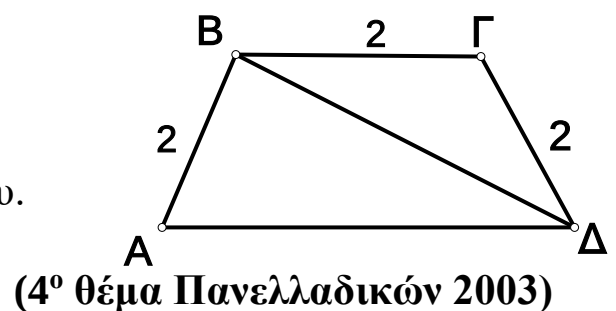
**BP/37.** Θεωρούμε ένα τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB = \alpha, \Gamma\Delta = \beta$  με  $\alpha > \beta$  και ύψος  $\upsilon$ . Αν  $O$  είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, τότε  $(OAB) - (O\Gamma\Delta) = \frac{(\alpha - \beta)\upsilon}{2}$ .

**BP/38.** Δίνεται ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρά  $2\alpha$  και κέντρο  $O$ . Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο  $OEZH$  με πλευρά  $\beta$ , όπου  $2\alpha < \beta$ . Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο τετραγώνων.

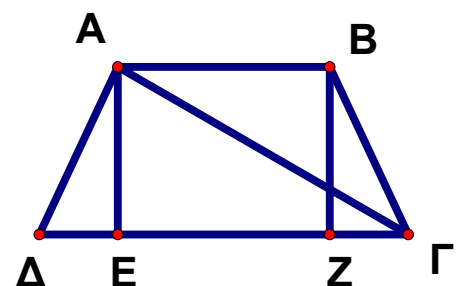
**BP/39.** Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει γωνία  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ ,  $\beta = 12\text{cm}$ ,  $\alpha = 3\text{cm}$  και είναι ισοδύναμο με ισόπλευρο τρίγωνο. Υπολογίστε την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου.

**BP/40.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , συνδέουμε την κορυφή  $A$  με τα μέσα  $K$  και  $\Lambda$  των πλευρών  $\Gamma\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :  $(AK\Gamma\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ .

**BP/41.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο που  $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = 2$  και  $B\Delta \perp AB$ .  
Α) Υπολογίστε την πλευρά  $A\Delta$   
Β) Υπολογίστε το εμβαδόν του τραπεζίου.



**BP/42.** Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 9$ ,  $A\Delta = 10$ ,  $B\Gamma = 10$ ,  $\Delta\Gamma = 21$ .  
Α) Υπολογίστε τη διαγώνιο  $A\Gamma$ .  
Β) Υπολογίστε το ύψος  $A\epsilon$ .  
Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του τραπεζίου.



**BP/43.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 4$ ,  $A\Gamma = 5$  και  $\hat{A} = 102^\circ$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

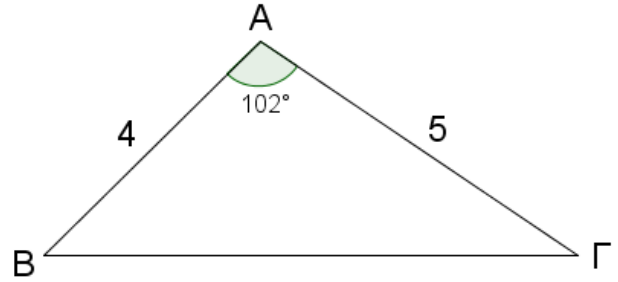
Αν  $\sin 102^\circ \approx -\frac{1}{5}$  τότε:

A) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 7$ .

B) Να υπολογίσετε την ημιπερίμετρο  $\tau$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  ισούται με  $4\sqrt{6}$ .

Δ) Υπολογίστε την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγ.  $AB\Gamma$ .

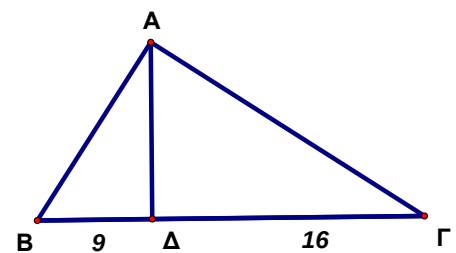


**BP/44.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με εμβαδόν 150 και το ύψος του  $AD$ .

Αν  $B\Delta = 9$  και  $\Delta\Gamma = 16$ .

A) Υπολογίστε τα  $AD$ ,  $AB$ ,  $A\Gamma$ .

B) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

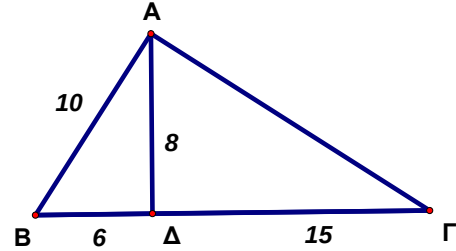


**BP/45.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  ώστε:  $AB = 10$ ,  $AD = 8$ ,  $B\Delta = 6$ ,  $\Delta\Gamma = 15$ .

A) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ορθογώνιο

B) Υπολογίστε την περίμετρο του  $AB\Gamma$ .

Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ .

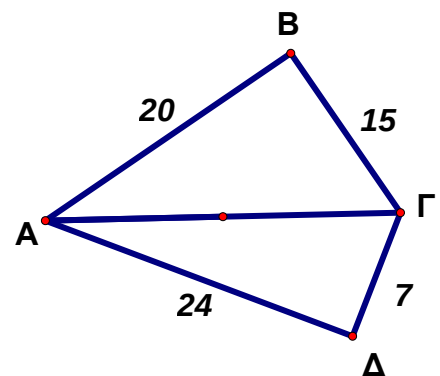


**BP/46.** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \perp B\Gamma$ ,  $AB = 20$ ,  $B\Gamma = 15$ ,  $\Gamma\Delta = 7$  και  $\Delta A = 24$ .

A) Υπολογίστε την  $A\Gamma$ .

B) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.

Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$ .



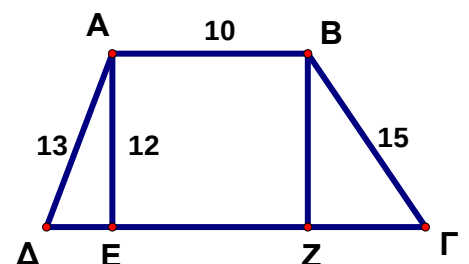
**BP/47.** Στο διπλανό τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  υπολογίστε:

A) Το  $\Delta E$

B) Το  $Z\Gamma$

Γ) Το  $\Delta\Gamma$

Δ) Το  $(AB\Gamma\Delta)$



**BP/48.** Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $A\Delta = AB = 3$  και  $B\Gamma = 5$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου και την απόσταση  $d$  του σημείου  $\Delta$  από την ευθεία  $B\Gamma$ .

**BP/49.** Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 6$  η διάμεσος  $AM$  είναι κάθετη στην  $AB$  και ίση με αυτή. Βρείτε το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ .

**BP/50.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με διαστάσεις  $B\Gamma = \alpha$  και  $AB = \alpha\sqrt{2}$ . Φέρνουμε την  $OM$  όπου  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Delta\Gamma$ . Α) Υπολογίστε τις πλευρές του  $OMB$ , συναρτήσει των  $\alpha$  και  $\beta$ . Β) Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $OMB$  και  $OM\Gamma$  είναι ισοδύναμα. Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του  $OMB$ , συναρτήσει του  $\alpha$ . Δ) Υπολογίστε τα ύψη του  $OMB$ , συναρτήσει του  $\alpha$ .

**BP/51.** Ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχει  $AB = 4$ ,  $\Gamma\Delta = 6$  και είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα  $\rho = 6$ . Υπολογίστε το εμβαδόν του. (Υπόδειξη: Στο περιγεγραμμένο τετράπλευρο τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών είναι ίσα)

**BP/52.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και τα ισόπλευρα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$ ,  $ABE$ ,  $A\Gamma Z$  που δεν έχουν κοινά σημεία με το  $AB\Gamma$ . Δείξτε ότι  $(B\Gamma\Delta) = (ABE) + (A\Gamma Z)$ .

**BP/53.** Δείξτε ότι σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{1}{2R\rho}$

**BP/54.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $(AB\Gamma) = \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$ .

Δείξτε ότι  $\beta + \gamma = \alpha\sqrt{2}$ .

**BP/55.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\beta + \gamma = 2\alpha$ .

Αποδείξτε ότι: Α)  $\beta\gamma = 6R\rho$  Β)  $\frac{1}{\nu_\gamma} + \frac{1}{\nu_\beta} = \frac{2}{\nu_\alpha}$

**BP/56.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $E = (\tau - \beta)(\tau - \gamma)$  δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

**BP/57.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $\beta\gamma = \alpha\nu_\alpha$  δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

**BP/58.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 5$  και  $A\Gamma = 7$  και η διάμεσος  $AM = 2\sqrt{7}$  να υπολογιστεί η  $B\Gamma$ , το εμβαδόν του  $AB\Gamma$  και η ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου του κύκλου.

**BP/59.** Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Με πλευρές τις  $\alpha, \beta, \gamma$  του τριγώνου κατασκευάζονται κανονικά πολύγωνα με το ίδιο



πλήθος πλευρών . Αν  $E_\alpha$  ,  $E_\beta$  και  $E_\gamma$  είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των πολυγώνων αυτών , να αποδείξετε ότι  $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$  .

**BP/60.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\alpha = 68, \beta = 32, \gamma = 60$  και το ύψος του  $AK$  . Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και βρείτε το λόγο των εμβαδών  $(AKB)$  και  $(AK\Gamma)$  .

**BP/61.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $AK$  . Αν  $AB = \gamma$  και  $A\Gamma = \beta$  υπολογίστε τα  $AK, (AK\Gamma)$  και  $(AKB)$  .

**BP/62.** Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε τα σημεία  $B, E, Z$  αντίστοιχα , ώστε  $BD = \Gamma E = AZ = 4$  . Υπολογίστε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων  $\Delta EZ$  και  $AB\Gamma$  αν  $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4$  .

**BP/63.** Υπολογίστε τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου που είναι ισοδύναμο με τρίγωνο  $AB\Gamma$  , όταν η γωνία των ίσων πλευρών του είναι ίση με τη γωνία  $A$  και είναι  $AB = 10$  και  $A\Gamma = 6, 4$  .

**BP/64.** Στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε  $AM = \frac{1}{3}AB$  ,  $BK = \frac{2}{3}B\Gamma$  ,  $\Gamma\Lambda = \frac{5}{9}A\Gamma$  . Να υπολογίσετε το  $(K\Lambda M)$  αν  $(AB\Gamma) = 27$  .

**BP/65.** Στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε  $A\Delta = \frac{3}{5}AB$  ,  $BE = \frac{3}{5}B\Gamma$  ,  $\Gamma Z = \frac{3}{5}A\Gamma$  . Να αποδείξετε ότι  $(\Delta EZ) = \frac{7}{25}(AB\Gamma)$  .

**BP/66.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  . Στις πλευρές του  $AB$  ,  $B\Gamma$  ,  $\Gamma A$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $\Delta, E, Z$  έτσι ώστε  $A\Delta = \frac{1}{2}AB$  ,  $BE = \frac{1}{3}B\Gamma$  ,  $\Gamma Z = \frac{1}{4}\Gamma A$  .

Υπολογίστε : α) Τα εμβαδά των τριγώνων  $\Delta BE, EZ\Gamma, A\Delta Z$  , αν γνωρίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma = E$  , και β) Το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta EZ$  αν γνωρίζουμε ότι  $AB\Gamma = E$  .

**BP/67.** Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  τριγώνου  $AB\Gamma$  προς το  $B$  κατά το τμήμα  $BD = \frac{3}{5}AB$  και την  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma E = \frac{5}{7}A\Gamma$  . Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $B\Gamma E\Delta$  συναρτήσει του  $(AB\Gamma) = E$  .

**BP/68.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρνω ευθεία  $\varepsilon$  παράλληλη στην  $B\Gamma$  που τέμνει τις άλλες πλευρές στα  $\Delta$  και  $E$  . Δείξτε ότι  $(A\Delta\Gamma)^2 = (A\Delta E) \cdot (AB\Gamma)$  .

**BP/69.** Αν  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), δείξτε ότι  $(O\Gamma)^2 = (OAB) \cdot (O\Gamma\Delta)$ .

**BP/70.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από τυχαίο εσωτερικό του σημείο  $M$  φέρνω τα τμήματα  $MK, ML, MN$  ίσα και κάθετα στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  αντίστοιχα. Δείξτε ότι  $(K\Lambda N) = 3(AB\Gamma)$

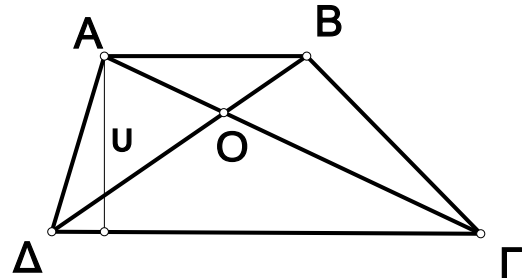
**BP/71.** Αν  $AB\Gamma\Delta$  τραπέζιο ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = 4, \Gamma\Delta = 6$  και  $(A\Delta\Gamma) = 6$ .

A) Υπολογίστε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$

B) Υπολογίστε το εμβαδόν του  $\Delta B\Gamma$

Γ) Δείξτε ότι  $(O\Delta\Delta) = (O\Gamma\Gamma)$

Δ) Δείξτε ότι  $\frac{(AOB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA}{O\Gamma}$  Ε) Δείξτε ότι  $\frac{(AOB)}{(\Delta O\Gamma)} = \frac{4}{9}$ .



**BP/72.** Αποδείξτε το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου με τρόπο που να στηρίζεται στα εμβαδά.

**BP/73.** Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$ . Να δειχθεί ότι  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ .

**BP/74.** Στο εσωτερικό ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε ένα σημείο  $K$  ώστε να είναι  $\hat{A}KB = \hat{\Gamma}KA = 120^\circ$  και  $KA = 2\text{cm}$ ,  $KB = 6\text{cm}$ ,  $K\Gamma = 10\text{cm}$ . Να υπολογιστούν τα εμβαδά των τριγώνων  $KB\Gamma$  και  $AB\Gamma$ .

**BP/75.** Θεωρούμε τρεις ίσες διαδοχικές γωνίες  $x\hat{O}y, y\hat{O}z, z\hat{O}x$  και επί των ημιευθειών  $Ox, Oy, Oz$  τα σημεία  $A, B, \Gamma$  αντίστοιχως ώστε  $OA = 1$ ,  $OB = 4$ ,  $O\Gamma = 8$ . Να δείξετε ότι  $(AB\Gamma) = 11\sqrt{3}$ .

**BP/76.** Ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  έχει μία γωνία του πενταπλάσια από μια άλλη και την περίμετρό του δωδεκαπλάσια μιας πλευράς του. Αν το εμβαδόν του είναι  $40\text{cm}^2$  να υπολογιστούν οι πλευρές και τα ύψη του.

**BP/77.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψος  $AH = 2\sqrt{3}$ , γωνία  $\hat{B} = 60^\circ$  και γωνία  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ . Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου, το εμβαδόν του και τα ύψη του προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ .

**BP/78.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $AB = 6\text{cm}$  και γωνία  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 120^\circ$ .

α) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

β) Αν Ε σημείο της ΑΓ , τέτοιο που  $AE = \frac{1}{2}EG$  και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ , να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ .

**BP/79.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $\beta=2\gamma$  , ΑΔ διχοτόμος του και ΒΜ μια διάμεσός του . Δείξτε ότι:  $\frac{(B\Delta)}{(\Delta M\Gamma)} = \frac{1}{2}$  και  $\frac{(M\Delta\Gamma)}{(A\Gamma)} = \frac{1}{3}$  .

**BP/80.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\alpha=17\text{cm}$  ,  $\beta=8\text{cm}$  , και  $\gamma=15\text{cm}$  .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο , και

β) Αν ΑΔ το ύψος του, υπολογίστε το  $\frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)}$  .

**BP/81.** Εστω τραπέζιο ΑΒΓΔ και τα ύψη του ΑΕ, ΒΖ .

Αν  $AB = 4$  ,  $AD = 5$  ,  $B\Gamma = 4\sqrt{2}$  και  $AE = BZ = 4$  , τότε:

Α) Υπολόγισε τη ΔΓ

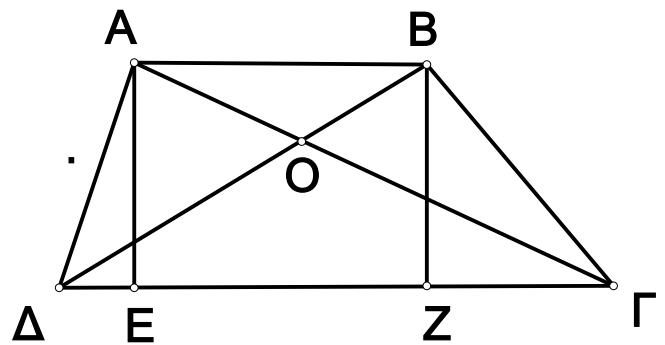
Β) Υπολόγισε το  $(A\Gamma\Delta)$

Γ) Δείξε ότι  $(A\Delta\Gamma) = (B\Delta\Gamma)$

Δ) Δείξτε ότι  $(A\Delta\Gamma) = (B\Delta\Gamma)$

Ε) Δείξτε ότι:  $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA}{OG}$  και  $\frac{(O\Delta\Gamma)}{(OAB)} = \frac{121}{16}$

ΣΤ) Αν  $\frac{AO}{AG} = \frac{7}{15}$  υπολόγισε τα  $(A\Delta\Gamma)$  και  $(\Delta O\Gamma)$  .



**BP/82.** Εστω τραπέζιο ΑΒΓΔ

με  $AB \perp AD$  , Ζ μέσο του ΑΔ και ΒΕ το ύψος του .

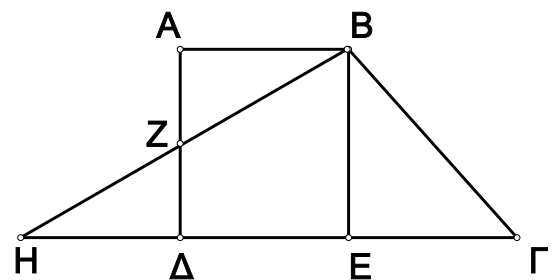
Αν  $AB = \alpha$  ,  $AD = \alpha + 1$  ,  $\Delta\Gamma = 2\alpha$  και  $B\Gamma = \alpha + 2$  , τότε:

Α) Να βρεθούν οι πλευρές του τραπέζιου

Β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπέζιου

Γ) Αποδείξτε ότι  $(A\Gamma\Delta) = (B\Delta\Gamma)$

Δ) Να βρεθεί η απόσταση του Δ από τη ΒΓ .



**BP/83.** Ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν  $90\text{cm}^2$  . Από ένα σημείο Μ του ύψους ΑΔ, που το διαιρεί σε δύο τμήματα ΑΜ, ΜΔ με λόγο 2/1, φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ , ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα . Υπολογίστε το  $(AEZ)$  .

**BP/84.** Υπολογίστε τις πλευρές ισοσκελούς τραπεζίου, αν γνωρίζετε ότι η περίμετρός του είναι  $60\text{ m}$ , το εμβαδόν του  $160\text{ m}^2$  και το ύψος του  $8\text{ m}$ .

**BP/85.** Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB//\Gamma\Delta$ ) είναι  $B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta$  και η βάση  $AB$  είναι κατά 2 μικρότερη από το άθροισμα των τριών άλλων πλευρών. Αν το ύψος του τραπεζίου είναι 5, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

**BP/86.** Δίνεται ένα τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$ , που έχει βάσεις  $AB = 70\text{ cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 20\text{ cm}$  και μη παράλληλες πλευρές  $B\Gamma = 40\text{ cm}$  και  $A\Delta = 30\text{ cm}$ . Αποδείξτε ότι οι  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  είναι κάθετοι και να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$ .

**BP/87.** Δείξτε ότι σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διαμέσους  $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$  και εμβαδόν  $E$ , ισχύει:  $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3E\sqrt{3}$ .

**BP/88.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές:  $\alpha = 5x$ ,  $\beta = 4x$ ,  $\gamma = 3x$

A) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

B) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $E$  ως συνάρτηση του  $x$ .

Γ) Αν  $E = 24\text{ cm}^2$  τότε :

Γ1) Να βρείτε το  $x$ .

Γ2) Να υπολογίσετε το ύψος προς τη υποτείνουσα.

**BP/89.** Διαιρέστε ένα τετράγωνο πλευράς  $a = 6\text{ cm}$  σε τρία ισοδύναμα μέρη με ευθείες που διέρχονται από μία κορυφή του.

**BP/90.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $E, \Delta$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma$ ,  $H$  το μέσο του  $E\Delta$  και  $Z$  το μέσο του  $B\Delta$ . Αποδείξτε ότι  $(AB\Gamma) = 16(HZ\Delta)$ .

**BP/91.** Θεωρώ τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τη διάμεσό

Του  $BM$ . Αν  $AB = 5$ ,  $B\Gamma = 13$  και  $BM = \sqrt{61}$  βρείτε:

A) την  $A\Gamma$ .

B) το είδος του τριγώνου.

Γ) το εμβαδόν του τριγώνου.



**BP/92.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι  $\alpha = 5, \beta = 7, \gamma = 8$ , να υπολογίσετε:

A) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

B) Τα ύψη του

Γ) την ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου

Δ) Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου

Ε) Το ημίτονο της γωνίας  $A$ .

**BP/93.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι  $\alpha = 5, \beta = 6, \gamma = 7$ , να υπολογίσετε:

A) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

B) Τα ύψη του.

Γ) την ακτίνα  $R$  και το μήκος του περιγεγραμμένου κύκλου.

Δ) Την ακτίνα  $\rho$  και το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου.

**BP/94.** Έστω στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψος  $A\Delta$

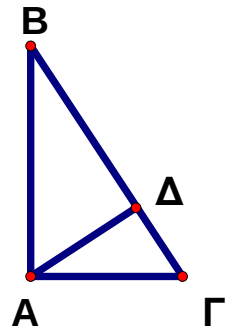
Είναι  $AB = 8$ ,  $B\Gamma = 10$ ,  $A\Gamma = 6$ :

A) Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

B) Υπολογίστε τα  $B\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  και  $A\Delta$ .

Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγ.  $AB\Gamma$ .

Δ) Βρείτε το λόγο:  $\frac{(AB\Delta)}{(A\Delta\Gamma)}$ .



**BP/95.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με κέντρο  $O$ , εμβαδόν  $(AB\Gamma\Delta) = 48$  και  $AB = 8$ , όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Προεκτείνουμε την διαγώνιο  $\Delta B$  κατά τμήμα

$BM = \Delta B$  και την πλευρά  $\Gamma B$  κατά

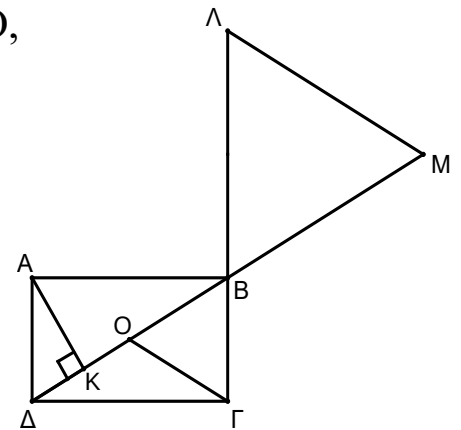
τμήμα  $B\Lambda = 2 \cdot \Gamma B$ .

A) Να υπολογίσετε την πλευρά  $A\Delta$  και την διαγώνιο  $B\Delta$  του ορθογωνίου.

B) Αν  $K$ , η προβολή του  $A$  πάνω στην  $B\Delta$ , να υπολογίσετε την προβολή  $BK$  της  $AB$  πάνω στην  $B\Delta$ .

Γ) Να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{(BO\Gamma)}{(B\Lambda M)}$ .

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $(B\Lambda M)$  του τριγώνου  $B\Lambda M$ .



**BP/96.** Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο  $Z$  είναι το μέσο της πλευράς

$AB$  και το σημείο  $H$  είναι το μέσο

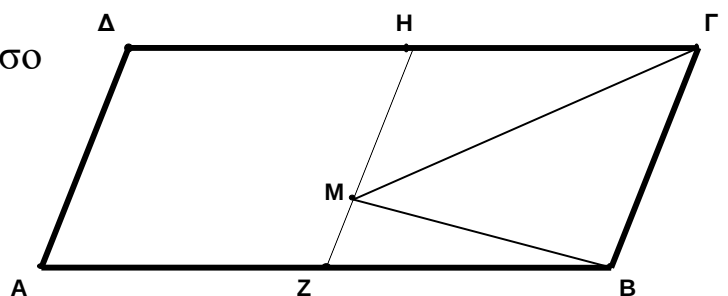
της πλευράς  $\Delta\Gamma$  του

παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

Αν το  $M$  είναι ένα τυχαίο

σημείο του τμήματος  $HZ$  και το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$  είναι 20, να

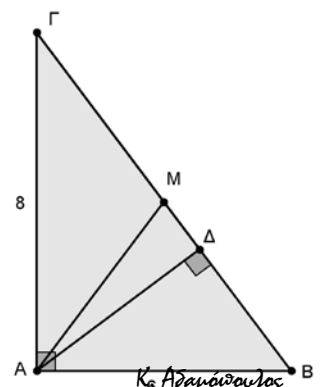
υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $MB\Gamma$ .



**BP/97.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )

φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$  και τη διάμεσο  $AM$ , όπως

φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Αν ισχύει  $AB = 6$  και



$ΑΓ = 8$ , να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$ ,  $ΑΔ$  και  $ΑΜ$ , καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου  $ΑΔΜ$ .

**BP/98.** Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες  $\hat{x}\hat{O}y$ ,  $y\hat{O}z$ ,  $z\hat{O}x$  έτσι ώστε  $\hat{x}\hat{O}y = y\hat{O}z = 150^\circ$ . Στις ημιευθείες  $Ox, Oy, Oz$  παίρνουμε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $OA=2$ ,  $OB=4$  και  $O\Gamma=6$ .

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $(O\Gamma A)$  του τριγώνου  $O\Gamma A$

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών  $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)}$ .

(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2001)

**BP/99.** Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με πλευρές  $ΒΓ = 7$ ,  $ΑΓ = 6$ ,  $ΑΒ = 5$  και  $ΒΔ$  το ύψος του.

Α) Υπολογίστε το  $ΑΔ$ .

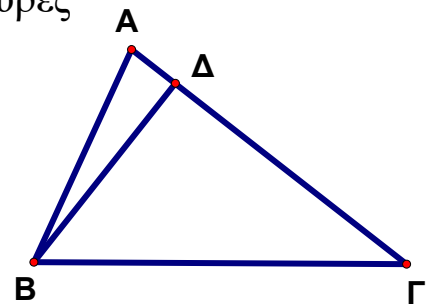
Β) Να βρείτε το ύψος  $ΒΔ$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι  $6\sqrt{6}$ .

Δ) Να βρείτε τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

Ε) Αν προεκτείνουμε την πλευρά  $\Gamma A$  προς το μέρος του  $A$  κατά

ευθύγραμμο τμήμα  $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΓ$ , να βρείτε το λόγο των εμβαδών  $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΔ)}$ .



**BP/100.** Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ // ΓΔ$ ,  $ΑΒ < ΓΔ$ ,  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $ΑΒ = 4$ ,  $ΑΔ = 3$ ,  $ΒΓ = 5$ . Να υπολογίσετε:

α) την προβολή της  $ΒΓ$  πάνω στην  $\Delta\Gamma$ ,

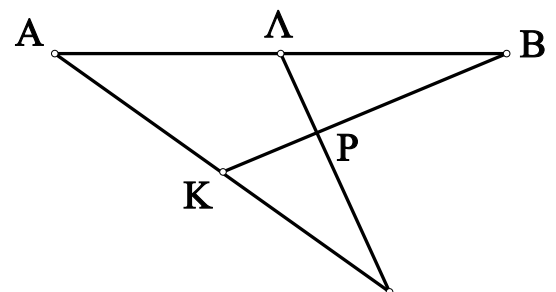
β) το εμβαδόν του τραpezίου  $ΑΒΓΔ$ ,

γ) το εμβαδόν του τριγ.  $\Delta ΒΓ$ . (2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2000)

**BP/101.** Στο διπλανό σχήμα τα Σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι μέσα των  $ΑΓ$  και  $ΑΒ$  αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων  $ΑΚΒ$  και  $ΑΛΓ$  είναι ίσος με 1.

β) Αν  $P$  είναι το σημείο τομής των  $\Lambda\Gamma$  και  $KΒ$ , τότε τα τρίγωνα  $\Gamma ΒΛΡ$  και  $K\Gamma P$  έχουν ίσα εμβαδά. (3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 1999)



**BP/102.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 1$  και  $B\Gamma = \sqrt{3}$ .  
Να υπολογίσετε:

- τη γωνία  $\hat{A}$ .
- το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- τη διάμεσο  $BM = \mu_\beta$ .

(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2003)

**BP/103.** Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος  $(O, R)$  διαμέτρου  $B\Gamma$  και ημιευθεία  $Bx$  τέτοια, ώστε η γωνία  $\Gamma Bx$  να είναι  $30^\circ$ . Έστω ότι η  $Bx$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $A$ .

Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Gamma$ ,  
η οποία τέμνει τη  $Bx$  στο σημείο  $P$ .

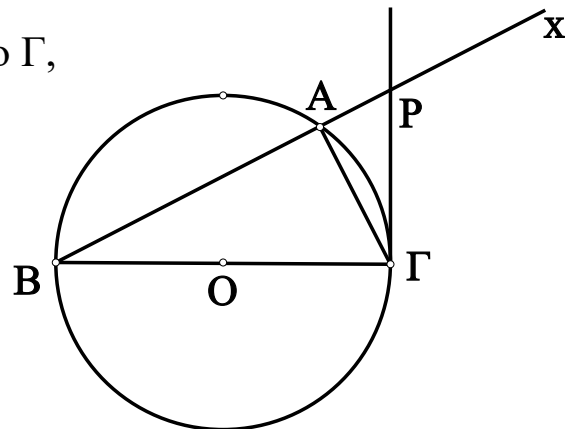
Δείξτε ότι:

α.  $A\Gamma = R$

β.  $\frac{(P\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 4$

γ.  $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ .

(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2002)



**BP/104.** Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με μήκη πλευρών

$$\gamma = \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2} \text{ και εμβαδόν } (AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}.$$

A. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς  $\alpha = \sqrt{3}$

B. Να υπολογίσετε την ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς  $AB$  πάνω στην πλευρά  $B\Gamma$ . (3<sup>ο</sup> Θέμα Πανελλαδικών 2004)

**BP/105.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο

$AB\Gamma$ , πλευράς  $\alpha$ .

Στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  παίρνουμε τα

σημεία  $\Delta, E, Z$  ώστε  $A\Delta = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha$

όπως στο διπλανό σχήμα.

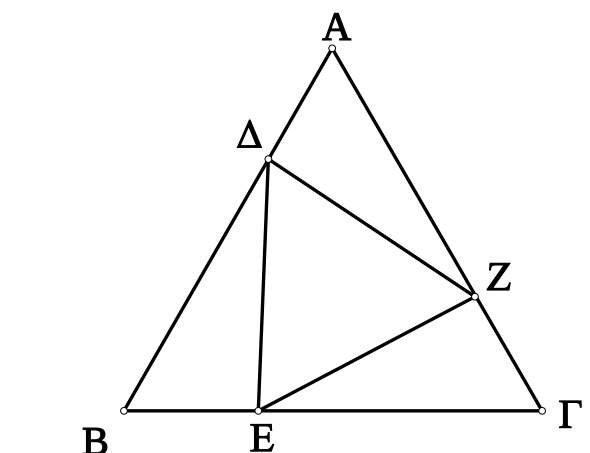
Να υπολογίσετε το εμβαδόν

ως συνάρτηση του  $\alpha$ .

α. του τριγώνου  $A\Delta Z$

β. του τριγώνου  $\Delta EZ$

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ .



(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2003)

# Κανονικά Πολύγωνα

*Ως ο γεωμέτρης που όλος βυθισμένος  
τον κύκλο να μετρήσει , μα δε βρίσκει  
στο νού του το θεμέλιο που 'χει ανάγκη,  
όμοια κι εγώ στο αλλόκοτο αυτό θάμμα.  
Ποθώ να δω μορφή πως σμίγει ανθρώπου  
με κύκλο Θείο και πως τοπώνει εντός του .  
Όμως γι' αυτό μικρές οι φτερούγες μου .  
Δάντης , Θεία Κωμωδία*

**ΒΣ/01.**Εξετάστε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία :

α)  $25^\circ$     β)  $15^\circ$     γ)  $24^\circ$

**ΒΣ/02.**Εξετάστε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο του οποίου η γωνία να είναι: α)  $80^\circ$     β)  $140^\circ$     γ)  $165^\circ$

**ΒΣ/03.**Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών πολυγώνων με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι  $\frac{3}{4}$ . Να βρείτε :

A) Το λόγο των εμβαδών τους.

B) Τις περιμέτρους αν διαφέρουν κατά 28cm .

**ΒΣ/04.** A) Αν το απόστημα κανονικού εξαγώνου είναι  $6\sqrt{3}m$  υπολογίστε την ακτίνα του και το εμβαδόν του.

B) Όμοια αν το απόστημα κανονικού τετραγώνου είναι  $6\sqrt{2} m$  υπολογίστε την ακτίνα του και το εμβαδόν του.

**ΒΣ/05.**Αποδείξτε ότι η γωνία κανονικού πολυγώνου με  $n$  πλευρές είναι αμβλεία όταν  $n > 4$  .

**ΒΣ/06.**Δείξτε ότι :  $\alpha_n = \frac{2R^2 - \lambda_{2n}^2}{2R}$  και  $\lambda_n = \frac{\lambda_{2n}\sqrt{4R^2 - \lambda_{2n}^2}}{R}$ .

**ΒΣ/07.**Αν  $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$  είναι τα εμβαδά κανονικών  $n$ -γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $\alpha$  , δείξτε ότι  $E_\alpha = E_\beta + E_\gamma$  .

**ΒΣ/08.**Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$  παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα  $BK = \Gamma\Lambda = \Delta M = AN = \lambda_3$  , όπου  $\lambda_3$  η πλευρά του εγγεγραμμένου στον κύκλο



κανονικού τριγώνου . Δείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο και υπολογίστε την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

**ΒΣ/09.**Ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) έχει  $AB = \lambda_4$  και  $AG = \lambda_3$ . Υπολογίστε τις γωνίες και το εμβαδόν του.

**ΒΣ/10.**Αποδείξτε ότι  $E_{2n}^2 = E_n \cdot E_n'$  όπου  $E_n$  το εμβαδόν του κανονικού n-γώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο,  $E_n'$  το εμβαδόν του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού n-γώνου και  $E_{2n}$  το εμβαδόν του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού 2n-γώνου

**ΒΣ/11.**Οι προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) τέμνονται σε σημείο Σ . Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου ΣΑΔ .

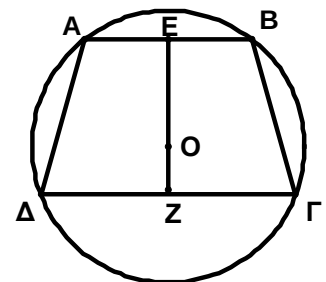
**ΒΣ/12.**Μια αυλή πρόκειται να στρωθεί με πλάκες τριών σχημάτων κανονικού κ-γώνου, λ-γώνου και μ-γώνου . Δείξτε ότι  $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$  .

**ΒΣ/13.**Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν στην προέκταση της ΑΒ προς το Β πάρουμε ΒΣ = 2ΑΒ και από το Σ φέρουμε την εφαπτομένη ΣΜ του κύκλου, δείξτε ότι  $SM = 3\lambda_4$  .

**ΒΣ/14.**Αν Σ το μέσο της πλευράς ΕΔ κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R), να βρεθεί το εμβαδόν καθενός από τα μέρη στα οποία η ΑΣ χωρίζει το εξάγωνο .

**ΒΣ/15.**Σε κύκλο εγγράφουμε τετράγωνο και κανονικό οκτάγωνο . Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις περιμέτρους των δύο αυτών σχημάτων.

**ΒΣ/16.**Αν σε κύκλο (Κ, R), είναι  $AB = R$  και  $\Delta\Gamma = R\sqrt{3}$  δύο παράλληλες χορδές εκατέρωθεν του κέντρου Κ, υπολογίστε τις χορδές ΑΔ και ΒΓ, το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ και το εμβαδόν του κύκλου που βρίσκεται έξω από το τραπέζιο.



**ΒΣ/17.**Δίνεται τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΗ=ΑΒ . Δείξτε ότι η ΓΗ εφάπτεται στον κύκλο.

**ΒΣ/18.**Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, Ζ το μέσο του τόξου  $\widehat{ΑΓ}$  και Η το μέσο της ΒΓ . Αν η ΖΗ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Θ, βρείτε τα μήκη των ΖΗ και ΗΘ .

**ΒΣ/19.** Δίνεται ένας κύκλος  $(O, R)$  και μια χορδή του  $AB = \lambda_4$ . Στην ημιευθεία  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Gamma A = 2R$ . Αν  $\Gamma \Delta = x$  είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου, να δείξετε ότι  $x = \lambda_8 \sqrt{2}$  όπου  $\lambda_8$  η πλευρά του κανονικού οκταγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο.

**ΒΣ/20.** Υπολογίστε ως συνάρτηση του  $R$  η πλευρά  $\lambda_8$  και το απόστημα  $\alpha_8$  ενός κανονικού οκταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$ .

**ΒΣ/21.** Αποδείξτε ότι ένα δάπεδο μπορεί να καλυφθεί με τρία μόνο είδη πλακιδίων που έχουν σχήμα κανονικού  $n$ -γώνου και είναι ίσα μεταξύ τους.

**ΒΣ/22.Α.** Έστω ένας κύκλος  $(O, R)$ .

α. Στον κύκλο  $(O, R)$  να εγγράψετε τετράγωνο.

β. Να αποδείξετε ότι  $\lambda_4 = R\sqrt{2}$  όπου  $\lambda_4$  η πλευρά του τετραγώνου.

γ. Να αποδείξετε ότι  $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ , όπου  $\alpha_4$  το απόστημα του τετραγώνου.

**Β.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος**" αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

γ. Η δύναμη του σημείου  $P$  ως προς τον κύκλο  $(O, R)$  ορίζεται με τον τύπο:

$$\Delta_{(O,R)}^P = R^2 + OP^2.$$

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό; **(1<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2003)**

**ΒΣ/23.** Έστω κανονικό πολύγωνο  $A_1 A_2 \dots A_n$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ . Αν η γωνία του πολυγώνου είναι  $\varphi_n = 150^\circ$ , να βρείτε:

Α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου

Β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου

Γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας  $R$ .

**(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2004)**

# Μέτρηση κύκλου

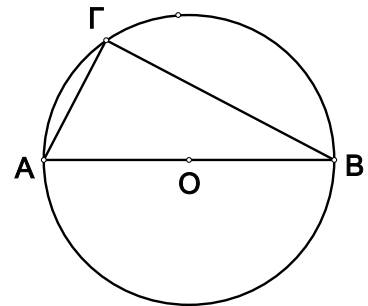
**ΒΣ/24.** Ο τροχός ενός αυτοκινήτου σε  $\nu$  στροφές διατρέχει απόσταση  $S$ . Υπολογίστε την ακτίνα του τροχού .

**ΒΣ/25.** Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση , ο ένας τροχός του , που έχει ακτίνα  $R$  , κάνει  $\nu$  στροφές , ενώ ο άλλος που έχει ακτίνα  $\rho$  κάνει  $\mu$  στροφές . Να δείξετε ότι  $\frac{\mu}{\nu} = \frac{R}{\rho}$  .

**ΒΣ/26.** Δύο τόξα  $\mu$  και  $\nu$  ενός κύκλου  $(O, R)$  έχουν μέτρα  $72^\circ$  και  $\frac{3\pi}{5} rad$  αντίστοιχα . Το μήκος του τόξου  $\mu$  είναι  $2\pi$  . Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του τόξου  $\nu$  .

**ΒΣ/27.** Δύο κάθετες χορδές  $AB, A\Gamma$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  έχουν μήκη  $6cm$  και  $8cm$  αντίστοιχα . Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος ενός τόξου του που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $3rad$  . Βρείτε επίσης το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου .

**ΒΣ/28.** Αν στο σχήμα  $A\Gamma = 6cm$  και  $B\Gamma = 8cm$  , υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου και το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται εκτός του τριγώνου .



**ΒΣ/29.** Δύο κύκλοι  $(K, R), (L, \rho)$  έχουν διάκεντρο  $KL = 2$  ,  $R = \sqrt{3}$  και  $\rho = 1$  . Αποδείξτε ότι οι κύκλοι τέμνονται και να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος που ορίζεται από τα σημεία τομής των κύκλων και τα δύο κυρτογώνια τόξα.

**ΒΣ/30.** Να βρεθεί ο λόγος των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος  $(O, R)$  από μια χορδή του  $AB = R$  .

**ΒΣ/31.** Δίνεται τετράγωνο πλευράς  $2\alpha$  . Αν γράψουμε τα τόξα των κύκλων  $(A, \alpha), (\Gamma, \alpha)$  που είναι στο εσωτερικό του τετραγώνου , να υπολογιστεί το εμβαδόν του μέρους του τετραγώνου που είναι εκτός των τόξων.

**ΒΣ/32.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $2\alpha$  . Με διαμέτρους τις  $AB, B\Gamma$  γράφουμε δύο ημικύκλια εντός του τετραγώνου . Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο ημικυκλίων.

**ΒΣ/33.** Δύο ίσοι κύκλοι  $(K, \rho), (\Lambda, \rho)$  εφάπτονται σε σημείο  $A$  και  $B\Gamma$  είναι ένα κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους. Να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**ΒΣ/34.** Δίνεται κύκλος  $(K, \rho)$

και στην προέκταση μιας ακτίνας του

$KA$  παίρνουμε τμήμα  $A\Gamma = KA$  και από το  $\Gamma$  φέρουμε

εφαπτομένη  $\Gamma B$  του

κύκλου.

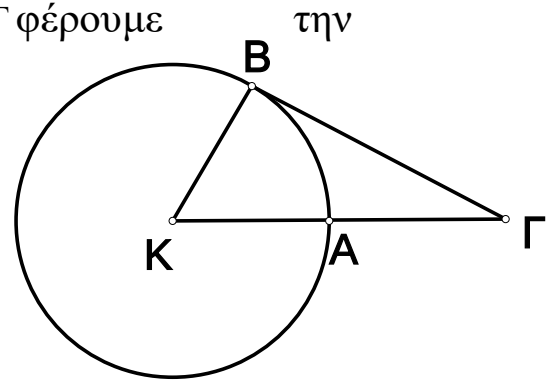
A) Δείξτε ότι  $\hat{K} = 60^\circ$

B) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $KB\Gamma$ .

Γ) Βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Δ) Βρείτε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

E) Βρείτε την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $K, A, B$ .



**ΒΣ/35.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με τη  $B\Gamma$  διάμετρο και  $A\Delta$  το ύψος του.

Αν  $\Delta\Gamma = 4$  και  $A\Delta = 3$ , τότε:

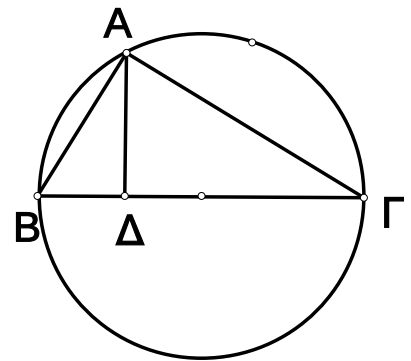
A) Υπολογίστε το  $A\Gamma$

B) Υπολογίστε το  $B\Gamma$

Γ) Υπολογίστε το μήκος του κύκλου

Δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του κύκλου

E) Υπολογίστε το μέρος του κύκλου που βρίσκεται εκτός του τριγώνου.



**ΒΣ/36.** Δύο ακτίνες  $OA, OB$  κύκλου σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ . Από το σημείο  $A$  φέρνω την  $A\Gamma$  κάθετη στην εφαπτομένη του κύκλου στο  $B$ . Υπολογίστε το εμβαδόν του μέρους που περιλαμβάνεται μεταξύ της  $A\Gamma$ , της  $AB$  και του τόξου  $\widehat{AB}$ .

**ΒΣ/37.** Δύο κύκλοι  $(K, \rho), (\Lambda, 3\rho)$  εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο  $A$ .

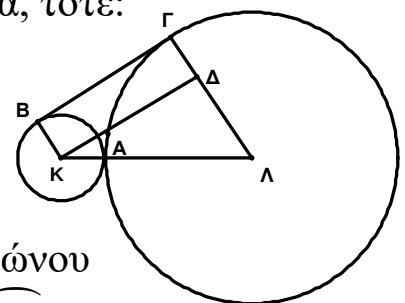
Αν  $B\Gamma$  το κοινό εξωτερικό τους εφαπτόμενο τμήμα, τότε:

A) Υπολογίστε το τμήμα  $B\Gamma$ .

B) Υπολογίστε το εμβαδόν του τραπεζίου  $KB\Gamma\Lambda$ .

Γ) Υπολογίστε τη γωνία  $\hat{\Gamma\Lambda K}$

Δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που περικλείεται από τη  $B\Gamma$  και τα τόξα  $\widehat{AB}$  και  $\widehat{A\Gamma}$ .

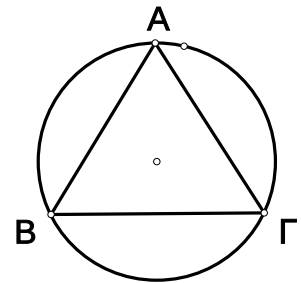


**ΒΣ/38.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, \rho)$ . Γράφουμε τα τόξα των κύκλων  $(A, \rho)$ ,  $(B, \rho)$  και  $(\Gamma, \rho)$  που περιέχονται στον κυκλικό δίσκο  $(O, \rho)$ . Υπολογίστε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τρίφυλλου.

**ΒΣ/39.** Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $B\Gamma = 2\alpha$ . Με κέντρο  $A$  και ακτίνα το μισό του ύψους  $AD$  γράφουμε κύκλο. Βρείτε το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του μέρους του που είναι έξω από το τρίγωνο.

**ΒΣ/40.** Δίνεται κύκλος  $(K, R)$  και μία διάμετρος του  $AB$ .

Αν με κέντρο το  $A$  και ακτίνα την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο αυτό γράψουμε νέο κύκλο, να βρεθεί το εμβαδό του κοινού μέρους των δύο κύκλων.

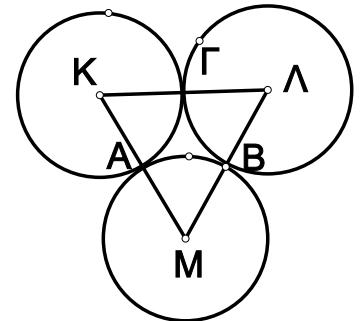


**ΒΣ/41.** Έστω ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με πλευρά  $\lambda_3 = 4\sqrt{3}$ . Υπολογίστε το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

**ΒΣ/42.** Με διάμετρο την πλευρά  $B\Gamma = 2\alpha$  ισοπλεύρου τριγώνου  $AB\Gamma$ , γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τις  $AB, A\Gamma$  στα  $H$  και  $\Theta$  αντίστοιχα. Υπολογίστε το εμβαδόν του ημικυκλίου που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.

**ΒΣ/43.** Θεωρώ τρεις ίσους κύκλους  $(K, \rho)$   $(\Lambda, \rho)$  και  $(M, \rho)$  που εφάπτονται ανά δύο στα σημεία  $A, B, \Gamma$ .

Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του σχηματιζόμενου καμπυλόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .



**ΒΣ/44.** Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, \rho)$ . Αν γράψουμε το τόξο  $\widehat{B\Gamma}$  του κύκλου  $(A, AB)$  που περιέχεται στον κυκλικό δίσκο  $(O, \rho)$ , ναδειχθεί ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**ΒΣ/45.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(K, \rho)$ . Με κέντρα τις κορυφές  $B$  και  $\Delta$  και ακτίνα  $AB$  γράφουμε δύο τεταρτοκύκλια εντός του τετραγώνου. Βρείτε το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο τεταρτοκυκλίων.

**ΒΣ/46.** Δύο ίσοι κύκλοι  $(K, \rho), (\Lambda, \rho)$  έχουν διάκεντρο  $K\Lambda = \rho\sqrt{2}$ . Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους τους.

**ΒΣ/47.** Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος  $(K, R)$  από μία χορδή κάθετη στο μέσο μιας ακτίνας του.

**ΒΣ/48.** Δίνεται ημικύκλιο κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $AB = 2\rho$ . Με διαμέτρους  $OA, OB$  γράφουμε ημικύκλια. Να βρεθεί το εμβαδόν και το μήκος του κύκλου που εφάπτεται στα τρία αυτά ημικύκλια.

**ΒΣ/49.** Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα ακτίνας  $R$  και γωνίας  $120^\circ$ .

**ΒΣ/50.** Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα ακτίνας  $R$  και γωνίας  $60^\circ$ .

**ΒΣ/51.** Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και τα διαδοχικά του τόξα  $\widehat{AB} = 90^\circ$  και  $\widehat{B\Gamma} = 30^\circ$ . Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**ΒΣ/52.** Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και δύο κάθετες ακτίνες του  $OA, OB$ . Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $R$  γράφουμε τόξο που τέμνει το τόξο  $\widehat{AB}$  στο  $M$ . Βρείτε το εμβαδόν του μικτογράμμου σχήματος  $MOB$ .

**ΒΣ/53.** Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(O, \rho), (O, 2\rho)$ . Από το τυχαίο σημείο  $A$  του μεγάλου κύκλου φέρνω τις εφαπτόμενες  $AM, AN$  του μικρού όπου  $M, N$  τα σημεία επαφής. Υπολογίστε το εμβαδόν του μικτογράμμου σχήματος που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $AM, AN$  και το κυρτογώνιο τόξο  $\widehat{MN}$ .

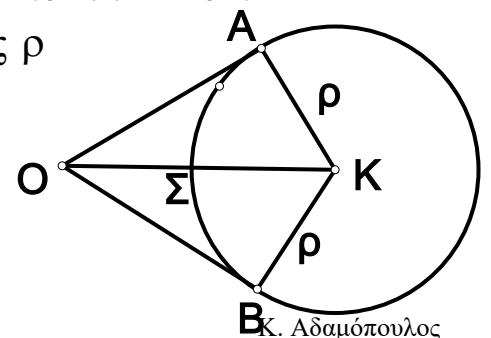
**ΒΣ/54.** Δίνεται κύκλος με διάμετρο  $AB$ . Να βρεθεί σημείο  $M$  στην  $AB$  τέτοιο που αν με διαμέτρους τα  $AM$  και  $BM$  γράψουμε ημικύκλια εκατέρωθεν της  $AB$ , η γραμμή που σχηματίζεται από τα ημικύκλια να διαιρεί τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη με λόγο εμβαδών  $3/2$ .

**ΒΣ/55.** Δίνεται τεταρτοκύκλιο  $AKB$  με ακτίνα  $KA = 2\alpha$  και με διαμέτρους τις  $KA, KB$  γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τεταρτοκύκλιο, που τέμνονται στο  $\Gamma$ . Βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $A\Gamma B$ .

**ΒΣ/56.** Δίνεται κύκλος κέντρου  $K$  και ακτίνας  $\rho$  σημείο  $O$  εξωτερικό του. Από το  $O$  φέρνω τα εφαπτόμενα τμήματα  $OA, OB$  προς τον κύκλο.

Αν  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  και  $OA = 4\sqrt{3}$ :

A) Δείξτε ότι  $\rho = 4$



Β) Δείξτε ότι  $\widehat{AKB} = 120^\circ$

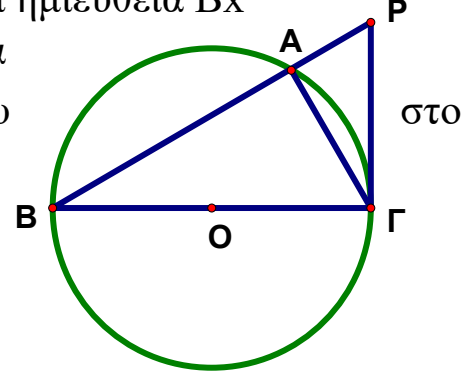
Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΑΚΒ.

Δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τα τμήματα ΟΑ, ΟΒ και το τόξο  $\widehat{ΑΣΒ}$ .

Ε) Υπολογίστε τη δύναμη του σημείου Ο ως προς τον κύκλο.

**ΒΣ/57.** Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βχ

που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α, ώστε η γωνία  $\widehat{ΓΒΑ} = 30^\circ$ . Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου Γ, η οποία τέμνει τη Βχ στο σημείο Ρ.



Α) Να αποδείξετε ότι:  $ΑΓ = R$ .

Β) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{(PAΓ)}{(PBΓ)} = 4$ .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:  $PΓ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

**ΒΣ/58.** Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας

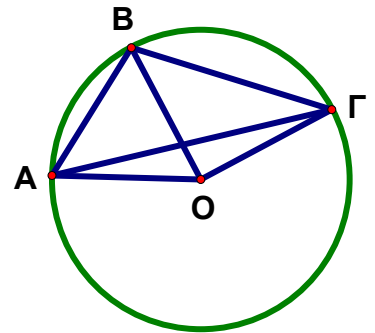
$R = 2$ , και δύο διαδοχικές χορδές του ΑΒ και ΒΓ

τέτοιες ώστε  $AB = 2$  και  $BΓ = 2\sqrt{2}$ .

Α. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου  $\widehat{AB}$ .

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (Ο,  $\widehat{BΓ}$ ) με κέντρο Ο και αντίστοιχο τόξο  $\widehat{BΓ}$ .

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΑΒΓ.



**ΒΣ/59.** Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

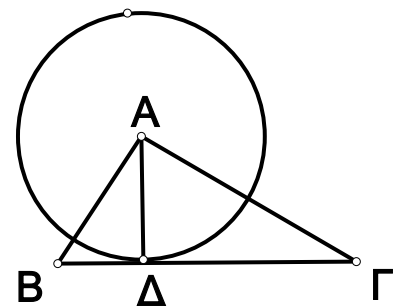
με  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{5}$ ,  $ΑΓ = 4\sqrt{5}$ , το ύψος του ΑΔ και κατασκευάζω τον κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ΑΔ.

Α) Υπολογίστε τη ΒΓ

Β) Αποδείξτε ότι  $BΔ = 2$ .

Γ) Υπολογίστε το ΑΔ.

Δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του κύκλου, το εμβαδόν του τριγώνου, το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται εκτός του τριγώνου και το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου που βρίσκεται εκτός του κύκλου.



**ΒΣ/60.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το ύψος του  $A\Delta$  και η διάμεσος του  $AM$ .

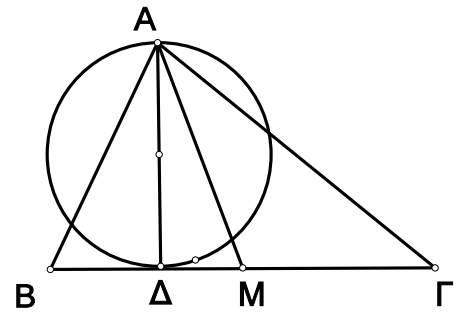
Αν  $AB = 5$ ,  $A\Gamma = \sqrt{97}$ , και  $AM = 5$ :

A) Υπολογίστε την  $B\Gamma$ .

B) Υπολογίστε το  $M\Delta$ .

Γ) Υπολογίστε το  $A\Delta$ .

Δ) Βρείτε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου  $A\Delta$ .



**ΒΣ/61.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  το ύψος του  $A\Delta$  και η διάμεσός του  $AM$ .

Αν  $AB = 4$ ,  $A\Gamma = 4\sqrt{3}$  και  $AM = 4$ :

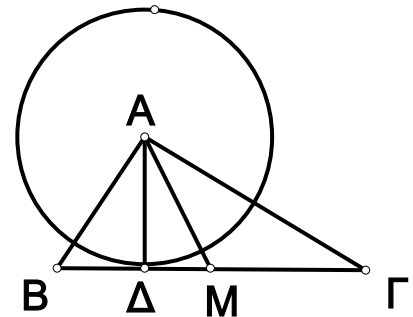
A) Βρείτε τη  $B\Gamma$ .

B) Βρείτε τη  $\Delta M$ .

Γ) Υπολογίστε το ύψος  $A\Delta$ .

Δ) Δείξτε ότι το τριγ.  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

E) Υπολογίστε το εμβαδόν του κύκλου, το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται εκτός του τριγώνου και το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου που βρίσκεται εκτός του κύκλου.



**ΒΣ/62.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα  $R$ .

Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι  $\alpha = 5, \beta = 5, \gamma = 6$ , να υπολογίσετε:

A) Το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ .

B) την ακτίνα  $R$ .

Γ) Το εμβαδόν του κύκλου.

Δ) Το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκετε εκτός του τριγώνου.

**ΒΣ/63.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha = 5, \beta = 7, \gamma = 8$  και ο εγγεγραμμένος του κύκλος με ακτίνα  $\rho$ . Να υπολογίσετε:

A) Το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ .

B) την ακτίνα  $\rho$ .

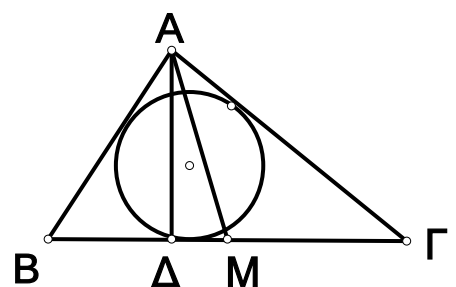
Γ) Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου.

Δ) Το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου που βρίσκεται εκτός του κύκλου.

**ΒΣ/64.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει εμβαδόν 12 τ. μον. ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου

$\rho = \frac{4}{3}$ ,  $B\Gamma = 7$  και  $A\Gamma = 6$ .

Υπολογίστε την πλευρά  $AB$ , τη διάμεσο  $AM$ , το ύψος  $A\Delta$  και το  $\eta\mu A$ .



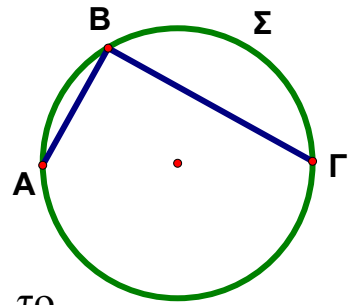


**ΒΣ/65.** Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με εμβαδόν  $E = 4\pi$  και δύο διαδοχικές χορδές του  $AB = \lambda_6$  και  $B\Gamma = \lambda_3$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

A) Να αποδείξετε ότι  $R = 2$ .

B) Να αποδείξετε ότι η χορδή  $A\Gamma$  είναι διάμετρος του κύκλου.

Γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου  $\widehat{A\Delta B}$  και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.



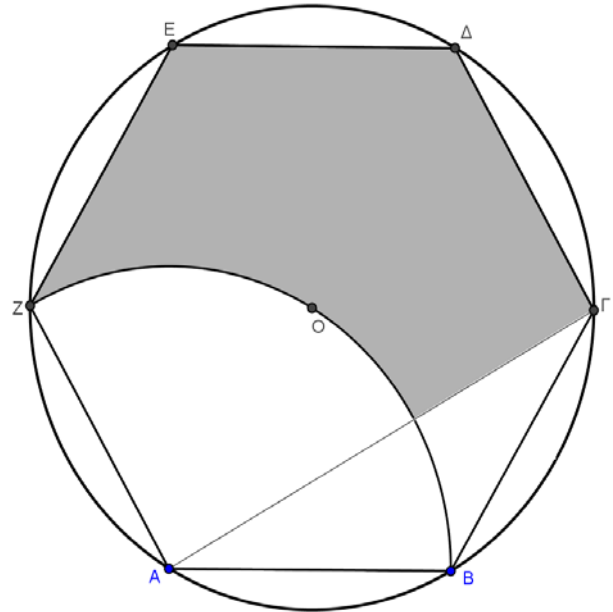
**ΒΣ/66.** Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται το κανονικό εξάγωνο  $AB\Gamma\Delta EZ$  εγγεγραμμένο στον κύκλο  $(O, R)$  και ο κυκλικός τομέας με κέντρο το  $A$  και αντίστοιχο τόξο  $BZ$ .

Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας  $R$  :

A) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το εμβαδόν του εξαγώνου.

B) Την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μέρους του παραπάνω σχήματος

Γ) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του παραπάνω σχήματος.



**ΒΣ/67.** Στο επόμενο σχήμα δίνεται το

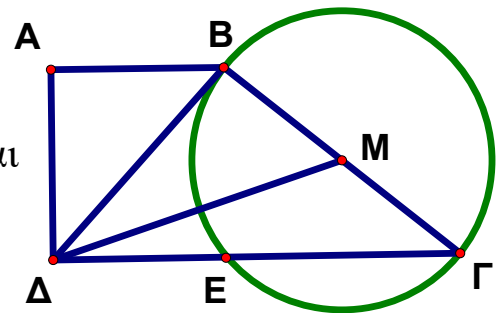
τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB=5$ ,  $\Gamma\Delta=13$  και  $(AB\Gamma\Delta)=54$ .

Ο κύκλος διαμέτρου  $B\Gamma$  έχει κέντρο το  $M$  και τέμνει τη  $\Gamma\Delta$  στο  $E$ .

A) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπέζιου.

B) Να υπολογίσετε την  $\Delta M$ .

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta MB$ .



**ΒΣ/68.** Σε κύκλο  $(O, R)$  είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά  $AB = 15$ . Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα  $R$  του κύκλου .

β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου  $(O, R)$  .

γ) το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου  $AB\Gamma$  .

δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο .

(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2000)

**ΒΣ/69.** Δίνεται ημικύκλιο κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $AB = 2R$ . Στην προέκταση του  $AB$  προς το  $B$ , θεωρούμε ένα σημείο  $\Gamma$ , τέτοιο ώστε  $B\Gamma = 2R$ . Από το  $\Gamma$  φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $\Gamma E$  του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο  $A$  τέμνει την προέκταση του τμήματος  $\Gamma E$  στο σημείο  $\Delta$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $\Gamma E = 2\sqrt{2} \cdot R$ .

β. Να αποδείξετε ότι  $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma \Delta \cdot \Gamma E$

γ. Να υπολογίσετε το τμήμα  $\Gamma \Delta$  συναρτήσει του  $R$ .

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων  $B\Gamma E$  και  $A\Delta E$  συναρτήσει του  $R$ .

(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2001)

**ΒΣ/70.** α) Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά  $40\sqrt{2}$  μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές του τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

β) Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μια κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση

δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 1999)

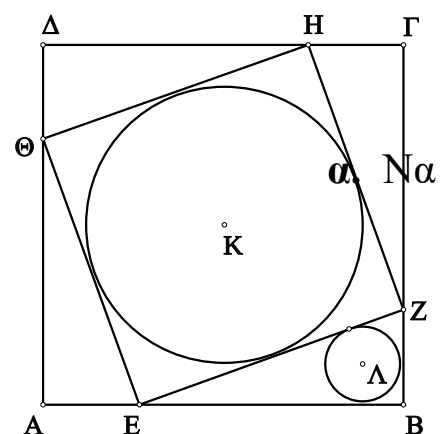
**ΒΣ/71.** Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $7\text{ cm}$ , εγγράφουμε τετράγωνο  $EZH\Theta$  έτσι, ώστε:

$$AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = 3\text{ cm}$$

βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου  $EZH\Theta$ .

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $EBZ$  και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ( $\Lambda, \rho$ ) στο τρίγωνο  $EBZ$  είναι  $\rho = 1\text{ cm}$ .

γ. Εάν  $(K, R)$  είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο



τετράγωνο ΕΖΗΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ,Ρ) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ,ρ). (4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2002)

**ΒΣ/72.** Α1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R), αν και μόνο αν  $\Delta_{(O,R)}^P > 0$  όπου  $\Delta_{(O,R)}^P$  η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R).

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ , αν και μόνο αν  $\hat{A} < 90^\circ$ .

γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \beta$ .

δ. Σε κύκλο (Ο, R), το εμβαδόν Ε του κυκλικού τομέα  $\mu^\circ$  δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$ .

ε. Το 1<sup>ο</sup> θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο  $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$ .

**Β.α.** Να εγγραφεί κανονικό εξαγώνο σε κύκλο (Ο, R) και να αποδείξετε ότι  $\lambda_6 = R$ , όπου  $\lambda_6$  η πλευρά του εξαγώνου.

β. Να αποδείξετε ότι  $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$  όπου  $\alpha_6$  το απόστημα του εξαγώνου.

(1<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2002)

**ΒΣ/73.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με μήκη πλευρών  $AB = R$  και

$AG = R\sqrt{3}$ . Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και  $(\Gamma, R\sqrt{3})$ . Να υπολογίσετε :

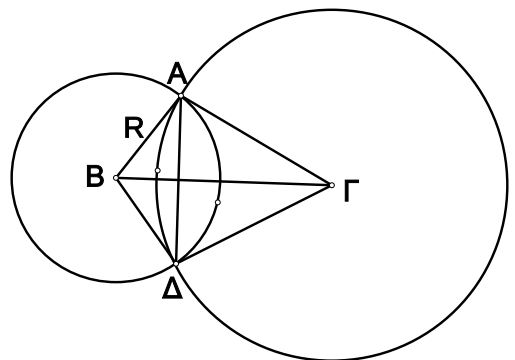
Α. Το μήκος της πλευράς ΒΓ συναρτήσει του R.

Β. Τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

Γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ συναρτήσει του R.

Δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R.

(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2004)



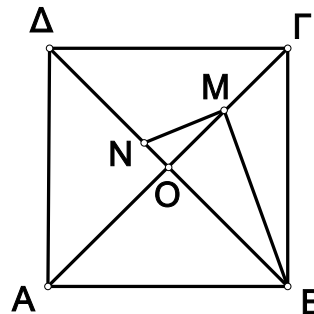
## Ασκήσεις Επανάληψης

**ΒΥ/01.** Έστω τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $4\alpha\sqrt{2}$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Αν  $M$  το μέσο του  $O\Gamma$  και  $ON = \frac{1}{4}O\Delta$ :

A) Υπολογίστε τα  $MN$  και  $MB$

B) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $MNB$  είναι ορθογώνιο.



**ΒΥ/02.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$  με  $B\Gamma = \alpha$  και το ύψος του  $A\Delta$  ώστε  $A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$ .

Υπολογίστε τα:  $\Delta B, \Delta\Gamma, AB, A\Gamma$  καθώς και τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

**ΒΥ/03.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 2\sqrt{13}$ .

Υπολογίστε την πλευρά  $B\Gamma$ .

**ΒΥ/04.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε  $AB = 12, B\Gamma = 20$  και η διάμεσος  $\Gamma M = 4\sqrt{17}$ , βρείτε την πλευρά  $A\Gamma$  καθώς και το είδος του τριγώνου.

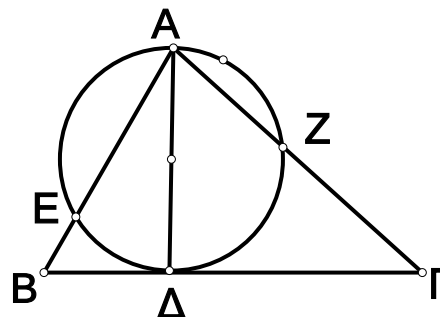
**ΒΥ/05.** Αν  $AB = 15$ ,  $A\Gamma = 20$  και  $B\Gamma = 25$ :

A) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

B) Υπολογίστε τα  $B\Delta, \Delta\Gamma$ .

Γ) Υπολογίστε το  $A\Delta$ .

Δ) Υπολογίστε τα  $BE, \Gamma Z$ .

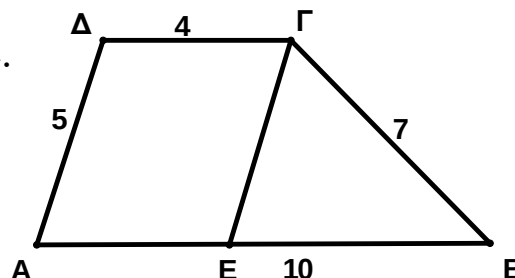


**ΒΥ/06.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = 10$ ,  $B\Gamma = 7$ ,  $\Gamma\Delta = 4$ ,  $\Delta A = 5$ . Η παράλληλη από το σημείο  $\Gamma$  προς την  $A\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $E$ . Να βρείτε.

A) Το εμβαδόν του τριγώνου  $\Gamma EB$ .

B) Το εμβαδόν του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$

Γ) Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο  $\Gamma EB$ .



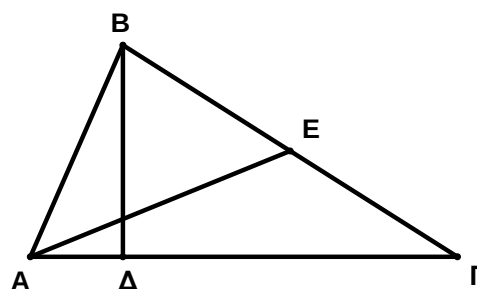
**ΒΥ/07.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$

με  $\alpha = 2\gamma$  και  $\beta = \gamma\sqrt{7}$ .

A) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

B) Αν  $B\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου να

δείξετε ότι  $A\Delta = \frac{2\gamma\sqrt{7}}{7}$



Γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών:  $\frac{(A\Delta B)}{(AB\Gamma)}$

**ΒΥ/08.** Οι πλευρές ενός τριγώνου  $AB\Gamma$

είναι:  $AB = 3$ ,  $B\Gamma = 5$ ,  $A\Gamma = 7$ .

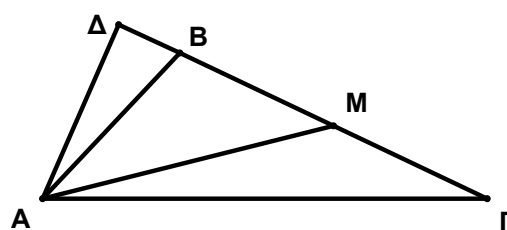
A) Να δείξετε ότι η γωνία B είναι αμβλεία.

B) Να υπολογίσετε την προβολή  $B\Delta$  της πλευράς  $AB$  πάνω στη  $B\Gamma$ .

Γ) Να υπολογίσετε τη γωνία B.

Δ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



**ΒΥ/09.** Σε κύκλο  $(O,R)$  θεωρούμε διαδοχικά

$A, B, \Gamma$  τέτοια ώστε  $AB=R$ ,  $A\Gamma = R\sqrt{3}$ , και  $B\Gamma=2R$ .

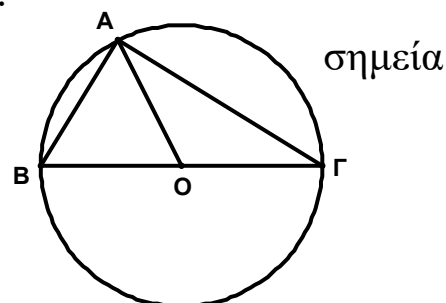
A) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

B) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Γ) Να δείξετε ότι η γωνία  $AOB$  είναι  $60^\circ$

Δ) Να βρεθούν τα μήκη των τόξων  $AB, B\Gamma, \Gamma A$

Ε) Να βρεθούν τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων που ορίζει το τρίγωνο στον κύκλο.



**ΒΥ/10.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με

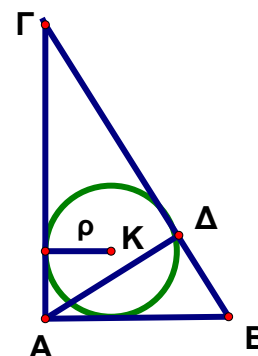
$\beta = 16$ ,  $\gamma = 12$  και  $A\Delta = \upsilon_\alpha = 4,8$ .

A) Να υπολογίσετε την πλευρά  $\alpha$ .

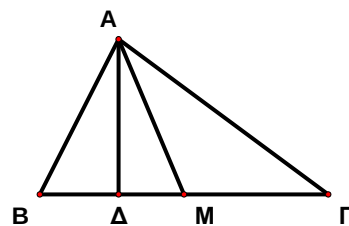
B) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Γ) Το εμβαδόν του.

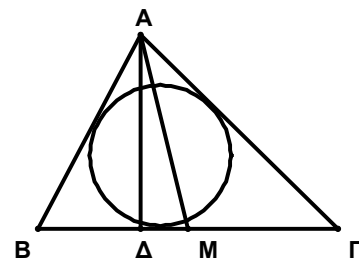
Δ) Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου.



**ΒΥ/11.** Αν στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι:  $\hat{B} < 90^\circ$   
 $B\Gamma = 12$ ,  $AB = 5$  και  $B\Delta = 3$ , όπου  $A\Delta$  το ύψος,  
 Υπολογίστε την  $A\Gamma$ , το είδος του τριγώνου,  
 καθώς και τα:  $M\Delta$ ,  $AM$ , και  $A\Delta$ .

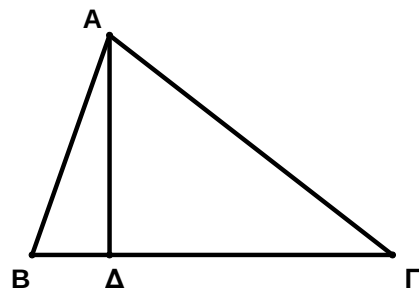


**ΒΥ/12.** Έστω στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $AM$  η  
 διάμεσός του και  $A\Delta$  το ύψος του.  
 Αν  $AB = 7$ ,  $A\Gamma = 9$  και  $B\Gamma = 8$ :  
 Α) Υπολογίστε τα:  $B\Delta$ ,  $M\Delta$ ,  $A\Delta$ ,  $AM$ .  
 Β) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
 Γ) Υπολογίστε το εμβαδόν του εγγεγραμμένου  
 κύκλου αφού δείξετε ότι η ακτίνα του είναι:  $\rho = \sqrt{5}$ .



Δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου που βρίσκεται εκτός του κύκλου.

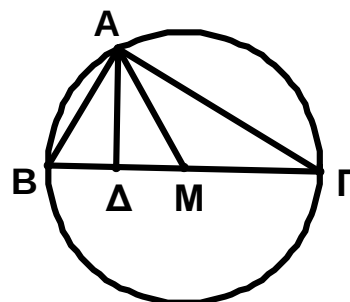
**ΒΥ/13.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος  
 του  $A\Delta$ , με  $AB = 13$ ,  $A\Gamma = 15$  και  $B\Gamma = 14$ .  
 Α) Βρείτε το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
 Β) Βρείτε την προβολή της  $AB$  πάνω στη  $B\Gamma$ .  
 Γ) Βρείτε το ύψος  $A\Delta$ .  
 Δ) Βρείτε το εμβαδόν του  $AB\Gamma$  και την ακτίνα  
 του εγγεγραμμένου του κύκλου.



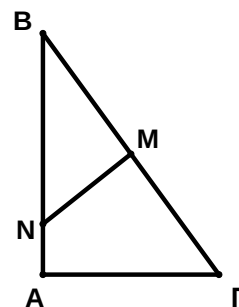
**ΒΥ/14.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $(AB\Gamma) = 24$  και  
 ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου  $\rho = 2$ .

Α) Βρείτε την πλευρά  $A\Gamma$ . Β) Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.  
 Γ) Βρείτε τη διάμεσο  $BM$ . Δ) Βρείτε το ύψος  $A\Delta$ .  
 Ε) Βρείτε το εμβαδόν του μέρους του τριγώνου που βρίσκεται εκτός του  
 εγγεγραμμένου κύκλου.

**ΒΥ/15.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 12$ ,  
 $A\Gamma = 16$ ,  $B\Gamma = 20$   
 Α) Δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.  
 Β) Βρείτε τη διάμεσο  $AM$ . Γ) Βρείτε το ύψος  $A\Delta$ .  
 Δ) Βρείτε το εμβαδόν του μέρους του  
 περιγεγραμμένου κύκλου που βρίσκεται εκτός του  
 τριγώνου.



**ΒΥ/16.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 8$ ,  $A\Gamma = 6$  και  $B\Gamma = 10$ . Στο μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρω  $MN \perp B\Gamma$  και είναι  $(ANM\Gamma) = 16$ .



A) Δείξτε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

B) Υπολογίστε το  $BN$ .

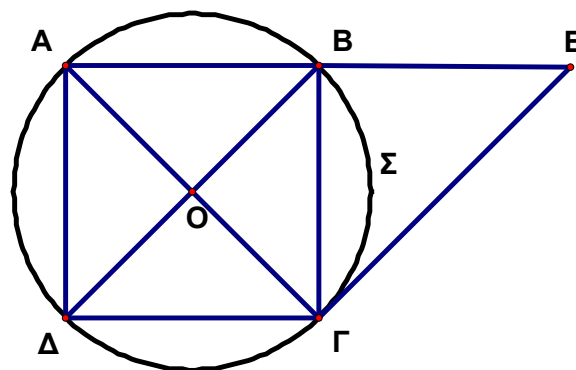
Γ) Βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου στο τριγ.  $AB\Gamma$  κύκλου.

Δ) Βρείτε το εμβαδόν του περιγεγραμμένου στο τριγ.  $AB\Gamma$  κύκλου.

**ΒΥ/17.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$

εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 2.

Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  κατά το ίσο τμήμα  $BE$  ( $AB = BE$ ).



Δ1) Υπολογίστε την πλευρά του τετραγώνου

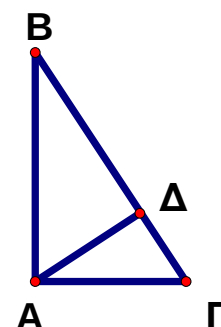
Δ2) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο  $AE\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

Δ2) Υπολογίστε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος  $B\Sigma\Gamma$ .

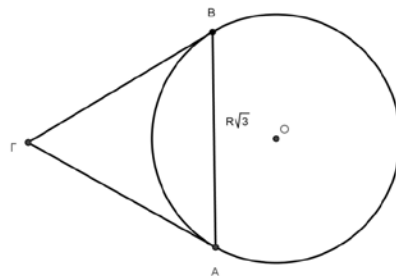
Δ3) Υπολογίστε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τα ευθ. τμήματα  $BE$ ,  $E\Gamma$  και το τόξο  $\widehat{B\Sigma\Gamma}$ .

**ΒΥ/18.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$  με  $AB = 20$  και  $(AB\Gamma) = 150$ .

Να υπολογίσετε τα  $A\Gamma, B\Gamma, A\Delta, B\Delta, (AB\Delta)$ .



**ΒΥ/19.** Στο παρακάτω σχήμα η χορδή AB του κύκλου (O, R) έχει μήκος  $R\sqrt{3}$  και ΑΓ, ΓΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα στα σημεία Α, Β που τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να βρείτε την περίμετρο του μεικτογράμμου τριγώνου ΑΓΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΓΒ είναι

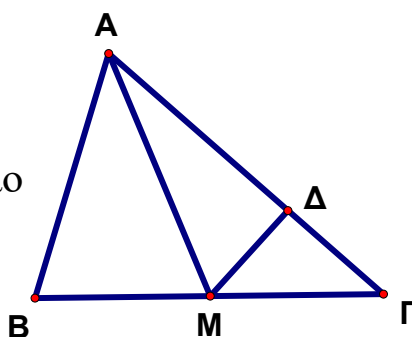
$$R^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

**ΒΥ/20.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 2\sqrt{3}$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ .

Α) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Δ σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = \frac{1}{3}ΑΓ$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{(ΜΔΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{6}$ .

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΜΔ.

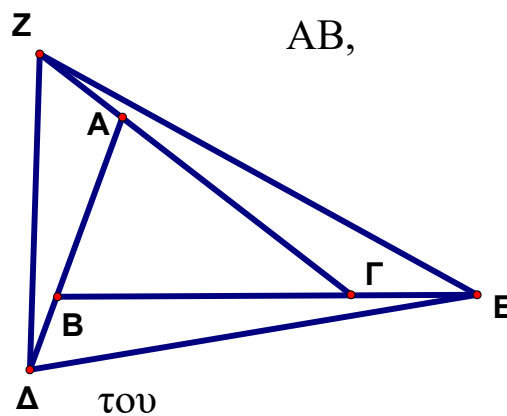


**ΒΥ/21.** Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα με  $B\Delta = \frac{1}{3}AB$ ,  $\Gamma E = \frac{1}{3}B\Gamma$

$AZ = \frac{1}{3}\Gamma A$ .

Α) Υπολογίστε τα εμβαδά των τριγώνων ΒΔΕ, ΓΕΖ, ΑΖΔ συναρτήσει του εμβαδού τριγώνου ΑΒΓ.

β) Δείξτε ότι  $(\Delta EZ) = \frac{7}{3}(AB\Gamma)$ .





**ΒΥ/22.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς  $\alpha$  εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου  $O$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$

θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $EG = \frac{\alpha}{3}$ .

Η προέκταση της  $AE$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $Z$

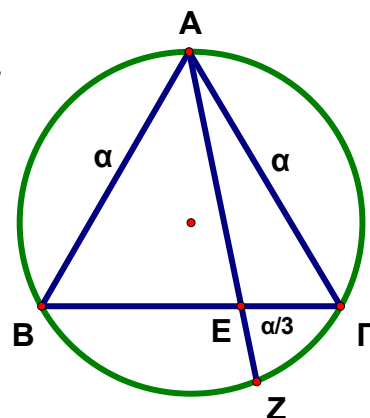
με  $EZ = \frac{2\alpha\sqrt{7}}{21}$

A) Να αποδείξετε ότι:

A1)  $AE = \frac{\alpha\sqrt{7}}{3}$

A2)  $(AEB) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{6}$

B) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $\Gamma EZ$ .



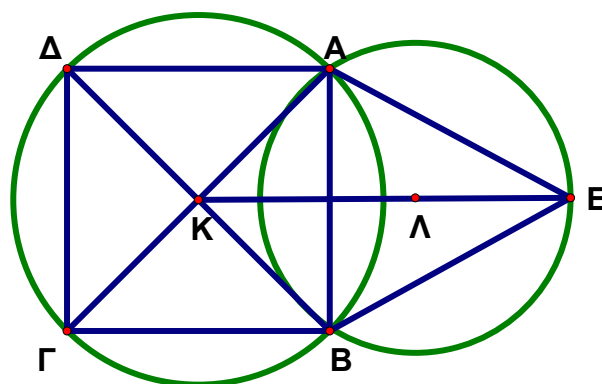
**ΒΥ/23.** Δύο κύκλοι με κέντρα  $K$  και  $\Lambda$  έχουν κοινή χορδή  $AB = \alpha$  και τα κέντρα τους βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας  $AB$ .

Αν στον κύκλο  $K$  η  $AB$  είναι πλευρά τετραγώνου και στον κύκλο  $\Lambda$  η  $AB$  είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου, υπολογίστε.

α) τις ακτίνες των κύκλων

β) τη διάκεντρο  $K\Lambda$

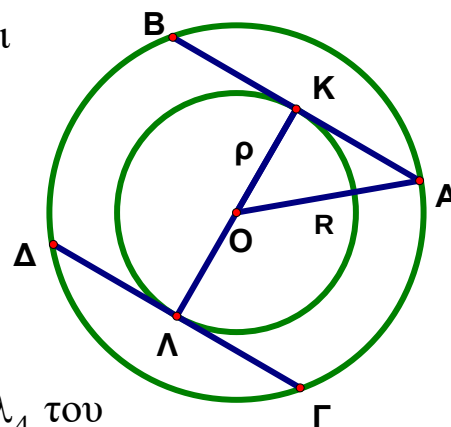
γ) το εμβαδό του κοινού μέρους των δύο κύκλων.



**ΒΥ/24.** Δίνονται ομόκεντροι κύκλοι  $(O, R)$  και  $(O, \rho)$  με  $\rho < R$  και τέτοιοι ώστε ο μικρός δίσκος και ο σχηματιζόμενος δακτύλιος να είναι ισοδύναμοι.

α) Δείξτε ότι  $\rho = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .

β) Αν μία χορδή του μεγάλου κύκλου εφάπτεται στον μικρό, δείξτε ότι θα ισούται με την πλευρά  $\lambda_4$  του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο  $(O, R)$ .



γ) Αν  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  δύο παράλληλες χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό, δείξτε ότι το εμβαδό του μέρους του δακτυλίου που περιέχεται μεταξύ των χορδών αυτών ισούται με  $R^2$ .

**ΒΥ/25.** Στις πλευρές  $AB$  και  $AG$  τριγώνου  $AB\Gamma$

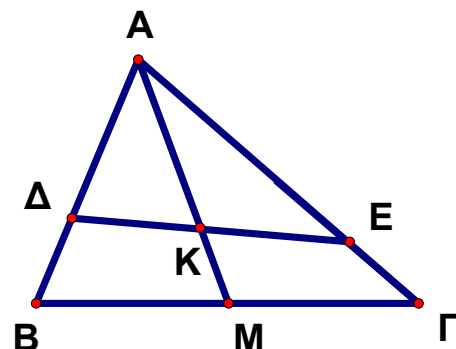
παίρνουμε τμήματα  $A\Delta = \frac{2}{3}AB$  και

$AE = \frac{3}{4}AG$  αντίστοιχα. Αν η  $\Delta E$  τέμνει

τη διάμεσο  $AM$  στο  $K$ , δείξτε ότι:

A)  $(A\Delta E) = (B\Delta E\Gamma)$

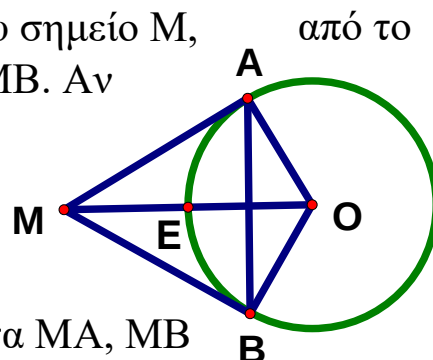
B)  $(A\Delta K) = (KM\Gamma E)$ .



**ΒΥ/26.** Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και εξωτερικό του σημείο  $M$ , από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$ . Αν  $(MAB) = 3(OAB)$ , τότε:

A) Να δείξετε ότι  $MO = 2R$  και  $AB = R\sqrt{3}$ .

B) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$ , την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$ ,  $MB$



και το κυρτογώνιο τόξο  $AEB$ .

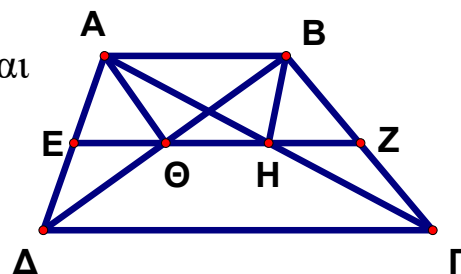
**ΒΥ/27.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ . Αν  $E, Z$  τα μέσα των  $AD, B\Gamma$  αντίστοιχα

και η  $EZ$  τέμνει τις  $B\Delta$  και  $A\Gamma$  στα  $\Theta$  και  $H$  αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι:

A)  $(A\Theta\Delta) = (AHB)$

B)  $(A\Theta\Delta) + (BH\Gamma) = (AB\Gamma)$

Γ)  $(\Gamma\Delta EZ) - (ABZE) = (A\Gamma\Theta)$ .



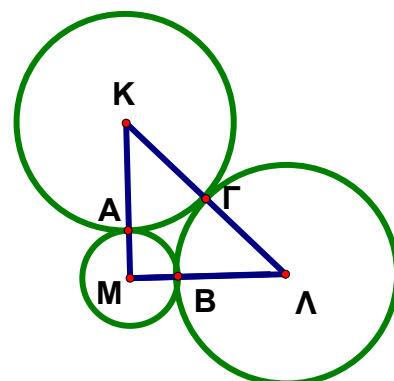
**ΒΥ/28.** Τρεις κύκλοι  $(K, R_1)$ ,  $(\Lambda, R_2)$ ,  $(M, R_3)$

εφάπτονται εξωτερικά στα σημεία  $A, B, \Gamma$  και

είναι:  $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$  και  $R_3 = 2 - \sqrt{2}$ .

A) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ορθογώνιο.

B) Να βρείτε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$



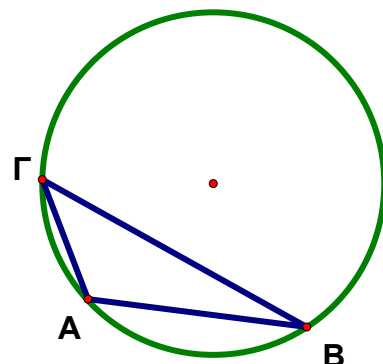
Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**ΒΥ/29.** Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} > 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $A\Gamma = 3$  και  $(AB\Gamma) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ .

A) Να υπολογίσετε την γωνία  $\hat{A}$ .

B) Υπολογίστε την πλευρά  $B\Gamma$ .

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

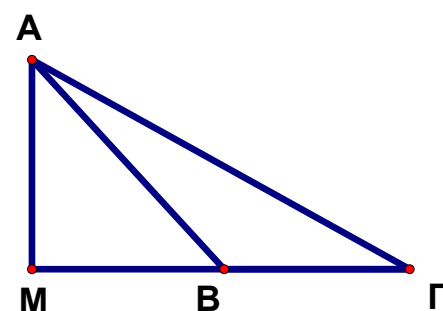


**ΒΥ/30.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\beta = 2\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 1$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\gamma = \sqrt{7}$ .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο.

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς  $AB$  στην πλευρά  $B\Gamma$ .

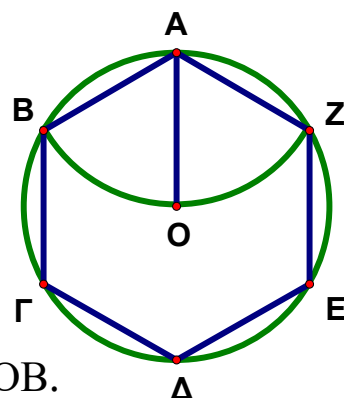


**ΒΥ/31.** Κανονικό εξάγωνο  $AB\Gamma\Delta EZ$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, R)$ . Με κέντρο την κορυφή  $A$  και ακτίνα  $R$  γράφουμε τόξο  $\widehat{BOZ}$  μέσα στο εξάγωνο. Να υπολογίσετε:

A) την γωνία  $\hat{BAZ}$ .

B) το εμβαδόν του εξαγώνου.

Γ) το εμβαδόν του μεικτόγραμμου πενταγώνου  $B\Gamma\Delta EZOB$ .

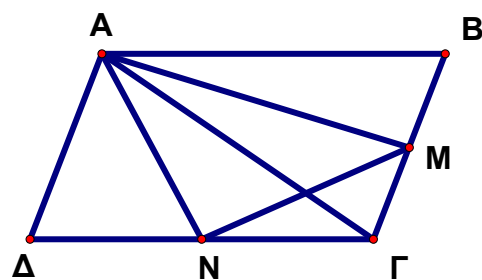


**ΒΥ/32.** Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $M, N$  των πλευρών  $B\Gamma, \Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

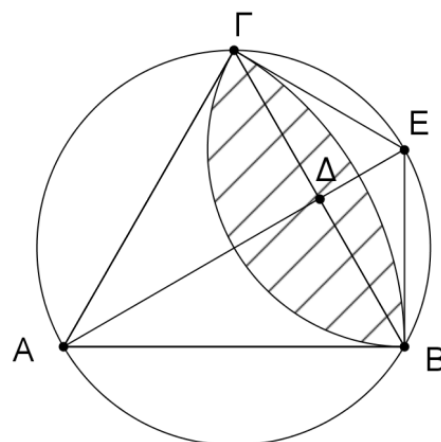
A)  $(AM\Gamma) = (AN\Gamma) = 14 (AB\Gamma\Delta)$ .

B)  $(\Gamma MN) = 18 (AB\Gamma\Delta)$ .

Γ)  $(AMN) = 38 (AB\Gamma\Delta)$ .



**ΒΥ/33.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά  $a$  και ο περιγεγραμμένος του κύκλος. Από το  $A$  φέρνουμε κάθετη στη  $B\Gamma$  που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Delta$  και τον κύκλο στο  $E$  με  $\Delta E = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .



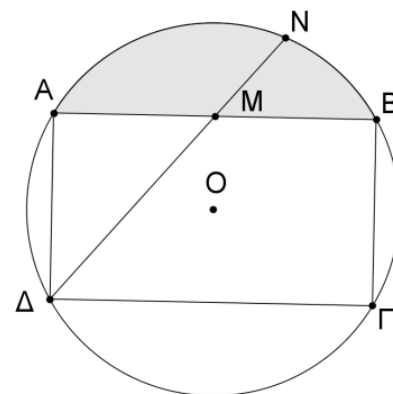
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $a$  την περίμετρο και το εμβαδόν του

περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

β) Υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $a$  την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ABE\Gamma$

γ) Με κέντρα  $A$  και  $E$  και ακτίνες αντίστοιχα  $AB$  και  $EB$  γράφουμε τόξα χορδής  $B\Gamma$ . Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $a$  το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

**ΒΥ/34.** Σε κύκλο  $(O, R)$  είναι εγγεγραμμένο ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρά  $B\Gamma = R$ . Αν το σημείο  $M$  είναι το μέσο της  $AB$  και η  $\Delta M$  τέμνει το τόξο  $AB$  στο σημείο  $N$ , να υπολογίσετε



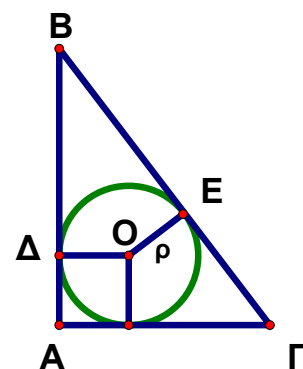
α) το μήκος του τμήματος  $\Delta M$

β) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζει η χορδή  $AB$  με το τόξο  $ANB$ .

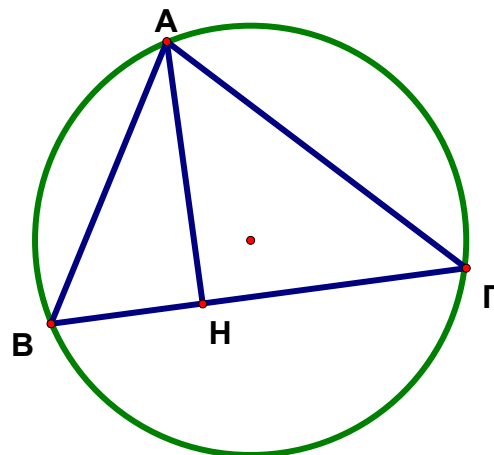
**ΒΥ/35.** Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 8$  καθώς επίσης ο εγγεγραμμένος σ' αυτό κύκλος  $(O, \rho)$ , ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές  $AB$ ,  $B\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου.

β) Το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου  $O\Delta E$ .



**ΒΥ/36.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , οξυγώνιο, εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, R)$  του οποίου η πλευρά  $AB$  είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου και η  $A\Gamma$  είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου στον κύκλο αυτό. Έστω  $AH$  το ύψος του  $AB\Gamma$ .



A) Να δείξετε ότι  $\hat{A} = 75^\circ$ .

B) Να δείξετε ότι  $AH = \frac{R\sqrt{6}}{2}$ .

Γ) Να υπολογίσετε την πλευρά  $B\Gamma$  συναρτήσει του  $R$ .

Δ) να βρείτε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των  $AH$ ,  $H\Gamma$  και τόξου  $A\Gamma$  στο οποίο βαίνει η γωνία  $B$ , συναρτήσει του  $R$ .

**ΒΥ/37.** Αν  $AB\Gamma\Delta$  ορθογώνιο με  $B\Gamma = \rho$ :

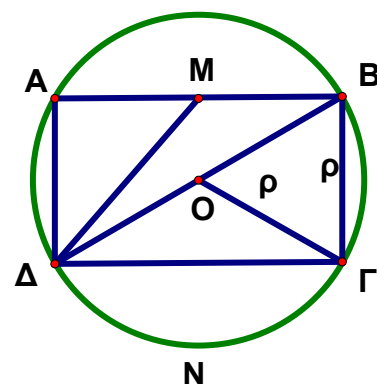
A) Βρείτε τη  $\Delta\Gamma$ .

B) Βρείτε τη  $\Delta M$ .

Γ) Βρείτε τη γωνία  $\Delta\hat{O}\Gamma$ .

Δ) Βρείτε το εμβαδόν του κυκλ. τομέα  $O.\widehat{\Delta N\Gamma}$ .

E) Βρείτε το εμβαδόν του κυκλ. τμήματος που ορίζεται από τη χορδή  $\Delta\Gamma$  και το τόξο  $\widehat{\Delta N\Gamma}$ .



## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Να σημειώσετε δίπλα σε κάθε πρόταση που δίνεται παρακάτω αν είναι Σωστή ή Λάθος.

(Οι ερωτήσεις που έχουν στον αριθμό τους το σύμβολο ● είναι εκτός ύλης)

1. Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} > 90^\circ$ , ισχύει πάντα ότι:  
 $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ .
2. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει ότι  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ , τότε αυτό είναι αμβλυγώνιο.
3. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α, τότε ισχύει ότι  $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ .
4. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει ότι  $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ , αυτό είναι πάντοτε οξυγώνιο.
5. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ , με την πλευρά  $\beta$  να είναι η μεγαλύτερη πλευρά του, ισχύει ότι  $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ , τότε αυτό είναι οξυγώνιο.
- 6. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, που έχει διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΔ, ισχύει ότι  
 $|AG^2 - AB^2| = 2BG \cdot MD$ .
- 7. Για τη διάμεσο μα ενός τριγώνου ΑΒΓ που έχει πλευρές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  ισχύει  
ο τύπος:  $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{2}$
- 8. Το 1ο Θεώρημα Διαμέσων για ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  δίνεται από τον τύπο:  $\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}$ , όπου  $\mu_\gamma$  είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά  $\gamma$ .
- 9. Αν το σημείο Ρ είναι εσωτερικό ενός κύκλου (Ο, R) και  $OP = \delta < R$ , τότε η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο είναι ίση με  $\delta^2 - R^2$
10. Δυο ισεμβαδικά τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα μεταξύ τους.
11. Η διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά τρίγωνα.
12. Αν ένα ύψος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά τρίγωνα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
13. Αν οι πλευρές ενός τετραγώνου αυξηθούν κατά 4 cm η κάθε μια, τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 16 cm<sup>2</sup>.
14. Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2α, είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς α.

15. Ρόμβος με διαγώνιες  $\delta_1, \delta_2$  , είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές  $\delta_1, \delta_2$  .
16. Η ευθεία που συνδέει τα μέσα των δυο βάσεων ενός τραπεζίου το διαιρεί σε δυο ισοδύναμα τραπέζια.
17. Δυο κανονικά πεντάγωνα είναι όμοια.
18. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες, είναι πάντα κανονικό.
19. Σε ένα κανονικό  $n$  – γωνο, η γωνία του και η κεντρική του γωνία, είναι συμπληρωματικές.
20. Ο λόγος των μηκών δυο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτινών τους.
21. Ακτίνα ενός κανονικού πολυγώνου λέμε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του.
22. Ο λόγος των εμβαδών δυο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των ακτινών τους.
23. Ο περιγεγραμμένος και ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι κύκλοι.
24. Το απόστημα ενός ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, είναι ίσο με το μισό της ακτίνας του.
25. Το απόστημα ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο, ισούται με την πλευρά του εξαγώνου.
26. Δυο κυκλικοί τομείς του ίδιου κύκλου που αντιστοιχούν σε ίσα τόξα έχουν ίσα εμβαδά.
27. Το μήκος του τόξου ενός ακτινίου, είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου.
28. Το τόξο  $\mu^\circ$  ενός κύκλου ακτίνας  $2\rho$ , έχει το ίδιο μήκος με το τόξο  $2\mu^\circ$  ενός κύκλου ακτίνας  $\rho$ .
29. Κυκλικός τομέας  $1 \text{ rad}$  ενός κύκλου ακτίνας  $\rho$ , έχει εμβαδόν  $E = \frac{\pi\rho}{180}$ .
30. Το μήκος τόξου  $60^\circ$  σε κύκλο ακτίνας  $\rho$  είναι  $S = \frac{\pi\rho}{3}$ .
31. Το εμβαδόν ενός κυκλ. δίσκου ακτίνας  $\rho$ , δίνεται από τον τύπο  $E = \pi\rho^2$
32. Το μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $\rho$  δίνεται από τον τύπο  $L = \pi\rho$ .
33. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.
34. Ένα κυρτό πολύγωνο που έχει όλες του τις γωνίες ίσες είναι πάντα κανονικό.
35. Η γωνία ενός κανονικού  $n$ -γώνου και η κεντρική του γωνία είναι ίσες μεταξύ τους.
36. Ένα κυρτό πολύγωνο είναι πάντα εγγράψιμο σε κύκλο.
37. Αν ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν  $4 \text{ cm}^2$  τότε το τετράγωνο που έχει

διπλάσια πλευρά έχει εμβαδόν 8.

38. Αν  $\hat{\varphi}_v$  είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού  $v$ -γώνου, τότε

$$\hat{\varphi}_v = 360^\circ - \frac{180^\circ}{v}.$$

39. Το απόστημα ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισούται με το μισό της πλευράς του.

40. Αν σε τρίγωνο ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα τότε είναι ορθογώνιο.

41. Ένα πολύγωνο με ίσες πλευρές που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι κανονικό.

42. Το μήκος ενός κύκλου με ακτίνα 1 είναι  $\pi$ .

43. Ο λόγος του μήκους κύκλου προς την ακτίνα του ισούται με  $\pi$ .

•44. Αν ένα σημείο είναι εσωτερικό ενός κύκλου τότε η δύναμή του ως προς τον κύκλο αυτό είναι αρνητική.

•45. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  οι πλευρές τριγώνου  $AB\Gamma$  τότε η διάμεσός του δίνεται από

$$\text{τον τύπο: } \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 + \alpha^2}{4}.$$

46. Ο τύπος  $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta_{\mu A}$  δίνει το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

47. Αν ένας κύκλος έχει διπλάσια ακτίνα από έναν άλλο, τότε θα έχει και διπλάσιο εμβαδόν.

48. Ο τύπος  $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$  δίνει το εμβαδόν ρόμβου με διαγωνίους  $\delta_1, \delta_2$ .

49. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με ύψος  $A\Delta$  ισχύει:  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

•50. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  οι πλευρές τριγώνου  $AB\Gamma$  τότε η διάμεσός του δίνεται από

$$\text{τον τύπο: } \mu_\alpha^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}.$$

51. Το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  με ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου  $\rho$ ,

$$\text{δίνεται από τον τύπο: } E = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \rho$$

52. Το εμβαδόν τεταρτοκυκλίου δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{\pi\rho^2}{2}$ .

53. Σε τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  με  $\hat{A} = 30^\circ$  και  $\hat{A}' = 150^\circ$  ισχύει:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{A'B' \cdot A'\Gamma'}.$$

54. Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας  $\rho$  δίνεται από τον τύπο:  $E = 2\pi\rho^2$ .

55. Η διχοτόμος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα μέρη.

56. Αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω σε κύκλο, τότε η δύναμή του ως προς



αυτό τον κύκλο είναι μηδέν.

57. Αν ένα τετράγωνο έχει τη μισή πλευρά από ένα άλλο τετράγωνο, τότε θα έχει και το μισό εμβαδόν.

58. Το ύψος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα.

59. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου του επί το ύψος του.

60. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά τότε είναι ίσα.

61. Ισχύει  $L = \pi\delta$ , όπου  $L$  το μήκος του κύκλου και  $\delta$  η διάμετρός του.

62. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:  $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ .

63. Το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O,\rho)$  είναι  $\alpha_4 = \rho\sqrt{2}$

64. Η διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα μέρη.

65. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι:  $\hat{A} < 90^\circ$ , τότε:  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ .

66. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές 5,12,13 είναι ορθογώνιο.

67. Το ορθογώνιο με διαστάσεις 2 και 8 είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς 4.

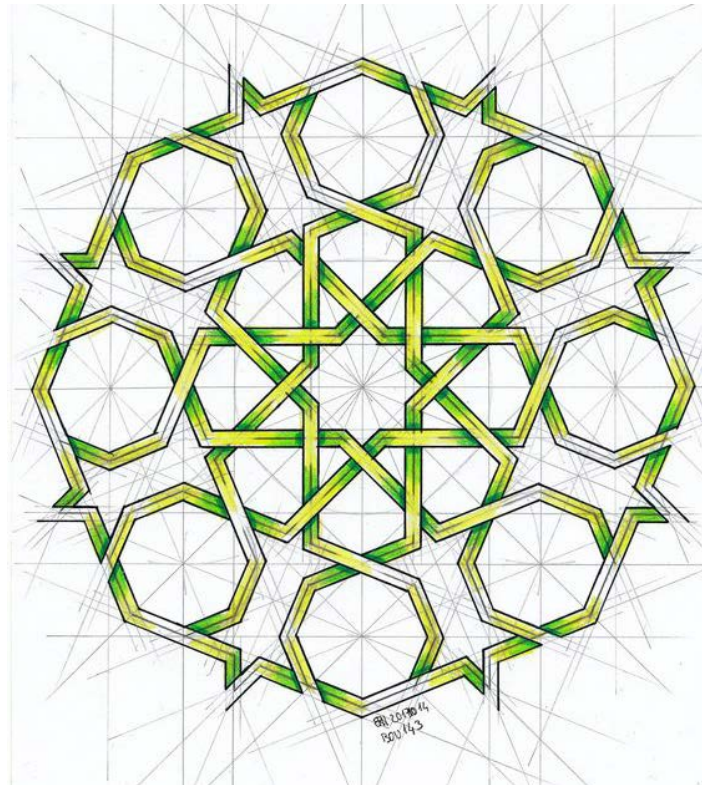
68. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η ισότητα:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$  εκφράζει το νόμο συνημιτόνων.

69. Ο τύπος  $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$  εκφράζει το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  με ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου  $R$ .

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| Σ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  | Σ  | Λ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  | Σ  |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Λ  | Λ  | Σ  | Σ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  | Σ  | Λ  | Σ  | Σ  |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| Λ  | Σ  | Σ  | Σ  | Λ  | Σ  | Σ  | Λ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  |
| 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| Λ  | Σ  | Σ  | Σ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  | Λ  | Σ  | Λ  | Σ  |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| Σ  | Λ  | Σ  | Λ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  | Λ  | Λ  | Σ  | Λ  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |
| Σ  | Λ  | Σ  | Σ  | Λ  | Σ  | Σ  | Λ  | Σ  |    |    |    |

# Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού



## Διανύσματα

"Αυτοί που θα δουν καθαρά την αλήθεια των μαθηματικών, θα μπορέσουν να θαυμάσουν το μεγαλείο και τη δύναμη της φύσης, σ' αυτή τη διπλή απειρία που μας περιτριγυρίζει από παντού και να μάθουν από αυτή τη θαυμαστή θεώρηση πώς να γνωρίσουν τον εαυτό τους, βλέποντάς τον τοποθετημένο ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα κίνησης, ανάμεσα σε μια απειρία και ένα τίποτα χρόνου.

Έτσι θα μπορέσουν να μάθουν να αξιολογούν δίκαια τον εαυτό τους και να σχηματίζουν συλλογισμούς που να αξίζουν εν τέλει περισσότερο από όλες τις μαθηματικές γνώσεις".

Blaise Pascal

**BH/01.** Το σημείο M είναι μέσο του τμήματος AB αν και μόνο αν  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$  .

**BH/02.** Αν AD , BE , ΓZ διάμεσοι του τριγώνου ABΓ δείξτε ότι  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \vec{0}$  .

**BH/03.** Αν M,N τα μέσα των πλευρών AB και AΓ τριγώνου ABΓ , να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$  .

**BH/04.** Αν M , N τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ τετραπλεύρου ABΓΔ δείξτε ότι: A)  $\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$  B)  $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$  .

**BH/05.** Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ . Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$  .

**BH/06.** Αν ABΓΔ και A'B'Γ'D' δύο παραλληλόγραμμα με κέντρα K και K' αντίστοιχα, να δείξετε ότι:  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} + \overrightarrow{\Delta\Delta'} = 4\overrightarrow{KK'}$  .

**BH/07.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και Δ,Ε,Ζ τα μέσα των AB,ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα .Για κάθε σημείο M του επιπέδου να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = 4 \cdot \overrightarrow{MZ}$  .

**BH/08.** Αν K και Λ τα μέσα των διαγωνίων AΓ και ΒΔ τετραπλεύρου ABΓΔ τότε ισχύει :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 4 \cdot \overrightarrow{K\Lambda}$  .

**BH/09.** Αν A,B,Γ,Δ σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{BE}$  να δείξετε ότι τα σημεία A,B συμπίπτουν.

**BH/10.** Αν A,B,M,P σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  να δείξετε ότι τα σημεία M,P συμπίπτουν.

**BH/11.** Αν A,B,Γ,Δ σημεία του επιπέδου , διαφορετικά μεταξύ τους , για τα οποία ισχύει  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$  , όπου O τυχαίο σημείο , δείξτε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα A,B,Γ,Δ είναι παραλληλόγραμμα .

**BH/12.** Δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου .

**BH/13.** Αν οι διαγώνιοι κυρτού τετραπλεύρου διχοτομούνται να δειχθεί ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα .

**BH/14.** Αν M το μέσο της διαγωνίου AΓ τετραπλεύρου ABΓΔ αποδείξτε ότι  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$  .

**BH/15.** Α) Αν P τυχαίο σημείο του επιπέδου ενός τριγώνου ABΓ , αποδείξτε ότι το διάνυσμα  $\vec{PA} + \vec{PB} - 2 \cdot \vec{PG}$  είναι σταθερό (ανεξάρτητο της θέσης του P).

Β) Αν A,B,Γ τυχαία σταθερά σημεία, δείξτε ότι το διάνυσμα  $\vec{\delta} = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MG}$  είναι ανεξάρτητο από τη θέση του M .

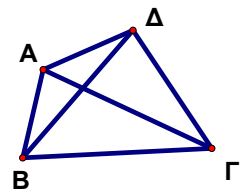
**BH/16.** Έστω τρίγωνο ABΓ και P τυχαίο σημείο του επιπέδου . Δείξτε ότι το διάνυσμα  $\vec{\delta} = 2 \cdot \vec{PA} - 5 \cdot \vec{PB} + 3 \cdot \vec{PG}$  είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου P, δηλαδή σταθερό .

Αποδείξτε το ίδιο αν ισχύει  $\vec{\nu} = \vec{PA} - 3 \cdot \vec{PB} + 2 \cdot \vec{PG}$  .

**BH/17.** Έστω τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ που ορίζονται από τις σχέσεις:  $\vec{BG} = 3 \cdot \vec{BD}$  ,  $\vec{GA} = 3 \cdot \vec{GE}$  και  $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{AZ}$  . Αποδείξτε ότι  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{GZ} = \vec{0}$  .

**BH/18.** Δίνονται τα σημεία A,B,Γ τέτοια που  $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{BG}$  . Αν M τυχαίο σημείο του επιπέδου , να αποδειχθεί ότι :  $\vec{MB} = \frac{1}{4}\vec{MA} + \frac{3}{4}\vec{MG}$  .

**BH/19.** Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB που τριχοτομείται από τα σημεία Γ και Δ και τυχαίο σημείο O εκτός του AB . Αν  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  ,  $\vec{OB} = \vec{\beta}$  , να εκφραστούν τα  $\vec{OG}$ ,  $\vec{OD}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  .

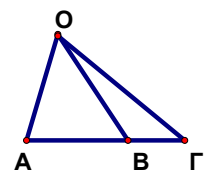


**BH/20.** Στο διπλανό σχήμα δείξτε ότι:

A)  $3 \cdot \vec{AG} + 2 \cdot \vec{BG} + 5 \cdot \vec{GD} = 3 \cdot \vec{AD} + 2 \cdot \vec{BD}$  .

B)  $7 \cdot \vec{AG} - 2 \cdot \vec{BD} + 5 \cdot \vec{DA} = 2 \cdot \vec{AB} + 7 \cdot \vec{DG}$  .

(Πάρτε σημείο αναφοράς το A)



**BH/21.** Αν  $2 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OB} = 5 \cdot \vec{OG}$  να δείξετε ότι

Ττα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

**BH/22.** Αν  $\vec{MG} + \vec{BD} + \vec{GE} + \vec{AZ} + \vec{EA} + \vec{ZB} = \vec{0}$  να αποδείξετε ότι τα σημεία M και A συμπίπτουν.

(Αρκεί  $\vec{MA} = \vec{0}$  )

**BH/23.** Δείξτε ότι  $2 \cdot \vec{AM} - 3 \cdot \vec{BN} - 2 \cdot \vec{AN} = 5 \cdot \vec{NM} - 3 \cdot \vec{BM}$  .

**BH/24.** Α) Δίνονται τα σημεία O,A,B,Γ για τα οποία ισχύει:

$\vec{OB} + 3\vec{OG} = 4\vec{OA}$  . Να δειχθεί ότι τα A,B,Γ είναι συνευθειακά.

(Τα εκφράζουμε όλα παίρνοντας σημείο αναφοράς το A)

Β) Αν για τα σημεία A , B , Γ είναι:  $\vec{AB} + 2\vec{BG} + 3\vec{GA} = \vec{0}$  να δειχθεί ότι είναι συνευθειακά.

**BH/25.A)** Αν για τα σημεία A, B, Γ, P, Σ, ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{\Sigma A} - 2\overrightarrow{\Sigma P} = \overrightarrow{\Sigma B} + 3\overrightarrow{P\Gamma} \text{ να δειχθεί ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

(Τα εκφράζουμε όλα παίρνοντας σημείο αναφοράς το A)

B) Αν για τα σημεία A, B, Γ, O, M, ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{M\Gamma} + 4\overrightarrow{OB} \text{ δείξτε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

Γ) Αν για τα σημεία A, B, Γ, P, M, ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{P\Gamma} \text{ δείξτε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

Δ) Αν για τα σημεία A, B, Γ, P, ισχύει η σχέση:

$$(\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{P\Gamma} \text{ να δειχθεί ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

**BH/26.** Αν για τα σημεία A, B, Γ, K, Λ, M ισχύει η σχέση:

$$2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B\Gamma} \text{ να δειχθεί ότι } \overrightarrow{KL} \uparrow \downarrow \overrightarrow{ML}.$$

(Τα εκφράζουμε όλα παίρνοντας σημείο αναφοράς το K)

**BH/27.** Δίνονται τα διανύσματα: ,  $\overrightarrow{OA} = 10\vec{\alpha}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\beta}$  και

$$\overrightarrow{OG} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}. \text{ Να δειχθεί ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.}$$

**BH/28.** A) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ . Αν  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ,

$$\overrightarrow{OB} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \text{ και } \overrightarrow{OG} = -\vec{\alpha} + 11\vec{\beta} \text{ να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

B) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ . Αν  $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και

$$\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \text{ να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.}$$

**BH/29.** A) Αν  $\lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OG} + (\lambda - 1)\overrightarrow{OB}$  με  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  δείξτε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

B) Αν  $\lambda\overrightarrow{OA} + (2 - \lambda)\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB}$  με  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  δείξτε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

**BH/30.A)** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ένα σημείο Δ τέτοιο που να ισχύει

$$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AG} \text{ με } x + y = 1.$$

Να δειχθεί ότι το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία BΓ.

B) Έστω τρίγωνο ABΓ και Δ, Ε τα μέσα των AB, AG. Αν

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AE} \text{ με } x + y = 2 \text{ να αποδειχθεί ότι τα σημεία M,B,Γ είναι συνευθειακά.}$$

**BH/31.A)** Αν ισχύει:  $2\kappa\overrightarrow{OA} + (1 - 2\kappa)\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{OB}$  με  $\kappa \in \mathbb{R}$ , να δειχθεί ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά, όπου O τυχαίο σημείο αναφοράς.

B) Αν ισχύει:  $\kappa\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OG} = \vec{0}$  με  $\kappa + \lambda + \mu = 0$  και  $\kappa, \lambda, \mu$  όχι όλα μηδέν, να δειχθεί ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

**BH/32.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{y}$  για τα οποία ισχύουν:

$\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$  και  $4\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ . Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$  είναι ομόρροπα.

**BH/33.** (Άσκηση-μέθοδος) Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά και ισχύει  $\kappa \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$  να δείξετε ότι  $\kappa = \lambda = 0$ .

**BH/34.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά διανύσματα και ισχύει η σχέση:  $x_1 \vec{\alpha} + y_1 \vec{\beta} = x_2 \vec{\alpha} + y_2 \vec{\beta}$  δείξτε ότι  $x_1 = x_2$  και  $y_1 = y_2$ .

Αποδείξτε επίσης ότι κάθε διάνυσμα  $\vec{\delta}$  του επιπέδου γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**BH/35.** Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι συγγραμμικά, ναδειχθεί ότι:

α) τα διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{w} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$  δεν είναι συγγραμμικά.

β) τα  $\vec{y} = 9\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$  και  $\vec{x} = 3\vec{\alpha} - \frac{5}{3}\vec{\beta}$  είναι συγγραμμικά.

**BH/36.** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου. Έστω ακόμα τα διανύσματα  $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

α) Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα  $\vec{u}, \vec{w}$  δεν είναι συγγραμμικά.

β) Να γράψετε το  $\vec{v}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$ .

**BH/37.** Αν  $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ ,  $\vec{OB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ,  $\vec{OG} = x \cdot \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  με  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά, βρες το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

**BH/38.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά διανύσματα και  $\vec{OA} = 3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ ,  $\vec{OB} = (\kappa + 3)\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{OG} = 4\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ , βρείτε το  $\kappa$  ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

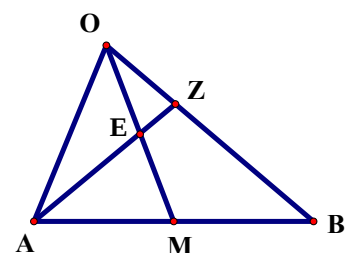
**BH/39.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = 2\vec{u} - \vec{v}$  και  $\vec{\beta} = x\vec{u} + \vec{v}$ , όπου  $\vec{u}, \vec{v}$  μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε τον  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  να είναι συγγραμμικά.

**BH/40.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ και η διάμεσός του AM. Αν ισχύει:  $(x+1) \cdot \vec{AB} + y \cdot \vec{AG} = x \cdot \vec{BG} + (x-y) \cdot \vec{AM}$ , βρείτε τα  $x, y \in \mathbb{R}$ .

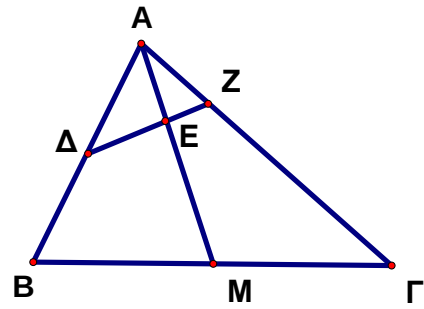
**BH/41.** Αν OM διάμεσος του τριγ. OAB,

Ε το μέσο της OM και  $OZ = \frac{1}{3}OB$  να δείξετε

ότι τα σημεία A, E, Z είναι συνευθειακά.



**BH/42.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το  $\Delta$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$  και το  $M$  μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . Αν  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$  να δείξετε ότι τα σημεία  $\Delta, E, Z$  είναι συνευθειακά.



**BH/43.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ώστε  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{AG} = \vec{\beta}$ . Στην πλευρά  $AB$  παίρνω το σημείο  $\Delta$  ώστε  $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\vec{\alpha}$ , στην πλευρά  $AG$  σημείο  $E$  ώστε  $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\vec{\beta}$  και στην

προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  σημείο  $Z$  ώστε  $\overrightarrow{BZ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ . Δείξτε ότι τα σημεία  $\Delta, E, Z$  είναι συνευθειακά.

**BH/44.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta, E$  και  $Z$  στις  $AB, B\Gamma$  και  $AG$  αντίστοιχα ώστε  $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{B\Gamma}$  και  $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AG}$ . Να δειχθεί ότι τα σημεία  $\Delta, Z$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

**BH/45.** Αν  $E$  το μέσο της διαμέσου  $B\Delta$  τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$  ώστε  $\overrightarrow{\Gamma Z} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ , να δείξετε ότι  $\overrightarrow{\Delta Z} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ .

**BH/46.** Α) Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ ,  $M$  το μέσο της  $A\Delta$  και  $N$  το σημείο τομής των  $AG$  και  $BM$ . Να δειχθεί ότι  $AN = \frac{1}{3}AG$ .

Β) Αν  $M$  το μέσο της διαμέσου  $A\Delta$  τριγώνου  $AB\Gamma$  και η  $BM$  τέμνει την  $AG$  στο  $E$  να δείξετε ότι:  $\overrightarrow{AG} = 3 \cdot \overrightarrow{AE}$ .

**BH/47.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 3$  να δειχθεί ότι  $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ .

**BH/48.** Αν  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{3}|\vec{\beta}| = \frac{1}{4}|\vec{\gamma}|$ , να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  είναι συγγραμμικά.

**BH/49.** Αν  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$ , να δειχθεί ότι:

Α)  $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

**BH/50.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να βρείτε το γ. τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία το διάνυσμα  $\vec{u} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma}$  είναι παράλληλο προς το  $\vec{B\Gamma}$ .

**BH/51.** Αν  $A, B, \Gamma, \Delta$  σταθερά σημεία βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  αν ισχύει  $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta}|$ .

**BH/52.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

A) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $|\vec{MB} + \vec{M\Gamma} + 2 \cdot \vec{MA}| = |\vec{MB} + \vec{M\Gamma} - 2 \cdot \vec{MA}|$ .

**BH/53.** Αν  $\Gamma\Delta$  η διάμεσος του τριγώνου με  $|\vec{\Gamma\Delta}| = 3$ , βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $3|\vec{MB} - \vec{AB}| = |\vec{MA} + \vec{MB} - 2 \cdot \vec{M\Gamma}|$ .

**BH/54.** Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{A\Gamma} + \vec{M\Gamma} - \vec{AM}|$ .

**BH/55.** A) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $\vec{AM} = (1 - \lambda)\vec{AB} + \lambda \cdot \vec{A\Gamma}$  με A)  $\lambda \in \mathbb{R}$  B)  $\lambda \in (0, +\infty)$  Γ)  $\lambda \in [0, 1]$ .

**BH/56.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει:  $(\lambda + 1)\vec{MA} = \lambda(\vec{M\Gamma} + \vec{BA})$ .

**BH/57.** Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει:  $\vec{MB} + \vec{M\Delta} = \lambda \cdot (\vec{M\Gamma} - \vec{MA})$  με  $\lambda \in [-1, 1]$ .

### Συντεταγμένες διανυσμάτων

**BH/58.** Αν  $\vec{\alpha} = (\kappa - 1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (3, \lambda + 1)$  βρείτε τα  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε:

A)  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$  B)  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$  Γ)  $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

Δ)  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (2, 5)$  E)  $\frac{\vec{\alpha}}{2} + \frac{\vec{\beta}}{3} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

**BH/59.** Να βρείτε τους αριθμούς  $x, y \in \mathbb{R}$ , ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3x - 2y - 3, x + y + 1)$  και  $\vec{\beta} = (x + y - 1, 5x + 4y + 1)$  να είναι ίσα.



Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος  $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

**BH/60.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (\lambda^3 - \lambda, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$ .

Για ποια τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  είναι:

- A)  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ .                      B)  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$  και  $\vec{\alpha} // x'x$ .                      Γ)  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$  και  $\vec{\alpha} // y'y$

**BH/61.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1, -3)$  και  $\vec{v} = (-2, 1)$ . Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\alpha} = (x, y)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

- A)  $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v}$                       B)  $\vec{\alpha} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$                       Γ)  $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$   
 Δ)  $\vec{u} + \vec{\alpha} = \vec{v}$                       E)  $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{\alpha} = \vec{0}$                       ΣΤ)  $\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{\alpha}}{3} = \frac{\vec{v}}{2}$

**BH/62.** A) Δίνονται τα σημεία A(1,3), B(6,8) και Δ(-2,2). Βρείτε το σημείο Γ ώστε το ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

**BH/63.** Δίνεται παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία B(4,5), Γ(2,-1) και Δ(-1,-3).  
 A) Να βρείτε την κορυφή Α.

B) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου.

Γ) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

**BH/64.** Αν A(-1,2), B(2,3), Γ(5,0) και Δ(3,x) βρείτε το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι τραπέζιο με βάσεις AB, ΔΓ.

**BH/65.** A) Δίνονται τα σημεία A(1,1), B(7,10). Βρείτε τα σημεία Γ, Δ που τριχοτομούν το τμήμα AB.

**BH/66.** A) Δίνονται τα σημεία A(4,5), B(-1,-2) και Γ(3,4).

Βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου.

B) Δίνονται τα σημεία A(2,4), B(-2,-3) και Γ(-2,5).

Βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.

**BH/67.** A) Δίνονται τα σημεία A(0,4), B(5,-3) και Γ(-1,-2). Να βρείτε τις συντεταγμένες του Δ, αν  $\vec{AB} = 2\vec{\Gamma\Delta}$ .

**BH/68.** Αν  $\vec{AB} = (1, -4)$  και  $\vec{AG} = (-3, 2)$ , να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{BG}$  και  $\vec{AM}$ , όπου Μ το μέσο του ΒΓ. Στη συνέχεια, αν A(-1,2) να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B, Γ.

**BH/69.** Αν A(1,1) και B(8,15) βρείτε σημείο Μ ώστε:

$$5 \cdot \vec{AM} = 2 \cdot \vec{MB}.$$

**BH/70.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2\lambda^2 - \lambda + 3, \lambda^2 - 1)$  και  $\vec{\beta} = (\lambda^2 + 2\lambda + 1, \lambda + 1)$ . Βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  να είναι ίσα. Υπάρχει τιμή του  $\lambda$  τέτοια που τα παραπάνω διανύσματα να είναι αντίθετα;

**BH/71.** Α) Βρείτε διάνυσμα  $\vec{u}$  παράλληλο στο  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  με μέτρο  $3\sqrt{5}$ .

**BH/72.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-6, 8)$ . Να βρεθεί το μέτρο του  $\vec{\alpha}$  καθώς και ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  αντίρροπο του  $\vec{\alpha}$  με  $|\vec{\beta}| = 3|\vec{\alpha}|$ .

**BH/73.** Δίνονται τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(3, 1)$ . Να βρείτε :

Α) Το μέτρο του  $\overline{AB}$

Β) Το μέσο του  $AB$

Γ) Το συμμετρικό του  $A$  με κέντρο συμμετρίας το  $B$ .

Δ) Το σημείο  $P$  αν ισχύει :  $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{PB}$ .

**BH/74.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x, 2)$  και  $\vec{\beta} = (12, x - 2)$ . Να βρείτε τον  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  να είναι συγγραμμικά.

**BH/75.** Να βρεθούν οι τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x, 1)$  και  $\vec{\beta} = (9, x)$  να είναι αντίρροπα.

**BH/76.** Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\lambda, 1)$  και  $\vec{\beta} = (3\lambda - 2, \lambda)$  να είναι συγγραμμικά.

**BH/77.** Αν  $A(1, 1)$  και  $B(-1, 2)$  βρείτε σημείο  $M(x, y)$  ώστε το διάνυσμα  $\overline{AM}$  να είναι συγγραμμικό με το  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  και το  $\overline{BM}$  συγγραμμικό με το  $\vec{\beta} = (1, -1)$ .

**BH/78.** Α) Αν  $A(1, 1)$ ,  $B(-3, 2)$  και  $\Gamma(-5, x)$ , να βρεθεί ο  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα σημεία αυτά να είναι συνευθειακά.

**BH/79.** Β) Αν  $A(1, 1)$ ,  $B(2, x)$  και  $\Gamma(x + 1, 3)$ , να βρεθεί ο  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα σημεία αυτά να είναι συνευθειακά.

**BH/80.** Δείξτε ότι τα σημεία  $A(\alpha, \beta + \gamma)$ ,  $B(\beta, \gamma + \alpha)$ ,  $\Gamma(\gamma, \alpha + \beta)$  είναι συνευθειακά.

**BH/81.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x, y)$  και  $\vec{\beta} = (y - 2, x + 6)$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$ , για τα οποία ισχύει ότι  $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, -6)$ .

Α) Να δείξετε ότι  $x = -2$  και  $y = 3$ .

B) Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**BH/82.** Δίνονται τα σημεία B(1,2) και Γ(-1,6) . Να βρείτε σημείο A του άξονα  $x'x$  ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με (AB)=(AG).

**BH/83.** Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(2,0) , B(-1,1) , Γ(0,-1). Δείξτε ότι το ABΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και ισοσκελές.

**BH/84.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(4,5) , B(1,2) και Γ(3,κ) με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Βρείτε τον κ ώστε  $\hat{A} = 90^\circ$ .

**BH/85.** Το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  έχει τη διεύθυνση του  $\vec{\gamma} = (1, \sqrt{3})$  και το ίδιο μέτρο με το  $\vec{\beta} = (4, -3)$  . Βρείτε τις συντεταγμένες του.

**BH/86.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2\lambda - 1, \mu - 1)$ ,  $\vec{\beta} = (\lambda + 1, 2\mu - 5)$   $\vec{x} = (1,1)$  ,  $\vec{y} = (-2,1)$  . Να βρείτε τους  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι:  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) // \vec{x}$  και  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) // \vec{y}$ .

**BH/87.** Αν  $\vec{\alpha} = (x, y + 1)$  και  $\vec{\beta} = (2x + y, 2y)$  βρείτε τα  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε:  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$  και  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) // x'x$ .

**BH/88.** Αν  $\overline{OA} = (1,2)$  ,  $\overline{OB} = (2,1)$  και  $\overline{OG} = (x,3)$  βρες το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα A,B,Γ να είναι συνευθειακά.

**BH/89.** Αν  $\overline{OA} = (1,3)$  ,  $\overline{OB} = (x,2)$  και  $\overline{OG} = (x + 2,1)$  βρες το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα A,B,Γ να είναι συνευθειακά.

**BH/90.** Δίνονται τα σημεία A(2,-4) και B(-6,8). Να βρεθούν το μέτρο του  $\overline{AB}$  , το μέσο M του AB και το σημείο P που χωρίζει το AB σε λόγο 2:3.

**BH/91.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{v} = (4, -3)$ ,  $\vec{\alpha} = (1, -2)$  και  $\vec{\beta} = (-3, 5)$  . Εκφράστε το  $\vec{v}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**BH/92.** Γράψτε το  $\vec{v} = (4,13)$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} = (2,3)$  και  $\vec{\beta} = (-1,2)$ .

**BH/93.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3,2)$  ,  $\vec{\beta} = (-2,1)$  και  $\vec{\gamma} = (1,-4)$ . Αναλύστε το  $\vec{\gamma}$  σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**BH/94.** Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{u} = (3,4)$  σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1,1)$  και  $\vec{\beta} = (-1,2)$ .

**BH/95.** Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-2, 6)$  σε δύο συνιστώσες κατά τη διεύθυνση των διανυσμάτων  $\vec{\beta} = (2, -1)$  και  $\vec{\gamma} = (3, 1)$ .

**BH/96.** Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (2, 3)$  σε δύο διανύσματα από τα οποία το ένα είναι παράλληλο με τον άξονα  $x'x$  και το άλλο με το διάνυσμα  $\vec{v} = (-1, 2)$ .

**BH/97.** Δίνονται τα σημεία  $A(-3, 3)$  και  $B(3, 0)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  για το οποίο ισχύει  $\overrightarrow{BM} = 2 \cdot \overrightarrow{MA}$  και τις συντεταγμένες του συμμετρικού του  $M$  ως προς το  $A$ .

**BH/98.** Αν το διάνυσμα  $\vec{u} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$  είναι παράλληλο στη διχοτόμο της  $2^{\text{ης}}$  και  $4^{\text{ης}}$  γωνίας των αξόνων να προσδιορίσετε το  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**BH/99.** Αν  $\vec{\delta} = (-1, \sqrt{3})$  βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον  $x'x$ .

**BH/100.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (\lambda, 7 - \lambda)$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\vec{\alpha}| = 13$ .

**BH/101.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (2, -1)$ . Να βρείτε διάνυσμα  $\vec{\beta}$  αντίρροπο του  $\vec{\alpha}$ , το οποίο να έχει μέτρο ίσο με  $4\sqrt{5}$ .

**BH/102.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\kappa - 2\lambda, -2)$  και  $\vec{\beta} = (4\lambda^2 + 2\lambda - \kappa + 1, \kappa + 2\lambda)$ . Αν τα διανύσματα είναι παράλληλα να βρείτε τους  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .

**BH/103.** Να δείξετε ότι τα σημεία  $A(\lambda + 2, -1)$ ,  $B(1, 3 - \lambda)$  και  $\Gamma(2, 3)$  είναι κορυφές τριγώνου για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**BH/104.** Βρείτε διάνυσμα που σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $\frac{3\pi}{4}$  και έχει μέτρο  $3\sqrt{2}$ .

**BH/105.** Αν το διάνυσμα  $\vec{\delta}$  σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $\frac{5\pi}{4}$  βρείτε το  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  ώστε το  $\vec{u} = (x - 1, 2x + 1)$  να είναι συγγραμμικό με το  $\vec{\delta}$ .

**BH/106.** Α) Αν  $\vec{\alpha} = (2, 3)$  και  $\vec{\beta} = (-3, -2)$ . Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  καθώς και η γωνία που σχηματίζει το  $\vec{v}$  με τον άξονα  $x'x$ .

**BH/107.** Αν  $A(2, \sqrt{3})$  και  $B(3, 2\sqrt{3})$  βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  καθώς και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ .

**BH/108.** Βρείτε διάνυσμα  $\vec{\delta}$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$  και έχει μέτρο  $\sqrt{18}$ .

**BH/109.** Αν  $A(1,1)$  βρείτε το σημείο  $B$  ώστε το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $3\pi/4$  και να έχει μέτρο  $3\sqrt{2}$ .

**BH/110.** Αν  $\vec{\alpha} = (\mu, \mu + 2)$  με  $\mu \neq 0$  και  $\vec{\beta} = (6, 8)$ :

A) Βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}^*$  αν  $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{2}$ .

B) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  με τον  $x'x$ .

Γ) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\delta} = 5\vec{\beta} - 7\vec{\alpha}$  με τον  $x'x$ .

**BH/111.** Αν  $\vec{\alpha} = (x, y)$  και  $\vec{\beta} = (x + 2, 2y)$  βρείτε τα  $x, y \in \mathbb{R}^*$  ώστε  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5}$ .

**BH/112.** A) Βρείτε το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα σημεία  $A(x, 1)$ ,  $B(4, x + 1)$  και  $\Gamma(7, 3x)$  να είναι συνευθειακά.

B) Αν  $O(0, 0)$ ,  $\overrightarrow{OA} = (-1, 9)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (5, -3)$ ,  $\overrightarrow{OG} = (x, 5)$  βρείτε το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  να είναι συνευθειακά.

**BH/113.** Να βρεθεί η γωνία  $\varphi$  την οποία σχηματίζει το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  όπου  $A(2, 4)$  και  $B(4, 2)$ , με τον άξονα  $x'x$ .

Όμοια αν  $A(3, 0)$  και  $B(0, -\sqrt{3})$ .

**BH/114.** Αν  $\vec{\alpha} = (x + 1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (x, 2x + 1)$ , τότε:

A) Δείξτε ότι τα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δεν είναι συγγραμμικά.

B) Αν  $x = -3$  βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το  $\vec{\alpha}$  με τον άξονα  $x'x$ .

Γ) Αν  $x = -1$  γράψτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 3\vec{i}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

Δ) Αν  $x = -2$  βρείτε ένα διάνυσμα αντίρροπο του  $\vec{\alpha}$  με μέτρο  $2\sqrt{5}$ .

**BH/115.** Αν  $A(\mu - 3, 2)$  και  $B(3\mu, \mu - 3)$  βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{7\pi}{4}$ .

**BH/116.** Αν  $A(1,1)$  και  $B(5,1)$  βρείτε σημείο  $M$  ώστε  $MA = MB$  και το διάνυσμα  $\overrightarrow{AM}$  να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ .

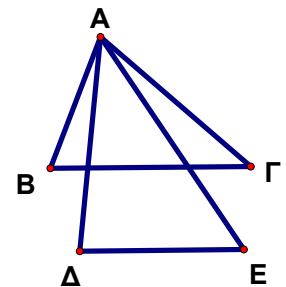
**BH/117.** Να βρεθεί το σημείο  $K$  που να ισαπέχει από τα σημεία:  $A(2,2)$ ,  $B(0,4)$  και από τα  $\Gamma(1,-4)$ ,  $\Delta(-2,3)$ .

**BH/118.** Δίνονται τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(3,2)$ ,  $\Gamma(-2,-1)$  και  $M$  τέτοιο ώστε  $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$  με  $O(0,0)$ .

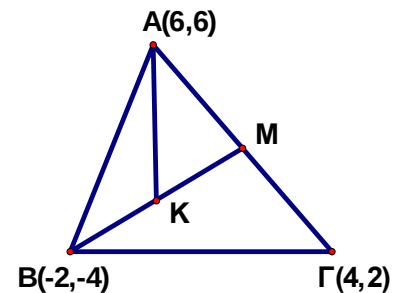
α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του  $M$ .

β) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο  $ABM\Gamma$  είναι παρ/μο.

**BH/119.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta, E$  ώστε:  $\overrightarrow{A\Delta} = 5 \cdot \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$  και  $\overrightarrow{AE} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} + 5 \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ . Γράψτε το  $\overrightarrow{\Delta E}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ , και δείξτε ότι  $\overrightarrow{\Delta E} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ .



**BH/120.** Αν στο διπλανό σχήμα το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$  και το  $K$  μέσο της διαμέσου  $BM$ , βρείτε τις συντεταγμένες του  $K$  και του  $\overrightarrow{AK}$ .



**BH/121.** Δείξτε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A(11,2)$ ,  $B(6,-10)$ ,  $\Gamma(-6,-5)$  και  $\Delta(-1,7)$  είναι τετράγωνο.

**BH/122.** Βρείτε το περίκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $A(6,4)$ ,  $B(0,2)$  και  $\Gamma(7,1)$ .

**BH/123.** Αν τα σημεία  $K(4,5)$ ,  $\Lambda(2,8)$  και  $M(3,6)$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, τριγώνου  $AB\Gamma$  να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

**BH/124.** Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x,1)$ ,  $\vec{\beta} = (-y^2 + 4y - 5, x + 2)$  είναι συγγραμμικά, να βρείτε τους  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**BH/125.** Α) Αν  $A(-3,2)$ ,  $B(4,-1)$  βρείτε σημείο  $\Gamma$  του άξονα  $x'x$  ώστε τα  $A, B, \Gamma$  να είναι συνευθειακά.

B) Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{OA} = (x+1, x)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2x-1, x-1)$  και  $\overrightarrow{OG} = (-1, 3)$ . Ναδειχθεί ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**BH/126.** Αν  $A(-1, 2)$ ,  $B(-1, 6)$ ,  $\Gamma(7, 2)$ , AM η διάμεσος του τριγώνου ABΓ, Δ το μέσο της AM και ισχύει  $2 \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EG}$  τότε:  
A) βρείτε τα Δ, E.

B) Δείξτε ότι τα B, Δ, E είναι συνευθειακά.

**BH/127.** Αν ABΓΔ παραλληλόγραμμο,  $A(1, -2)$ ,  $\Delta(2, 2)$ , το B ανήκει στον  $x'x$  και το το κέντρο K του παραλληλογράμμου ανήκει στον  $y'y$ , βρείτε τα B, K, Γ.

**BH/128.** Αν  $A(3x, y)$ ,  $B(4x+3y, 2y)$  βρείτε τα  $x, y \in \mathbb{R}$  ώστε το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $135^\circ$  και να έχει μέτρο  $2\sqrt{2}$ .

**BH/129.** Αν  $A(\mu-1, 0)$  και  $B(2, 3\mu)$  βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (\mu, \lambda)$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{3\pi}{4}$  και είναι παράλληλο στο  $\overrightarrow{AB}$ .

**BH/130.** Έστω  $\vec{\alpha} = (1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -1)$  και  $\vec{u} = \lambda\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ . Αν το  $\vec{u}$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$  και έχει μέτρο  $10\sqrt{2}$ , να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος.

**BH/131.** Βρείτε διάνυσμα  $\vec{u}$  που έχει μέτρο  $2\sqrt{2}$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ .

**BH/132.** Αν  $A(3, 1)$  βρείτε σημείο B τέτοιο που το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  να έχει μέτρο  $4\sqrt{2}$  και να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ .

**BH/133.** Δίνονται τα σημεία  $A(2, 2)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $\Gamma(4, -5)$  και  $\Delta(6, 3)$ . Να γράψετε το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$ .

**BH/134.** Αν  $\vec{\alpha} = (1, 2)$ ,  $\vec{\beta} = (2, 1)$  και  $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ ,  $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ,  $\overrightarrow{OG} = x\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ , υπολογίστε το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε τα A, B, Γ να είναι συνευθειακά.

**BH/135.** Αν  $A(1,1)$ ,  $B(3,2)$ ,  $\Gamma(1,3)$ ,  $\Delta(2,2)$  βρείτε το σημείο τομής των ευθειών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ .

**BH/136.** Αν  $A(-3,-1)$ ,  $B(-5,-3)$ ,  $\Gamma(-4,7)$  και  $\Delta(-2,3)$  να αποδειχθεί ότι οι ευθείες  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  τέμνονται και να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

**BH/137.** Βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-4, |\vec{\alpha}| - 2)$ .

**BH/138.** Αν  $A(-1,0)$ ,  $B(2,-3)$ ,  $\Gamma(0,1)$  βρείτε το διάνυσμα  $\vec{v}$  ώστε να ισχύει:  $2 \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} - |\vec{v}| \cdot \overrightarrow{AG}$ .

**BH/139.** Αποδείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμοποιώντας συντεταγμένες σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

**BH/140.** Αποδείξτε ότι οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

**BH/141.** Θεωρώ τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $a$ . Στην πλευρά  $\Delta\Gamma$  θεωρώ σημείο  $E$  και στην πλευρά  $\Delta A$  σημείο  $Z$  ώστε  $\Delta E = \Delta Z = \frac{a}{3}$ . Να αποδείξετε ότι  $AE = \Gamma Z$ .

**BH/142.** Δείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της τρίτης πλευράς.

**BH/143.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $E, Z, H$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma, \Gamma A$  και  $AB$  αντίστοιχα. Αν  $A\Delta$  το ύψος του τριγώνου, αποδείξτε ότι το  $HZE\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

**BH/144.** Δείξτε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.



# Εσωτερικό γινόμενο

Μαζεύω τα σύνεργά μου: όραση, ακοή, γέψη, όσφρηση, αφή, μυαλό, βράδιασε πια, τελεύει το μεροκάματο, γυρίζω σαν τον τυφλοπόντικα σπίτι μου, στο χώμα. Όχι γιατί κουράστηκα να δουλεύω, δεν κουράστηκα, μα ο ήλιος βασίλεψε. Ν. Καζαντζάκης

**ΒΘ/01.** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου με  $|\vec{\alpha}| = 3$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 60^\circ$ . Να βρείτε τα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2$  και  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ .

**ΒΘ/02.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  του επιπέδου τέτοια που  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 5$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$ . Να βρείτε τα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και  $|5\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}|$ .

**ΒΘ/03.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι μοναδιαία διανύσματα και τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  και  $5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$  είναι κάθετα μεταξύ τους, να βρεθεί η γεωμ. γωνία των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**ΒΘ/04.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$  και  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ , βρείτε το  $|3\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ .

**ΒΘ/05.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 4$  και  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ , βρείτε το  $\sin\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$ .

**ΒΘ/06.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύει ότι  $|\vec{\beta}| = \sqrt{27}$ ,  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{5\pi}{6}$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -9$ .  
Α) Να δείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = 2$ .

Β) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:  $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ .

**ΒΘ/07.** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , με  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$ . Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$  και  $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

**ΒΘ/08.** Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ ,  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ ,  $\vec{\delta} = \vec{\beta} - 5\vec{\alpha}$ , ναδειχθεί ότι τα διανύσματα  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\delta}$  έχουν τα ίδια μέτρα και είναι μεταξύ τους κάθετα.

**ΒΘ/09.** Α) Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$  δείξτε ότι  $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .

B) Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  μη μηδενικά διανύσματα,  $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$  και  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  να δείξετε ότι:  $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$ .

**BΘ/10.** Για τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  ισχύει:  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \sqrt{3} \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$ . Να βρεθούν οι γωνίες  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$  και  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$ .

**BΘ/11.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  που σχηματίζουν γωνία  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Βρείτε τη γωνία  $\varphi$  των  $\vec{x} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{y} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

**BΘ/12.** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  διανύσματα ώστε:  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

Βρείτε τη γωνία  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}\right)$ .

**BΘ/13.** A) Αν  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$  και  $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{3}$  βρείτε το  $|\vec{\beta}|$ .

B) Αν  $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$ ,  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7$  υπολογίστε τα  $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$ .

**BΘ/14.** A) Αν  $|\vec{\alpha}| = 3$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$  βρείτε το  $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$ .

B) Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου τέτοια που  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ,  $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{34}$ . Βρείτε τα  $|\vec{\alpha}|$  και  $|\vec{\beta}|$ .

**BΘ/15.** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δύο διανύσματα με  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  και  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

Αποδείξτε ότι  $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$  και  $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$ .

**BΘ/16.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δυο μη μηδενικά διανύσματα, να αποδείξετε ότι :

$$A) |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad B) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{4}|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2.$$

**BΘ/17.** Αν  $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$  και  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$  δείξτε ότι  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ .

**BΘ/18.** A) Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ,  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$  και  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$  βρείτε τα  $|\vec{\alpha}|$  και  $|\vec{\beta}|$ .

Β) Αν  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ ,  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$  και  $|\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 19\sqrt{19}$  υπολογίστε τα  $|\vec{\alpha}|$  και  $|\vec{\beta}|$ .

Γ) Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ,  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = 5$  βρείτε τα  $|\vec{\alpha}|$ ,  $|\vec{\beta}|$ ,  $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$  και τη γωνία  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\beta})$

**ΒΘ/19.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν:  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 28 \text{ και } |\vec{\alpha}|^2 - 3|\vec{\alpha}| + 15 = 5|\vec{\alpha}| - 1.$$

Α) Να δείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = 4$ .

Β) Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6$ .

Γ) Να δείξετε ότι  $|\vec{\beta}| = 3$ . Δ) Βρείτε το εσ. γινόμενο:  $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ .

**ΒΘ/20.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 3$  και  $|\vec{\beta}| = 6$ , να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$  και  $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

**ΒΘ/21.** Αν  $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$  βρείτε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

**ΒΘ/22.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1 \text{ και } \widehat{(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha})} = \frac{\pi}{3}. \text{ Βρείτε τη γωνία } \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}.$$

**ΒΘ/23.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 45^\circ$ , βρείτε την  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\alpha} - \vec{\beta})}$ .

**ΒΘ/24.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $|\vec{\gamma}| = 2$  και  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0}$  να δείξετε ότι : α)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = -1$  και β)  $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$  και  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$ .

**ΒΘ/25.** Για τα μοναδιαία διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  αποδείξτε ότι :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = \frac{1}{2}(|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 - 3).$$

**ΒΘ/26.** Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  είναι μοναδιαία και μη συγγραμμικά και  $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ , να δείξετε ότι  $\widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\alpha})} + \widehat{(\vec{\gamma}, \vec{\beta})} = \pi$ .

**ΒΘ/27.** Αν  $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$  και  $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  δείξτε ότι  $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ .

**ΒΘ/28.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{2\pi}{3}$ .

Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{x}$  ώστε να ισχύουν:  $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{x})$ .

**ΒΘ/29.** Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ , να αποδειχθεί ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και αντίστροφα.

**ΒΘ/30.** Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα.

Αν ισχύει:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$  να αποδειχθεί ότι  $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ .

**ΒΘ/31.** Α) Αν  $\vec{\alpha} = (1, 1)$  και  $\vec{\beta} = (3, 1)$  να βρείτε τα:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2$  και  $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ .

Β) Αν  $\vec{\alpha} = (-3, 2)$ ,  $\vec{\beta} = (3, 8)$  και  $\vec{\gamma} = (-2, 2)$  υπολογίστε τα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$  και τα  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ ,  $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$ . Τι παρατηρείτε;

**ΒΘ/32.** Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\mu - 4, 1 + 2\mu)$ ,  $\vec{\beta} = (2\mu, 3 - \mu)$  είναι κάθετα, να προσδιορίσετε τον  $\mu \in \mathbb{R}$ .

**ΒΘ/33.** Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (4, 3)$ . Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\lambda\vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

**ΒΘ/34.** Α) Να βρείτε τα διανύσματα που είναι κάθετα στο  $\vec{\alpha} = (1, 3)$  και έχουν μέτρο  $\sqrt{40}$ .

Β) Να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{v}$  που είναι κάθετα στο  $\vec{\alpha} = (4, 3)$  και έχουν μέτρο 10.

**ΒΘ/35.** Αν  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  βρες διάνυσμα  $\vec{u}$  ώστε  $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$  και  $|\vec{u}| = \sqrt{20}$ .

**ΒΘ/36.** Α) Αν  $\vec{\alpha} = (-3, 7)$  και  $\vec{\beta} = (2, 5)$  βρείτε τη γωνία  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$ .

Β) Αν  $\vec{\alpha} = (1, 3)$  και  $\vec{\beta} = (-1, -8)$  βρείτε τη γωνία  $\left(\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$ .

Γ) Αν  $\vec{\alpha} = (3, \sqrt{3})$  και  $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, -1)$  βρείτε τη γωνία  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$ .

**ΒΘ/37.** Έστω  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  και  $\vec{\beta} = (1, 3)$  βρείτε τη γωνία  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$  και το  $\sin\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$ .

**ΒΘ/38.** Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , για τα οποία

ισχύει:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}^2$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ . A) Να δείξετε ότι  $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ .

B) Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  τα  $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{w} = \lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  είναι κάθετα.

**ΒΘ/39.** Δίνονται τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , με  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ , ώστε  $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 22$  και  $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = -24$ .

A) Να δείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = 4$  και  $|\vec{\beta}| = 5$ . B) Να βρείτε το  $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$ .

Γ) Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = -24$ .

Δ) Βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε τα  $\vec{v} = \mu\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{w} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

**ΒΘ/40.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ , για τα οποία ισχύουν:

$\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$ ,  $3|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 6$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -54$ .

A) Να δείξετε ότι  $|\vec{\gamma}| = 4$ .

B) Να βρείτε το  $3\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ .

**ΒΘ/41.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$  και  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ , να βρείτε το  $|\vec{v}|$  καθώς και τις γωνίες  $(\vec{\alpha}, \vec{v})$  και  $(\vec{v}, \vec{\beta})$ .

**ΒΘ/42.** A) Αν  $A(1, 2), B(2, -1), \Gamma(3, 1)$  βρείτε τη γωνία B του τριγώνου ABΓ.

B) Όμοια αν  $A(4, 3), B(1, 2), \Gamma(6, 7)$  βρείτε τη γωνία A του τριγώνου ABΓ.

**ΒΘ/43.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 1)$ ,  $\vec{\beta} = (2, 1)$  και

$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$  με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$  και  $|\vec{\gamma}| = 6\sqrt{2}$  βρείτε τα  $\lambda$  και  $\mu$ .

**ΒΘ/44.** A) Αποδείξτε με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

B) Αν  $A(1, 1)$ ,  $B(3, \lambda + 2)$ ,  $\Gamma(\lambda^2 - 2, 3)$  βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο στο A. Για τις παραπάνω τιμές του  $\lambda$  δείξτε ότι το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

**ΒΘ/45.** Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$  και  $\overrightarrow{\Gamma B} = (3, -3)$

A) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

B) Υπολογίστε το μήκος της διαμέσου ΑΔ.

**ΒΘ/46.** Αν  $\overrightarrow{AG} = (1, 3)$  και  $\overrightarrow{BL} = (5, -1)$  οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ , να υπολογίσετε το  $\sin A$ .

**ΒΘ/47.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διάμεσους  $AD, BE, \Gamma Z$  δείξτε ότι ισχύει:  
 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma Z} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

**ΒΘ/48.** Σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(1, 1)$  και  $B(4, 2)$ . Να βρείτε το σημείο  $M$  του άξονα  $x'x$  τέτοιο που το τρίγωνο  $AMB$  να είναι ορθογώνιο στο  $M$ .

**ΒΘ/49.** Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , του οποίου οι διάμεσοι  $BE$  και  $\Gamma Z$  τέμνονται κάθετα. Βρείτε το  $\sin A$ .

**ΒΘ/50.** Σ' ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$ ,  $|\overrightarrow{AD}| = 1$  και

$\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ . Αν η γωνία των διαγωνίων του,  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  είναι  $\theta$  να δειχθεί ότι:

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

**ΒΘ/51.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  μη μηδενικά διανύσματα,  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$  και  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ .

**ΒΘ/52.** Αν  $AB\Gamma$  ισοσκελές τρίγωνο ( $AB = A\Gamma$ ) και στις πλευρές του  $AB, A\Gamma$  πάρω αντίστοιχα τα σημεία  $\Delta, E$  ώστε  $A\Delta = \frac{1}{3}AB$  και

$AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ , να δείξετε ότι:  $BE = \Gamma\Delta$ .

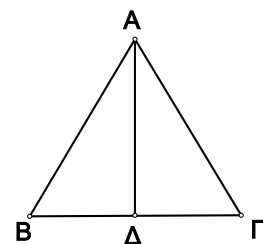
**ΒΘ/53.** Αποδείξτε ότι αν δύο διάμεσοι ενός τριγώνου είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

**ΒΘ/54.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $M$  του επιπέδου του. Αν ισχύει  $\overrightarrow{\Gamma M}^2 + \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = (\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}) \cdot \overrightarrow{\Gamma M}$  να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ .

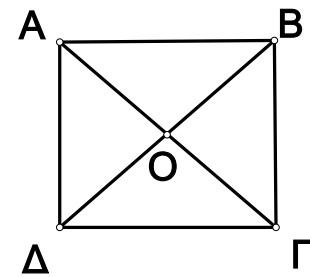
**ΒΘ/55.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = B\Gamma = \Gamma A = 2$ .

Αν  $A\Delta$  το ύψος του υπολογίστε τα:

- |                                                         |                                                         |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ | B) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ |
| Γ) $ \overrightarrow{A\Delta} $                         | Δ) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ |



E)  $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$       ΣΤ)  $\overrightarrow{A\Delta} \cdot (\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta})$ .



**ΒΘ/56.** Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς 1 και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Υπολογίστε τα:

- A)  $|\overrightarrow{A\Gamma}|$       B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$   
 Γ)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$       Δ)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$   
 E)  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$       ΣΤ)  $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$   
 Ζ)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$       Η)  $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

### Ανάλυση σε συνιστώσες

**ΒΘ/57.** Αναλύστε το διάνυσμα  $\vec{\beta} = (2, 3)$  σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους και έτσι που η μία να έχει τη διεύθυνση του  $\vec{\alpha} = (1, -2)$ .

**ΒΘ/58.** Αναλύστε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (5, 10)$  σε δυο συνιστώσες, μιας παράλληλης στο  $\vec{\alpha} = (-1, 3)$  και μιας κάθετης προς αυτό.

**ΒΘ/59.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 2)$ ,  $\vec{\beta} = (4, -1)$  και  $\vec{u} = (-2, 6)$ . Αναλύστε το  $\vec{u}$  σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο  $\vec{\alpha}$  και η άλλη κάθετη στο  $\vec{\beta}$ .

**ΒΘ/60.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3, 2)$ ,  $\vec{\beta} = (2, 1)$ . Αναλύστε το  $\vec{\beta}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο  $\vec{\alpha}$ .

**ΒΘ/61.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, 3)$  και  $\vec{\beta} = (-1, 4)$ . Να αναλυθεί το  $\vec{\alpha}$  σε δύο συνιστώσες  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$  ώστε  $\vec{\alpha}_1 \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $\vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta}$ .

**ΒΘ/62.** Αν  $\vec{\alpha} = (-2, -1)$  και  $\vec{\beta} = (1, 3)$ , να βρεθούν δύο διανύσματα  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\delta}$  τέτοια που  $\vec{\alpha} = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$ ,  $\vec{\delta} \parallel \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ .

**ΒΘ/63.** Αν  $\vec{\alpha} = (3, 5)$ ,  $\vec{\beta} = (-1, 2)$  και  $\vec{\gamma} = (1, -5)$  να αναλύσετε το  $\vec{\gamma}$  σε δύο συνιστώσες έτσι που η μια να είναι κάθετη στο  $\vec{\alpha}$  και η άλλη κάθετη στο  $\vec{\beta}$ .

**ΒΘ/64.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  ώστε  $|\vec{\alpha}| = \frac{1}{5}$ ,  $|\vec{\beta}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$|\vec{\gamma}| = 10$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{3}$  και  $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{6}$ . Αναλύστε το  $\vec{\gamma}$  σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**ΒΘ/65.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  με  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{2}$  και  $\left(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$ .

Αν  $|\vec{\alpha}| = 3$ ,  $|\vec{\beta}| = 5$  και  $|\vec{\gamma}| = 8$ , να εκφράσετε το  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**ΒΘ/66.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  με:  $|\vec{\alpha}| = 3$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$ ,  $|\vec{\gamma}| = 5$ ,

$\left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}\right) = \frac{\pi}{3}$  και  $\left(\vec{\gamma}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{6}$ . Να αναλύσετε το  $\vec{\gamma}$  σε δύο συνιστώσες

παράλληλες προς τα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**ΒΘ/67.** Α) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(1, 2)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $\Gamma(-3, 4)$  και  $AM$  η διάμεσός του υπολογίστε τη γωνία  $\hat{\theta} = \widehat{BAM}$ .

Β) Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ,  $|\overrightarrow{A\Gamma}| = 4$  και  $\widehat{BAG} = 60^\circ$  και  $BM$  η διάμεσός του να βρείτε το συνθ όπου  $\hat{\theta} = \widehat{ABM}$ .

**ΒΘ/68.** Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $(\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ :

Α) Βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

Β) βρείτε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ .

Γ) Αν  $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  βρείτε τη γωνία  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

Δ) Αν  $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $\vec{\alpha} \perp (3\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$  γράψτε το  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**ΒΘ/69.** Σε επίπεδο δίνονται τα σταθερά σημεία  $O, A$  έτσι που  $|\overrightarrow{OA}| = 3$ .

Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου για τα οποία είναι  $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}) = 7$ .

**ΒΘ/70.** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .

**ΒΘ/71.** Δίνονται τα σταθερά σημεία  $A, B$  με  $|\overrightarrow{AB}| = 4$ . Βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$ .

**ΒΘ/72.** Δίνονται τα σταθερά σημεία  $A, B$  με  $|\overrightarrow{AB}| = 3$ . Βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει:  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 9$ .



**ΒΘ/73.** Αν  $ΑΔ$  διάμεσος του τριγώνου  $ΑΒΓ$  βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $Μ$  αν ισχύει:  $\overrightarrow{ΑΜ}^2 = 2 \cdot \overrightarrow{ΑΔ} \cdot \overrightarrow{ΑΜ} - \overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΓ}$ .

**ΒΘ/74.** Έστω τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $(ΑΒ) = 6$ . Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $Μ$  αν  $\overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} = 7 + \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΒΓ}$ .

**ΒΘ/75.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3,1)$  και  $\vec{\beta} = (1,2)$ . Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  που ικανοποιεί τη σχέση:  $\vec{\gamma} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha}$ .

**ΒΘ/76.** Αν για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$  και  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ , βρείτε διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  ώστε  $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ .

**ΒΘ/77.** Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$  δείξτε ότι  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{\alpha}|$ .

**ΒΘ/78.** Να δειχθεί ότι το διάνυσμα  $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} + \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$  είναι συγγραμμικό με τη διχοτόμο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**ΒΘ/79.** Α) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ .

Να αποδειχθεί ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ .

Β) Δείξτε ότι το διάνυσμα  $\vec{u} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\beta}$  είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$ .

**ΒΘ/80.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ :

Α) Δείξτε ότι  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$ .

Β) Βρείτε το διάνυσμα  $\vec{x}$  αν:  $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και  $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$ .

Γ) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  αν τα διανύσματα  $\vec{x} + \vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$  είναι κάθετα.

**ΒΘ/81.** Αν για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύουν  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 1$ , τότε:

Α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$

Β) Βρείτε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

Γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$  είναι κάθετα.

**ΒΘ/82.** Α) Αν  $\vec{u} = (3,1)$  βρείτε τα διανύσματα  $\vec{v}$  ώστε  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$  και  $|\vec{v}| = 2$ .

B) Αν  $\vec{\alpha} = (1,1)$  και  $\vec{\beta} = (2,-1)$  βρείτε το διάνυσμα  $\vec{u}$  ώστε  $\vec{u} \cdot \vec{\alpha} = 5$  και  $\vec{u} \cdot \vec{\beta} = 1$ .

**BΘ/83.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  κάθετα μη μηδενικά διανύσματα και  $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$  βρείτε τα  $\vec{x}, \vec{y}$  ώστε:  $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ ,  $\vec{y} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  και  $\vec{x} - \vec{y} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

**BΘ/84.** Α) Αν  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$  βρείτε το διάνυσμα  $\vec{v}$  ώστε  $\vec{v} \cdot \vec{\alpha} = 3$  και  $\vec{v} \cdot \vec{\beta} = 4$ . (Θέστε  $\vec{v} = \kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta}$ )

B) Αν  $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{3\pi}{4}$  βρείτε το διάνυσμα  $\vec{v}$  ώστε  $\vec{v} \cdot \vec{\alpha} = 4$  και  $\vec{v} \cdot \vec{\beta} = -5$ .

Γ) Αν  $\vec{\alpha} = (2,1)$  και  $\vec{\beta} = (-1,2)$  βρες το  $\vec{v}$  ώστε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = 3$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{v} = 1$ .

**BΘ/85.** Αν ισχύει η σχέση:  $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 1 \neq 0$  να αποδειχθεί ότι  $\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$  και να βρεθεί το διάνυσμα  $\vec{x}$ .

**BΘ/86.** Αν  $\vec{\alpha} = (2 - |\vec{\alpha}|, |\vec{\alpha}| - 1)$  και  $\vec{\alpha} \nparallel \vec{x}$ :

A) Βρείτε τις συντεταγμένες του  $\vec{\alpha}$ .

B) Αν  $\vec{\alpha} = (-3,4)$  να αναλύσετε το  $\vec{\alpha}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο  $\vec{\gamma} = (1,2)$ .

Γ) Βρείτε τα  $\vec{v}$  ώστε  $\vec{v} \perp \vec{\alpha}$  και  $|\vec{v}| = 5$ .

**BΘ/87.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 1$  και  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1}$  δείξτε ότι  $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$ .

**BΘ/88.** Αν  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$ :

A) Βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{v} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ .

B) Βρείτε το διάνυσμα  $\vec{x}$  αν  $(\vec{x} + 2\vec{\alpha}) \parallel \vec{\beta}$  και  $(\vec{x} + \vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$ .

Γ) Δείξτε ότι  $|\vec{x} + \vec{\alpha}| = |\vec{v}|$ .

**BΘ/89.** Αν  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \sqrt{2}$  και  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{4}$  δείξτε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ .

**BΘ/90.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $(3\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ :

A) Βρείτε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ .

B) Αν  $\vec{\gamma} = \lambda \vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$ : α) βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$

β) βρείτε το  $|\vec{\gamma}|$  και γ) βρείτε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ .

**BΘ/91.** Αν  $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, 4)$  και  $\vec{\beta} = (x, y)$  με  $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$  και το  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ .

A) Δείξτε ότι  $|\vec{\alpha}| = 5$ .

B) Βρείτε το  $\vec{\beta}$ .

Γ) Αν  $\vec{\beta} = (1, 2)$  να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \not\perp \vec{\beta}$ .

Δ) Να γράψετε το  $\vec{\gamma} = (3, 2)$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

**BΘ/92.** Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ.

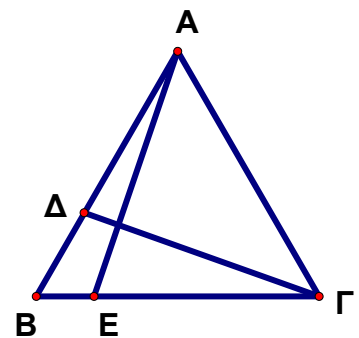
Στην πλευρά του AB παίρνουμε σημείο Δ ώστε

$A\Delta = \frac{2}{3} AB$  και στην πλευρά BΓ σημείο E ώστε

$BE = \frac{1}{5} B\Gamma$ . A) Εκφράστε τα διανύσματα

$\vec{B\Gamma}, \vec{A\Delta}, \vec{E\Gamma}$  συναρτήσει των  $\vec{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{AG} = \vec{\beta}$ .

B) Αποδείξτε ότι  $\vec{AE} \perp \vec{GD}$ .



**BΘ/93.** Αν  $\vec{\alpha} = (\lambda, \lambda - 5)$  και  $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 6)$  ώστε  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$ :

A) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B) Αν  $\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ .

Γ) Βρείτε το  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε το  $\vec{\delta} = (\kappa, \kappa - 6)$  να είναι παράλληλο στο  $\vec{\gamma}$ .

**BΘ/94.** Αν  $\vec{\alpha} = (1, 2)$  και  $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (7, -1)$ :

A) Βρείτε το  $\vec{\beta}$ .

B) Δείξτε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

Γ) Βρείτε το  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta})$ .

Δ) Βρείτε το διάνυσμα  $\vec{x}$  αν  $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$  και  $|\vec{x}| = \sqrt{90}$ .

**BΘ/95.** Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύουν:  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$  και

$\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$ . A) Δείξτε ότι  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -2)$ .

B) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα  $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

Γ) Αναλύστε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (3, -1)$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$ .

(3<sup>ο</sup> Θ. Πανελληνίων 2000)

**ΒΘ/96.** Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και

$$\left( \vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}. \text{ Αν } \vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}. \text{ Να υπολογίσετε:}$$

Α. το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Β. τα μέτρα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .

Γ. το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

Δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .

(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελληνίων 2001)

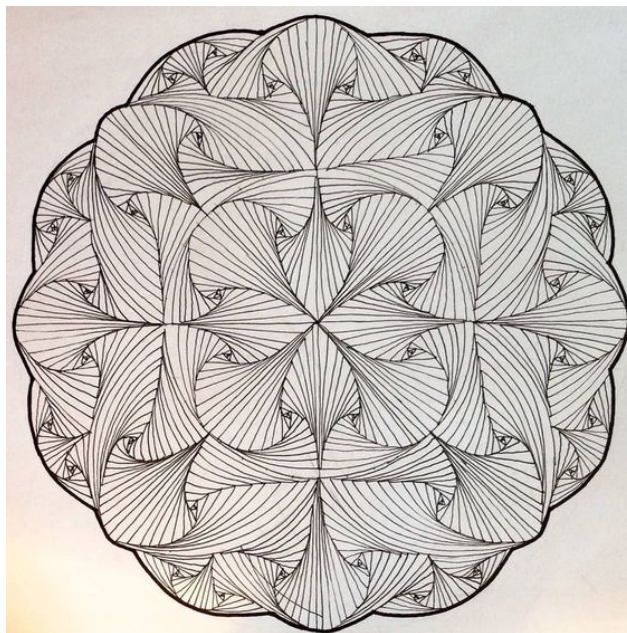
**ΒΘ/97.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, 3)$ .

Α. Βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ .

Β. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το  $\vec{\gamma}$  με τον άξονα  $x'x$ .

Γ. Βρείτε τον αριθμό  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα  $\vec{v} = (k^2 - k, k)$  να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$ .

(2<sup>ο</sup> θέμα Πανελληνίων 2004)



**Ερωτήσεις Σ-Λ στα διανύσματα****Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ)**

1. Αν  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$ , τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
2. Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ , τότε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .
3. Αν  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$ , τότε  $\overrightarrow{AD} = \vec{0}$ .
4. Αν  $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ , τότε  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .
5. Αν  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ , τότε  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .
6. Τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$  είναι ίσα.
7. Αν  $\vec{u} = (x_1, -y_1)$  και  $\vec{v} = (-x_1, y_1)$ , τότε  $\vec{u} = -\vec{v}$ .
8. Το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-2, 2)$  είναι παράλληλο με το  $\vec{\beta} = (3, -3)$ .
9. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα.
10. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσής.
11. Αν  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ , τότε  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) = 2\pi$ .
12. Αν το  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι συγγραμμικό του  $\vec{\alpha}$ , τότε το  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι συγγραμμικό του  $\vec{\beta}$ .
13. Αν  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ , τότε τα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι πάντα συγγραμμικά.
14. Αν  $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$  και  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ , τότε τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  είναι συγγραμμικά.
15. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα  $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{XOY}$ .
16. Αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$ , τότε  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι οξεία.
17. Το  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$  παριστάνει διάνυσμα.
18. Το  $(\lambda \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  παριστάνει διάνυσμα.
19. Το  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\lambda \cdot \vec{\gamma})$   $\lambda \in \mathbb{R}$  παριστάνει διάνυσμα.
20. Το  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})$  είναι διάνυσμα.
21. Για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει:  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ .
22. Για τα ομόρροπα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει:  $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ .
23. Το διάνυσμα  $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $\lambda < 0$  είναι συγγραμμικό του  $\vec{\alpha}$ .
24. Αν  $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε οπωσδήποτε  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ .

25. Η ισότητα  $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$  ισχύει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
26. Αν  $\kappa \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$ , τότε  $\kappa = \lambda$  για κάθε διάνυσμα  $\vec{a}$ .
27. Ισχύει η ισοδυναμία:  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$  μέσο του  $\overline{AB}$ .
28. Αν  $\kappa \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  και  $\vec{a}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά, τότε:  $\kappa = \lambda = 0$ .
29. Αν  $\kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{\beta} = \vec{0}$  και  $\vec{a}, \vec{\beta}$  μη συγγραμμικά, τότε  $\kappa = \lambda = 0$ .
30. Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  τέτοια ώστε  $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  ορίζεται τρίγωνο.
31. Αν  $AM$  διάμεσος τριγώνου  $AB\Gamma$  τότε  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}}{2}$ .
32. Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του.
33. Αν  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$  όπου  $A, B$  σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του  $M$  είναι η μεσοκάθετη ευθεία του  $AB$ .
34.  $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$
35.  $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ .
36. Μπορούμε να γράφουμε:  $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ .
37.  $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$
38. Αν  $\vec{a} = (3, 5)$  και  $\vec{\beta} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$  τότε  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ .
39. Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$  τότε είναι πάντα  $(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq \frac{\pi}{2}$ .
40. Τα διανύσματα  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$  και  $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$  είναι κάθετα.
41. Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευθύνσεως είναι ομόρροπα.
42. Αν  $\vec{a} = (1, -3)$ ,  $\vec{\beta} = (-1, -3)$  και  $\vec{\gamma} = (2, -6)$  είναι  $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .
43. Τα ζεύγη  $\vec{a}, \vec{\beta}$  και  $-\vec{a}, -\vec{\beta}$  των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα.
44. Αν είναι  $(\vec{a}, \vec{\beta}) > \frac{\pi}{2}$ , τότε  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$ .
45. Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα.
46. Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$  και  $\vec{a} \neq \vec{0}$  τότε είναι  $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .
47. Αν  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$  τότε  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

48.  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$  αν και μόνο αν  $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$  με  $\lambda > 0$ .
49.  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  αν και μόνο αν  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$
50. Αν  $\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{AG}$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$  τότε τα A,B,G είναι συνευθειακά.
51. Ισχύει:  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ .
52. Ισχύει:  $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
53. Ισχύει: Αν  $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$  τότε  $AB \parallel \Gamma\Delta$
54. Τα διανύσματα  $\vec{u} = (-x, y)$  και  $\vec{v} = (x, -y)$  είναι παράλληλα.
55. Αν  $\vec{v} = (x, 0)$ , τότε  $\vec{v} \parallel x'x$ .
56. Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  τότε  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ .
57. Αν  $|\vec{AM}| = |\vec{MB}|$  το M είναι πάντα το μέσο του AB.
58. Ισχύει:  $\sqrt{-2} \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ .
59. Το  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$  είναι αριθμός.
60.  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$  για κάθε  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .
61.  $|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ .
62. Αν  $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$  τότε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$  ή  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ .



M. C. Escher

# Ευθεία

" Όσοι δεν γνωρίζουν μαθηματικά είναι δύσκολο να νιώσουν την ουσία και την ομορφιά, τη βαθύτερη ομορφιά της φύσης "

Richard Feynman

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

### Μορφές εξίσωσης ευθείας

Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας:  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $|A| + |B| \neq 0$ .

Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ :  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$

Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων :  $\varepsilon: y = \lambda x$ .

Εξίσωση ευθείας παράλληλης στον  $x'x$ :  $\varepsilon: y = y_0$

Εξίσωση ευθείας κάθετης στον  $x'x$ :  $\varepsilon: x = x_0$

Εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  που διέρχεται από το γνωστό σημείο  $A(x_0, y_0)$ :  $\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .

Η  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ :

- ♦ Είναι ευθεία αν  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ .
- ♦ Είναι παράλληλη στον  $x'x$  αν  $A = 0$  (και  $B \neq 0$ ).
- ♦ Είναι παράλληλη στον  $y'y$  αν  $B = 0$  (και  $A \neq 0$ ).
- ♦ Διέρχεται από το  $O(0,0)$  αν  $\Gamma = 0$ .

### Πώς βρίσκω το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας $\varepsilon$ :

A) Αν σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $\theta$  τότε  $\lambda = \tan \theta$

B) Αν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία της τότε  $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

Γ) Αν είναι παράλληλη σε γνωστή ευθεία  $\delta$  ή διάνυσμα  $\vec{\delta}$  τότε  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\delta$ .

Δ) Αν είναι κάθετη σε γνωστή ευθεία  $\delta$  ή διάνυσμα  $\vec{\delta}$  τότε  $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1$ .

E) Αν  $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$  τότε:  $\lambda_\varepsilon = \alpha$ .

ΣΤ) Αν  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  τότε:  $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B}$ .

### Πώς βρίσκω που μια ευθεία τέμνει τους άξονες;

Για να βρω που μια ευθεία τέμνει τον  $yy'$  λύνω το σύστημα που συγκροτούν η εξίσωση της και η  $x = 0$ .

Για να βρω που μια ευθεία τέμνει τον  $x'x$  λύνω το σύστημα που συγκροτούν η εξίσωσή της και η  $y = 0$ .



**Πώς βρίσκω αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία ε;**

Για να δω αν ένα σημείο  $A(x_1, y_1)$  ανήκει σε μια ευθεία  $\varepsilon$ , θέτω στην εξίσωσή της όπου  $x$  το  $x_1$  και όπου  $y$  το  $y_1$ . Αν η σχέση που προκύπτει είναι αληθής, τότε το  $A$  ανήκει στην  $\varepsilon$ , ενώ αν είναι ψευδής δεν ανήκει.

**Πώς βρίσκω πού τέμνονται δύο ευθείες;**

Για να βρώ που τέμνονται δύο ευθείες, λύνω το σύστημα που συγκροτούν οι εξισώσεις τους.

Αν το σύστημα έχει μία λύση, αυτή είναι το σημείο τομής τους.

Αν δεν έχει λύση, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Αν έχει άπειρες λύσεις τότε ταυτίζονται.

**Πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες;**

Δύο ευθείες είναι παράλληλες αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ .

Επίσης δύο ευθείες είναι παράλληλες αν δεν ορίζεται και για τις δύο ο συντελεστής διεύθυνσης (οπότε είναι κάθετες στον  $xx'$ )

**Πότε δύο ευθείες είναι κάθετες;**

Δύο ευθείες είναι κάθετες αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους ισούται με  $-1$ , δηλ.  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ .

Επίσης είναι κάθετες αν η μια τους έχει συντελ. διεύθυνσης μηδέν και της άλλης δεν ορίζεται.

**Σχέση ευθείας - διανύσματος**

Η ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$  και κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta}' = (A, B)$ .

**Πώς βρίσκω τη γωνία δύο ευθειών;**

Για να βρώ τη γωνία των ευθειών  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  και

$\varepsilon': A'x + B'y + \Gamma' = 0$  βρίσκω τη γωνία των παράλληλών τους διανυσμάτων

των  $\vec{\delta} = (B, -A)$  και  $\vec{\delta}' = (B', -A')$  με τον τύπο:  $\text{συν}\left(\vec{\delta}, \vec{\delta}'\right) = \frac{\vec{\delta} \cdot \vec{\delta}'}{|\vec{\delta}| \cdot |\vec{\delta}'|}$

**Πώς βρίσκω την απόσταση σημείου από ευθεία;**

Η απόσταση του σημείου  $M(x_1, y_1)$  από την ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$

δίνεται από τον τύπο  $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

**Πώς βρίσκω το εμβαδόν τριγώνου;**

Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $\Gamma(x_3, y_3)$  δίνεται από τον τύπο  $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \right|$  όπου  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$  η ορίζουσα των συντεταγμένων των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ .

**Πώς αποδεικνύω ότι η  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι εξίσωση ευθείας;**

Αρκεί να δείξω ότι  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ , οπότε θεωρώ ότι  $A = B = 0$  και καταλήγω σε άτοπο.

**Ποιες ευθείες περνούν από το σημείο  $A(x_0, y_0)$ ;**

Από το  $A(x_0, y_0)$  περνούν οι ευθείες  $\varepsilon: y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ , αλλά και η ευθεία  $\delta: x = x_0$  που δεν περιλαμβάνεται στις παραπάνω αφού δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της.

**Ασκήσεις**

**BI/01.** Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας  $\varepsilon$  και η γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  όταν :

α) Διέρχεται από τα σημεία  $A(2, -1)$  και  $B(2, 5)$ .

β) Διέρχεται από τα σημεία  $\Delta(-2, 7)$  και  $E(3, 2)$

γ) Είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (1, -\sqrt{3})$ .

**BI/02.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(2, 1)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{3}{2}$ .

**BI/03.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 3)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-1, 3)$ .

**BI/04.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(3, -1)$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\alpha: y = 2x - 1$ .

**BI/05.** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A(5, 2)$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\pi/3$ .

**BI/06.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 1)$  και  $B(4, 3)$ .

**BI/07.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 4)$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $(\eta): y = \frac{1}{2}x + 2$ .

**BI/08.** Δίνεται το σημείο  $A(2, 1)$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = x + 1$ .

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το  $A$  και:

A) είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ .

B) είναι κάθετη στην  $(\varepsilon)$ .

Γ) είναι κάθετη στον άξονα  $y'y$ .

Δ) σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$ .

Ε) σχηματίζει με τον άξονα  $y'y$  γωνία  $\hat{\theta} = \frac{\pi}{6}$ .

ΣΤ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**ΒΙ/09.** A) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A(1,2)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

B) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία:  $\varepsilon: x - y + 4 = 0$  με τον άξονα  $x'x$ .

Γ) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(4,3)$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{3\pi}{4}$ .

**ΒΙ/10.** Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A(3,-2)$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $yy'$ .

**ΒΙ/11.** Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το  $A(3,2)$  και είναι κάθετη στο τμήμα  $AB$  με  $B(-1,3)$ .

**ΒΙ/12.** Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε οι  $\varepsilon: y = \frac{\lambda+3}{2}x - 1$  και  $\delta: y = \frac{\lambda-1}{3}x + 4$  να είναι παράλληλες.

**ΒΙ/13.** A) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε οι ευθείες  $\varepsilon: y = \frac{\lambda-1}{3}x - 5$  και

$\delta: y = -\frac{\lambda}{2}x + 1$  να είναι κάθετες.

B) Να βρεθούν οι τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε οι ευθείες  $\varepsilon_1: y = (\mu - 3)x + 1$  και  $\varepsilon_2: y = \left(2 - \frac{\mu}{2}\right)x + \mu$ , να είναι κάθετες.

**ΒΙ/14.** Δίνονται τα σημεία  $A(-2,2)$ ,  $B(8,12)$  και  $\Gamma(-10,6)$ .

A) Να δείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου.

B) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $AB$ .

Γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους  $AD$ .

Δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BM$ .

Ε) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς  $AB$ .

**ΒΙ/15.** Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$ ,  $B(3,-1)$  και  $\Gamma(5,7)$ .

A) Να δείξετε ότι είναι κορυφές τριγώνου.

B) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $AB$ .

Γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους  $AD$ .

Δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BM$ .

Ε) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς  $AB$ .

**ΒΙ/16.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(-3,3)$ ,  $B(1,5)$  και  $\Gamma(3,3)$ . Βρείτε τις εξισώσεις των υψών του.

**ΒΙ/17.** Αν  $A(3,-2)$ ,  $B(4,3)$  και  $\Gamma(-2,5)$  βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$  καθώς και της διαμέσου  $AM$ .

**ΒΙ/18.** Αν  $\varepsilon: y = \frac{1}{3}x - 2$  βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(2,2)$  και είναι κάθετη στην  $\varepsilon$ . Στην συνέχεια προσδιορίστε το σημείο τομής τους.

**ΒΙ/19.** Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: x - y + 1 = 0$  και το σημείο  $A(3,2)$ .

Βρείτε το συμμετρικό του  $A$  με άξονα συμμετρίας την  $\varepsilon$ .

**ΒΙ/20.** Να βρεθεί η προβολή του σημείου  $P(4,4)$  πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(2,3)$ . Βρείτε επίσης το συμμετρικό του  $P$  ως προς την ευθεία  $AB$ .

**ΒΙ/21.** Βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος  $AB$  με  $A(-1,2)$  και  $B(3,-2)$ .

**ΒΙ/22.** Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  τα οποία ισαπέχουν από τα σημεία:  $A(0,2)$  και  $B(2,-1)$ .

**ΒΙ/23.** Σε τρίγωνο δίνονται οι κορυφές του  $A(2,1)$  και  $B(4,-1)$ .

Αν το ορθόκεντρό του είναι το  $H(3,5)$ , να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

**ΒΙ/24.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(2,1)$ ,  $B(-1,-1)$  και  $\Gamma(-3,2)$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις του ύψους  $BD$ , της διαμέσου  $AM$  και της μεσοκαθέτου της πλευράς  $B\Gamma$ .

**ΒΙ/25.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(2,5)$ ,  $B(5,3)$  και  $\Gamma(3,-1)$ . Βρείτε τα μέσα των πλευρών του και τις εξισώσεις των διαμέσων του.

**ΒΙ/26.** Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το  $A(2,1)$  και είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (2,-1)$ . Ποιο σημείο αυτής της ευθείας είναι πλησιέστερο στο  $O(0,0)$ ;

**ΒΙ/27.** Έστω  $\varepsilon$  η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{u} = (1,4)$ . Βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$ . Βρείτε το σημείο της ευθείας  $\varepsilon$  που είναι πλησιέστερο στο σημείο  $O(0,0)$ .

**ΒΙ/28.** Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το  $A(-1,-3)$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\alpha: y = \frac{2}{3}x - 1$ . Στη συνέχεια βρείτε το σημείο  $\Sigma$  της ευθείας που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το  $O(0,0)$

**ΒΙ/29.** Έστω  $A(-3,-1)$  και  $B(2,2)$  κορυφές παρ/μου  $AB\Gamma\Delta$  και  $M(3,0)$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του παραλληλογράμμου.

**ΒΙ/30.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1,2)$ . Αν οι ευθείες  $\varepsilon_1: x - y - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: 3x + y + 5 = 0$ , είναι μεσοκάθετες των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών  $B$  και  $\Gamma$ .

**ΒΙ/31.** Δίνονται οι  $\varepsilon_1: x + y - 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: x + 3y - 4 = 0$  ευθείες και το σημείο  $A(4,3)$ . Να βρεθεί σημείο  $B$  της  $\varepsilon_1$  ώστε η  $\varepsilon_2$  να περνά από το μέσο του  $AB$ .

**ΒΙ/32.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1,3)$  και έστω  $3x - y + 2 = 0$  και  $2x - y - 7 = 0$  οι εξισώσεις δύο υψών του τριγώνου. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $B$  και  $\Gamma$ .

**ΒΙ/33.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\varepsilon$ ) που είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\eta$ ):  $y = -3x + 2014$  και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 24 τ.μ.

**ΒΙ/34.** Έστω  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο με σημείο τομής των διαγωνίων του το  $K(-4,2)$ . Αν  $AB: x - y - 2 = 0$  και  $B\Gamma: 2x + y - 4 = 0$ , βρείτε το σημείο  $\Delta$  καθώς και τις εξισώσεις των  $A\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ .

**ΒΙ/35.** Α) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(6,2)$  και τις εξισώσεις δύο υψών του:  $\upsilon_1: 2x + y - 4 = 0$  και  $\upsilon_2: x - y + 1 = 0$ . Βρείτε τις κορυφές  $B$ ,  $\Gamma$ .

Β) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1,2)$  και τις εξισώσεις δύο διαμέσων του:  $\mu_1: x - 3y + 1 = 0$  και  $\mu_2: y = 1$ . Βρείτε τις κορυφές  $B$ ,  $\Gamma$ .

**ΒΙ/36** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $K(4,4)$  είναι το μέσο της  $AB$ ,  $A\Delta: x - 2y + 2 = 0$  το ύψος του και  $AM: 4x - y + 8 = 0$  η διάμεσός του. Βρείτε τις συντεταγμένες του  $A$ , του  $B$ , την εξίσωση της  $B\Gamma$  και τις συντεταγμένες των  $M$  και  $\Gamma$ .

**ΒΙ/37.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $A(1,3)$  και σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

**ΒΙ/38.** Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: 2x - 3y + 6 = 0$ . Βρείτε την συμμετρική της ευθεία ως προς τον άξονα  $x'x$ , ως προς τον άξονα  $y'y'$  και ως προς το  $O(0,0)$ .

**ΒΙ/39.** Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: x + y\sqrt{3} + 1 = 0$ . Βρείτε τη συμμετρική της ως προς τον άξονα  $x'x$ , καθώς και την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες.

**ΒΙ/40.** Α) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:  
 $\varepsilon: x - 7y + 2 = 0$  και  $\eta: 3x + 4y - 1 = 0$ .

Β) Όμοια για τις ευθείες:  $\varepsilon_1: x - 3y + 6 = 0$  και  $\varepsilon_2: 4x - 2y + 5 = 0$

Γ) Όμοια για τις:  $\varepsilon_1: (\mu + 1)x + y - 3 = 0$  και  $\varepsilon_2: (\mu + 2)x - \mu y - 7 = 0$

Δ) Όμοια για τις:  $\varepsilon_1: 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0$  και  
 $\varepsilon_2: (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 2\mu = 0$ .

Ε) Όμοια για τις:  $\varepsilon_1: y = \mu x + 1$  και  $\varepsilon_2: (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - 2 = 0$

**ΒΙ/41.** Α) Δίνονται οι ευθείες  $y = 2x + 1$  και  $y = -x - 3$ . Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $M(3,2)$  και τέμνει αυτές στα Α και Β, ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

Β) Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: x + 2y - 2 = 0$  και  $\varepsilon_2: 2x - y + 1 = 0$ . Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $M(2,1)$  και τέμνει αυτές στα Α και Β, ώστε να ισχύει:  $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{MB}$ .

**ΒΙ/42.** Αν η ευθεία  $(\varepsilon): y = (2\lambda - 3)x + 3\lambda - 1$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ :  
 Α) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Β) Βρείτε τα σημεία που η  $(\varepsilon)$  τέμνει τους άξονες καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται.

Γ) Βρείτε ευθεία  $(\eta)$  παράλληλη στην  $(\varepsilon)$  που να διέρχεται από το σημείο  $A(3,2)$ .

### Ασκήσεις μεταβλητού σημείου

**ΒΙ/43.** Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M(\lambda - 1, 2\lambda + 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Β) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M\left(2 - t, \frac{1 + 2t}{3}\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Γ) Όμοια για το σημείο  $N\left(\frac{3\alpha - 1}{2}, \frac{1 - 2\beta}{3}\right)$  αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\alpha + 2\beta = 1$ .

Δ) Όμοια για το  $P(2 + \eta\mu^2\theta, 3 - 2\sigma\nu\nu^2\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Ε) Όμοια για το  $\Sigma\left(\frac{4 + \eta\mu^2\theta}{2}, \frac{2 - \sigma\nu\nu^2\theta}{2}\right)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

ΣΤ) Όμοια για το  $M\left(2\sigma\nu\nu^2\theta, \frac{3 - \sigma\nu\nu^2\theta}{2}\right)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**ΒΙ/44.** Αν το σημείο  $A(\alpha, \beta)$  ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon): x - y + 2 = 0$  βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M(2\alpha - 3, \beta + 2)$ .

Ποιό σημείο του γεωμετρικού τόπου είναι πλησιέστερο στο  $\Sigma(1, 1)$ ;

**ΒΙ/45.** Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M(\lambda - 1, 2\lambda)$ ,  $\lambda \geq 0$ .

Β) Όμοια για το σημείο  $N(3\lambda, 2)$  αν  $0 \leq \lambda \leq 6$ .

Γ) Όμοια για το  $P(1, \lambda^2 + 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Δ) Όμοια για το  $\Sigma(\eta\mu\lambda, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**ΒΙ/46.** Αν  $P(\lambda - 2, \mu + 2)$  και  $\Sigma(\mu, \lambda)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , δύο σημεία:

Α) δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του μέσου  $M$  του  $PS$  είναι ευθεία έστω  $\varepsilon$ .

Β) αποδείξτε ότι  $PS \perp \varepsilon$ .

**ΒΙ/47.** Αν  $A(\lambda - 1, 2)$ ,  $B(2\lambda - 3, \lambda + 1)$ ,  $\Gamma(3\lambda, 2\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  να βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων  $M$  αν  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$ .

**ΒΙ/48.** Α) Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1, 3)$ ,  $B(5, 7)$  και  $\Gamma(3\lambda - 1, 4\lambda - 1)$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . α) Δείξτε ότι  $\lambda \neq 2$ , βρείτε το σημείο  $G$  αν  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$  (βαρύκεντρο του τριγώνου) και δείξτε ότι το  $G$  κινείται σε ευθεία, καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ .

Β) Δίνονται τα σημεία  $A(-\lambda, 2)$ ,  $B(-1, \lambda)$ ,  $\Gamma(\lambda, 3\lambda)$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι:

α) Τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου για κάθε  $\lambda$ .

β) Βρείτε το σημείο  $G$  αν  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$  (βαρύκεντρο) και να αποδείξετε ότι κινείται σε ευθεία, καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ .

**ΒΙ/49.** Α) Αν το σημείο  $A$  κινείται στην ευθεία  $\delta: x - 2y + 3 = 0$  και  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$  με  $B(2, 1)$ , βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M$ .

Β) Αν το σημείο  $A$  κινείται στην ευθεία  $\delta: 3x - y - 1 = 0$  και  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$  με  $B(1, 2)$ , βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M$ .

**ΒΙ/50.** Α) Αν  $A(1, 2)$  και το σημείο  $P$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon: 2x + y - 1 = 0$  και  $M$  το μέσο του  $AP$ , βρείτε το γεωμ. τόπο του  $P$ .

B) Αν  $AB\Gamma$  τρίγωνο με  $B(1,1)$ ,  $\Gamma(3,5)$  και  $A(2\kappa-1, \kappa+2)$ .

i) Βρείτε το γεωμ. τόπο του  $A$ .

ii) Αν  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$  βρείτε το γεωμ. τόπο του βαρύκεντρου  $G$  του  $AB\Gamma$ . (Ισχύει:  $\overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$ ).

Γ) Αν το σημείο  $P$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon: x + y - 3 = 0$  και  $A(1, -1)$  βρείτε το γεωμ. τόπο του  $M$  αν  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AP}$ .

### Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

**BI/51.** Θεωρώ την εξίσωση  $\mu(x + y) + 2(\mu - x) + 3y - 1 = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

A) Δείξτε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$ .

B) Βρείτε τα  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

Γ) Βρείτε τα  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ .

Δ) Βρείτε τα  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία να διέρχεται από το  $O(0,0)$ .

E) Βρείτε τα  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία να είναι κάθετη στην  $(\eta): x - 2y - 1 = 0$ .

**BI/52.** Δίνεται η εξίσωση  $(\varepsilon): (\mu^2 - 1)x + (\mu^2 - 3\mu + 2)y + \mu - 5 = 0$ .

A) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ .

**BI/53.** Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon: (\mu - 3)x + (\mu + 1)y + 2 = 0$  και

$\zeta: (\mu - 1)x - (2\mu - 1)y + \mu = 0$  αντίστοιχα.

A) Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του  $\mu \in \mathbb{R}$ .

B) Να βρεθούν οι τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε οι  $\varepsilon$  και  $\zeta$  να είναι παράλληλες.

**BI/54.** Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon: (\mu - 1)x + (\mu - 4)y + 3 = 0$  και

$\delta: (\mu - 2)x + (3\mu - 7)y + 2\mu = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

A) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες για κάθε τιμή του  $\mu \in \mathbb{R}$ .

B) Βρείτε τις τιμές του  $\mu$ , ώστε οι ευθείες αυτές να είναι κάθετες.

**BI/55.** Δίνεται η εξίσωση  $(2\lambda + 3)x + (3\lambda - 3)y - (2\lambda + 3) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Να αποδειχθεί ότι παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$ .

B) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**BI/56.** Δίνεται η εξίσωση  $3x + 2y + 7 + \lambda(x - 2y + 5) = 0$ .

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



B) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

**BI/57.** Δίνεται η εξίσωση  $(2\lambda^2 + \lambda + 1)x + (\lambda^2 - \lambda + 1)y - \lambda^2 - 2\lambda = 0$ .

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B) Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

Γ) Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η ευθεία ( $\varepsilon$ ) που έχει εξίσωση την παραπάνω, να είναι κάθετη στην ευθεία ( $\eta$ ):  $x - 2y + 3 = 0$ .

**BI/58.** Δίνεται η εξίσωση:  $(\alpha^2 - 2\alpha + 3)x + (\alpha^2 + \alpha + 2)y + 3\alpha - 1 = 0$ .

Δείξτε ότι:

A) Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  παριστάνει ευθεία.

B) Τέμνει τους άξονες για κάθε  $\alpha$ , και

Γ) Όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**BI/59** Δίνεται η εξίσωση  $(x + y - 5) + \lambda(2x + y - 7) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$

B) Δείξτε επίσης ότι η ευθεία με την παραπάνω εξίσωση διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**BI/60.** Αν  $\varepsilon: (\lambda^2 + 2\lambda + 2)x + (2\lambda^2 + 3\lambda + 3)y - 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

A) Να δειχθεί ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

B) Δείξτε ότι για κάθε  $\lambda$  η ευθεία τέμνει την  $\varepsilon': 2x + y - 5 = 0$ .

**BI/61.** Δείξτε ότι η  $(\lambda^2 - \lambda - 2)x + (\lambda^2 + 2\lambda - 3)y + \lambda^2 - 9 = 0$  είναι μια εξίσωση που παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η ευθεία αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

**BI/62.** Δείξτε ότι η  $(\kappa - 1)x + (\lambda^2 - \kappa\lambda + 1)y + \kappa - 2 = 0$  είναι μια εξίσωση που παριστάνει ευθεία για κάθε  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ . Βρείτε τα  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το  $O(0,0)$  και να σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{3\pi}{4}$ .

**BI/63.** Δίνεται η εξίσωση  $\varepsilon_\lambda: 2x + y - 2 + \lambda(x - y + 5) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Αποδείξτε ότι η παραπάνω παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$  και οι ευθείες  $\varepsilon_\lambda$  διέρχονται από σταθερό σημείο.

B) Βρείτε ποια από τις παραπάνω είναι κάθετη στην  $\varepsilon: x + 2y - 4 = 0$ .

**BI/64.** Δίνεται η εξίσωση  $\varepsilon_\lambda: (\lambda - 3)x + \lambda y - 2\lambda + 3 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Αποδείξτε ότι η παραπάνω παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$  και οι ευθείες  $\varepsilon_\lambda$  διέρχονται από σταθερό σημείο .

B) Βρείτε ποια από τις παραπάνω απέχει από το  $M(0,2)$  απόσταση  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

**BI/65.** Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : (\lambda + 1)x + 2\lambda y = 2\lambda$  και  $\varepsilon_2 : x + 2y = 3$ .

Αποδείξτε ότι : A) Οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο P για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B) Το σημείο P κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**BI/66.** Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1) : \lambda x + (2 - \lambda)y - 1 = 0$ ,

$(\varepsilon_2) : (\lambda - 1)x + (\lambda + 3)y - 14 = 0$  και  $(\varepsilon_3) : \mu x + (\mu - 1)y - 4 = 0$ .

A) Αν οι  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  είναι κάθετες, βρείτε το  $\lambda$ .

B) Αν οι  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ ,  $(\varepsilon_3)$  διέρχονται από το ίδιο σημείο, βρείτε το  $\mu$ .

Γ) Για τις παραπάνω τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_3)$ .

**BI/67.** Βρείτε το γεωμ. τόπο των σημείων  $M(x,y)$  για τα οποία ισχύει:

A)  $x^2 + y^2 - 2xy - 3x + 3y + 2 = 0$       B)  $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

Γ)  $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 = 0$       Δ)  $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2 = 0$

**BI/68.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες κάθετες .

**BI/69.** Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων  $M(x,y)$  τέτοια που  $y^2 - 2kxy - x^2 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$  παριστάνει δύο ευθείες κάθετες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων .

**BI/70.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους .

**BI/71.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες.

**BI/72.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $6x^2 - xy - y^2 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες και βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

**BI/73.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - xy - 6y^2 - 3x + 14y - 4 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες και βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

**BI/74.** Δίνεται η εξίσωση  $3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0$ .

Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες και να βρείτε την οξεία γωνία που αυτές σχηματίζουν.

**BI/75.**Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου τομής των ευθειών:

$\varepsilon: 2x - y + \alpha = 0$  και  $\delta: x - y + 2\alpha - 1 = 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ποιο σημείο αυτής της ευθείας απέχει τη μικρότερη απόσταση από το  $O(0,0)$ ;

**BI/76.**Δείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - y^2 - 2\alpha x + 4\alpha y - 3\alpha^2 = 0$  παριστάνει δύο κάθετες ευθείες για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Δείξτε επίσης ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία.

**BI/77.**Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon): \lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda - 1$  και  $(\eta): (\lambda + 2)x + \lambda y = \lambda$ .

Να δείξετε ότι οι δύο ευθείες τέμνονται για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Βρείτε επίσης το γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής τους.

### Απόσταση σημείου από ευθεία

**BI/78.**Να βρεθεί η απόσταση του σημείου  $M(1,3)$  από την ευθεία  $3x - 4y - 11 = 0$ .

**BI/79.**Να βρεθούν οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $A(1,2)$  και απέχουν από το σημείο  $B(3,1)$  απόσταση  $d = 2$ .

**BI/80.**Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία  $3x - 4y + 5 = 0$  και απέχουν από το σημείο  $A(2,3)$  απόσταση  $d = 3$ .

**BI/81.**Βρείτε τα σημεία της ευθείας  $(\eta): x + y - 2 = 0$  που απέχουν από την ευθεία  $(\varepsilon): 3x + 4y - 10 = 0$  απόσταση 2.

**BI/82.**Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $P(0,1)$  και από την οποία ισαπέχουν τα σημεία  $A(1,3)$  και  $B(-3,1)$ .

**BI/83.**Βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών  $(\varepsilon): x + 2y - 6 = 0$  και  $(\eta): x + 2y + 17 = 0$ .

**BI/84.**A)Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών  $3x - y + 7 = 0$  και  $3x - y - 3 = 0$ .

B) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών:  $\varepsilon_1: x - 2y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: 2x - 4y + 3 = 0$ .

**BI/85.**A) Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon): 3x + 4y - 1 = 0$  και  $(\eta): 5x - 12y + 1 = 0$ .

B) Να βρεθούν οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon): x + 2y - 5 = 0$  και  $(\eta): 2x + y - 7 = 0$ . Ποια είναι η διχοτόμος της

οξείας γωνίας; (Πάρτε ένα σημείο σε μια από τις πλευρές και υπολογίστε την απόστασή του από τις διχοτόμους. Η μικρότερη απόσταση αντιστοιχεί στη διχοτόμο της οξείας γωνίας)

**ΒΙ/86.** Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : x - 2y - 4 = 0$  και το σημείο  $A(4,1)$ . Να βρείτε σημείο  $M$  του άξονα  $yy'$  που ισαπέχει από το  $A$  και την  $\varepsilon$ .

### Εμβαδόν τριγώνου

**ΒΙ/87.** Α) Αν  $A(3,4)$ ,  $B(0,1)$ ,  $\Gamma(4,2)$  βρείτε το  $E_{AB\Gamma}$ .

Β) Αν  $A(x,0)$ ,  $B(1,2)$ ,  $\Gamma(4,3)$  βρείτε το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $E_{AB\Gamma} = \frac{3}{2}$ .

**ΒΙ/88.** Σ' ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $A(2,3)$ ,  $B(5,4)$  και  $\Delta(-4,-1)$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής  $\Gamma$  και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

**ΒΙ/89.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $A(8,3)$ ,  $B(6,-1)$  και  $\Gamma(-3,1)$ .

Α) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Β) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , όπου  $\Delta(-2,-1)$ .

Γ) Να βρείτε σημείο  $M$  του άξονα  $x'x$  ώστε το τρίγωνο  $ABM$  να έχει εμβαδόν 7 τ.μ.

**ΒΙ/90.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A(1,1)$ ,  $B(2,3)$  και  $\Gamma(\lambda - 1, \lambda^2 + 1)$ .

Α) Αποδείξτε ότι τα  $A, B, \Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Β) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $(AB\Gamma) = 6$ .

**ΒΙ/91.** Βρείτε ευθεία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\pi/4$  και με τους δύο άξονες τρίγωνο εμβαδού 2 τ.μον.

**ΒΙ/92.** Βρείτε ευθεία παράλληλη στην  $\eta : 2x + y + 2 = 0$  που να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4 τ. μον.

**ΒΙ/93.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $A(1,3)$  και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 2 τ.μ..

**ΒΙ/94.** Δίνεται το σημείο  $A(1,2)$ . Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A$  και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση  $d = 1$ .

**ΒΙ/95.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(t - 2)x - (1 + 2t)y + 2 - t = 0$  παριστάνει ευθεία ( $\varepsilon$ ) για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο. Για ποια τιμή του  $t$  η απόσταση του σημείου  $M(2,2)$  από την ( $\varepsilon$ ) είναι 2 μονάδες;

**ΒΙ/96.** Δίνεται η εξίσωση  $y^2 + 4x^2 - 4xy - 2y + 4x - 3 = 0$ . Δείξτε ότι παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και βρείτε την απόστασή τους.

**ΒΙ/97.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2xy + kx - ky = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$

A) Δείξτε ότι παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και βρείτε την απόστασή τους.

B) Βρείτε το  $k \in \mathbb{R}$  αν οι δύο ευθείες απέχουν απόσταση  $2\sqrt{2}$ .

Γ) Αν  $k = 4$  βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλου των δύο ευθειών.

**ΒΙ/98.** Βρες τα  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ώστε οι ευθείες  $(\varepsilon): 2\mu x + y + \lambda = 0$  και  $(\eta): \lambda x + y - 3 = 0$  να είναι παράλληλες και να έχουν απόσταση  $\sqrt{5}$ .

**ΒΙ/99.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - y^2 + 4\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda^2 = 0$ .

A) Δείξτε ότι παριστάνει δύο κάθετες ευθείες.

B) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου τομής τους.

**ΒΙ/100.** Να βρεθεί ευθεία  $\varepsilon$  που περνά από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με την ευθεία  $x + y = 3$  και τον  $xy$  τρίγωνο εμβαδού 9 τ.μ. .

**ΒΙ/101.** Δύο πλευρές ενός τετραγώνου έχουν εξισώσεις  $5x - 12y - 65 = 0$  και  $5x - 12y + 26 = 0$ . Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

**ΒΙ/102.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $B(7,4)$  και  $\Gamma(5,1)$ .

Αν  $A(2\kappa - 3, 3\kappa + 1)$  να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του  $A$ .

Κατόπιν ναδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό.

**ΒΙ/103.** Αν  $A(t, 2t + 3)$ ,  $B(1,1)$  και  $\Gamma(3,5)$  βρες το γ. τόπο του  $A$  και δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι σταθερό.

**ΒΙ/104.** Αν  $A(1,1)$ ,  $B(3, t + 4)$ ,  $\Gamma(t + 2, 2t)$  και  $\Delta(t, t - 3)$  να αποδειχθεί ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Βρείτε επίσης το  $t \in \mathbb{R}$  ώστε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$  να ισούται με 14 τ.μον..

**ΒΙ/105.** A) Αν  $B(2,3)$ ,  $\Gamma(3,5)$  και το σημείο  $A$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon: 2x - y + 4 = 0$  δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγ.  $AB\Gamma$  είναι σταθερό.

B) Αν  $A(2,1)$ ,  $B(3,4)$  και το σημείο  $\Gamma$  κινείται στην ευθεία  $\varepsilon: 3x - y - 2 = 0$  δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγ.  $AB\Gamma$  είναι σταθερό.

**ΒΙ/106.** A) Αν  $B(1,1)$  και  $\Gamma(5,2)$ , βρείτε σημείο  $A$  της ευθείας  $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$  ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  να είναι 4 τ.μον..

B) Αν  $A(-1,1)$  και  $\Gamma(2,2)$ , βρείτε σημείο  $B$  της ευθείας  $\varepsilon: x - 2y + 1 = 0$  ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  να είναι  $3/2$  τ.μον..

**ΒΙ/107.** A) Αν  $AB\Gamma$  τρίγωνο με  $B(1,1)$ ,  $\Gamma(5,3)$  και  $(AB\Gamma) = 2$  τ. μον. Βρείτε το γεωμ. τόπο του  $A$ .

B) Αν  $AB\Gamma$  τρίγωνο με  $A(1,-1)$ ,  $\Gamma(-2,2)$  και  $(AB\Gamma) = 3/2$  τ. μον. Βρείτε το γεωμ. τόπο του B.

**BI/108.** Δίνονται οι ευθείες  $2x - y - 6 + k(x - y - 4) = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Ναδειχθεί ότι καμία από τις ευθείες της οικογένειας δεν απέχει από το σημείο  $P(3,-1)$  απόσταση ίση με 3.

**BI/109.** A) Βρείτε το σημείο της ευθείας  $\varepsilon: x + y + 3 = 0$  που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο  $O(0,0)$ .

B) Βρείτε το σημείο της ευθείας  $\varepsilon: 2x - y - 1 = 0$  που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο  $A(2,1)$ .

**BI/110.** Δίνεται ορθογώνιο  $OAB\Gamma$  με  $O(0,0)$ ,  $A(t+2, 0)$ ,  $\Gamma(0,t)$  με  $t \in \mathbb{R}$ . Ναδειχθεί ότι η κάθετος που φέρουμε από το B προς την  $A\Gamma$  περνά από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του  $t \in \mathbb{R}$ .

**BI/111.** Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ , η εξίσωση ευθείας  $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας φωτεινός φάρος  $\Phi$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου  $\Phi$ .

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία  $K(2,2)$ ,  $\Lambda(-1,5)$ ,  $M(1,3)$ . Βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ .

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία  $K$  και  $\Lambda$  βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το  $M$ .

δ) Υπολογίστε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο  $\Phi$  και τα πλοία  $\Lambda$  και  $M$ .

(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικές 2000)



# Παραβολή

"Δεν μπορείς να ξεφύγεις από την αίσθηση πως αυτές οι μαθηματικές φόρμουλες έχουν από μόνες τους μια ανεξάρτητη ύπαρξη και μια ευφυΐα, πως είναι σοφότερες από μας, σοφότερες ακόμη από αυτούς που τις ανακάλυψαν, πως παίρνουμε περισσότερα από αυτές, απ' ό,τι ήταν βαλμένο αρχικά μέσα τους"

Heinrich Hertz

## Τυπολόγιο

Με εστίες στον άξονα  $x'x$

| ΠΑΡΑΒΟΛΗ                                                                              | ΕΛΛΕΙΨΗ                                                                                                              | ΥΠΕΡΒΟΛΗ                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Εξίσωση</b><br>$y^2 = 2px$                                                         | <b>Εξίσωση</b><br>$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$<br>με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$             | <b>Εξίσωση</b><br>$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$<br>με $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$             |
| <b>Εστία</b><br>$E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$                                        | <b>Εστίες</b><br>$E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$                                                                      | <b>Εστίες</b><br>$E'(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$                                                                      |
| <b>Διευθετούσα</b><br>$x = -\frac{p}{2}$                                              | <b>Εκκεντρότητα</b><br>$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (0 < \varepsilon < 1)$                             | <b>Εκκεντρότητα</b><br>$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\varepsilon > 1)$                                 |
| <b>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο <math>M(x_1, y_1)</math></b><br>$yy_1 = p(x + x_1)$ | <b>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο <math>M(x_1, y_1)</math></b><br>$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$ | <b>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο <math>M(x_1, y_1)</math></b><br>$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$ |
|                                                                                       |                                                                                                                      | <b>Ασύμπτωτες</b><br>$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$                                                                |

**Με εστίες στον άξονα yy'**

| <b>ΠΑΡΑΒΟΛΗ</b>                                                                       | <b>ΕΛΛΕΙΨΗ</b>                                                                                                       | <b>ΥΠΕΡΒΟΛΗ</b>                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Εξίσωση</b><br>$x^2 = 2py$                                                         | <b>Εξίσωση</b><br>$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$<br>με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$             | <b>Εξίσωση</b><br>$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$<br>με $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$             |
| <b>Εστία</b><br>$E\left(0, \frac{p}{2}\right)$                                        | <b>Εστίες</b><br>$E'(0, -\gamma), E(0, \gamma)$                                                                      | <b>Εστίες</b><br>$E'(0, -\gamma), E(0, \gamma, )$                                                                    |
| <b>Διευθετούσα</b><br>$y = -\frac{p}{2}$                                              | <b>Εκκεντρότητα</b><br>$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (0 < \varepsilon < 1)$                             | <b>Εκκεντρότητα</b><br>$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\varepsilon > 1)$                                 |
| <b>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο <math>M(x_1, y_1)</math></b><br>$xx_1 = p(y + y_1)$ | <b>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο <math>M(x_1, y_1)</math></b><br>$\frac{xx_1}{\beta^2} + \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$ | <b>Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο <math>M(x_1, y_1)</math></b><br>$\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$ |
|                                                                                       |                                                                                                                      | <b>Ασύμπτωτες</b><br>$y = \pm \frac{\alpha}{\beta} x$                                                                |

Για να είναι μια ευθεία εφαπτομένη μιας κωνικής τομής πρέπει το σύστημα ευθεία-κωνική τομή να έχει μοναδική (διπλή) λύση.

(Η λύση του συστήματος καταλήγει στη λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, οπότε απαιτώ:  $\Delta = 0$ ).

**Βασικές εξισώσεις γραμμών**

●  $Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$

Ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης:  $\lambda = -\frac{A}{B}$ .

●  $y = \alpha x + \beta$

Ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης:  $\lambda = \alpha$ .

●  $x = x_0$

Ευθεία κάθετη στον  $x'x$  (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της)



$$\bullet y = y_0$$

Ευθεία παράλληλη στον  $x'x$  με συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 0$

$$\bullet (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Κύκλος κέντρου:  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνας  $\rho$ .

$$\bullet x^2 + y^2 = \rho^2$$

Κύκλος κέντρου:  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho$ .

$$\bullet x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

Κύκλος κέντρου:  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  και ακτίνας  $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$ .

$$\bullet \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Έλλειψη.

$$\bullet \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \quad \text{ή} \quad y = \frac{\alpha}{x} \quad \text{Υπερβολή.}$$

$$\bullet x^2 - y^2 = \alpha^2 \quad \text{ή} \quad y^2 - x^2 = \alpha^2 \quad \text{Ισοσκελής υπερβολή.}$$

$$\bullet y^2 = \alpha x \quad \text{ή} \quad y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{με } \alpha \neq 0 \quad \text{Παραβολή}$$

## Ασκήσεις

**ΒΛ/01.** Βρείτε την εξίσωση της παραβολής, που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x'x$ , στις παρακάτω περιπτώσεις:  
 α) Έχει εστία το  $E(2,0)$   
 β) Έχει διευθετούσα την ευθεία  $x = 3$  γ) Διέρχεται από το σημείο  $A(9,6)$ .

**ΒΛ/02.** Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Έχει εστία  $E(-2\sqrt{3}, 0)$  β) Έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'x$  και περνά από το  $A(8,4)$  γ) έχει διευθετούσα την ευθεία  $y = -1$ .

**ΒΛ/03.**Βρείτε την εξίσωση της παραβολής , που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'$  , στις παρακάτω περιπτώσεις: α) Έχει εστία το  $E(0,-4)$  β) Έχει διευθετούσα την ευθεία  $y=2$  γ) Διέρχεται από το σημείο  $A(4,2)$ .

**ΒΛ/04.**Βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:  
 α)  $y^2 = 6x$  β)  $x^2 = 5y$  γ)  $y^2 = -4x$   
 δ)  $x^2 = -y$  ε)  $y^2 = 8ax$  στ)  $y = \frac{1}{2a}x^2$

**ΒΛ/05.**Α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $C : y^2 = 4x$  στο σημείο της  $A(1,4)$ .

Β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $C : x^2 = 8y$  στο σημείο της  $A(4,2)$ .

**ΒΛ/06.**Δείξτε ότι η ευθεία  $\varepsilon : y = x + 2$  είναι εφαπτομένη στην παραβολή  $C : y^2 = 8x$ .

**ΒΛ/07.**Βρείτε το  $k \in \mathbb{R}$  αν η ευθεία  $\varepsilon : y = x + k$  είναι εφαπτομένη της παραβολής  $C : y^2 = 4x$ .

**ΒΛ/08.**Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $C : y^2 = 4x$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon : y = x + 4$ .

**ΒΛ/09.**Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $C : x^2 = 6y$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon : 2x + y - 1 = 0$ .

**ΒΛ/10.**Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $C : y^2 = 6x$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon : y = -\frac{1}{3}x + 2$ .

**ΒΛ/11.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 16x$  . Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής , που διέρχεται από το  $A(-1,-3)$  .

**ΒΛ/12.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = -2x$  . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής η οποία:

α) είναι παράλληλη στην ευθεία  $\eta : x + y = 1$  .

β) διέρχεται από το σημείο  $A\left(-1, \frac{3}{2}\right)$  γ) διέρχεται από το  $A(-4,3)$

**ΒΛ/13.**Βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής  $C : y^2 = -8x$  που διέρχονται από το  $\Sigma(2,3)$  και αποδείξτε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους .

**ΒΛ/14.**Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων , άξονα συμμετρίας τον  $x'x$  και εφάπτεται στην ευθεία  $y = x + 1$ .

**ΒΛ/15.**Βρείτε την χορδή της παραβολής  $C : y^2 = 4x$  που έχει μέσο το σημείο  $A(3,1)$  .

**ΒΛ/16.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 10x$ . Βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής που έχει μέσο το σημείο  $M(1,1)$  . Βρείτε επίσης το μήκος της χορδής.

**ΒΛ/17.**Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής που σχηματίζει με τον  $x'x$  γωνία  $135^\circ$ . Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής;

**ΒΛ/18.**Έστω η παραβολή  $C : y^2 = 2px$  , με  $p > 0$  και το σημείο της  $M$ . Αν  $E$  η εστία της παραβολής , αποδείξτε ότι ο κύκλος με διάμετρο  $EM$  εφάπτεται του άξονα  $yy'$ .

**ΒΛ/19.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 8x$ . Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής , που απέχει από την εστία της απόσταση  $d = 5$ .

**ΒΛ/20.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 8x$  και η οικογένεια των ευθειών με εξίσωση  $(\lambda - 1)x + \lambda y + 2\lambda - 1 = 0$  ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  . Να βρείτε την ευθεία της οικογένειας , η οποία εφάπτεται της παραβολής .

**ΒΛ/21.** Α) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M(3t^2, -6t)$  και  $P(2t, 4\sqrt{t})$  ,  $t \in \mathbb{R}$  .

Β) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $\Sigma\left(\frac{\eta\mu^2 t - 1}{2}, \text{ συν} t\right)$  ,  $t \in \mathbb{R}$  και

$N(2\eta\mu t, \text{ συν}^2 t - 1)$  ,  $t \in \mathbb{R}$  .

**ΒΛ/22.**Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 6x$ . Αν  $M$  τυχαίο σημείο της να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου  $N$  της χορδής  $OM$  όπου  $O(0,0)$ .

**ΒΛ/23.**Έστω  $C : y^2 = 4x$  παραβολή και το σημείο της  $M$  . Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $P$  αν  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$  με  $O(0,0)$ .

**ΒΛ/24.** Αν  $A(3,0)$  και το σημείο  $M(x_0, y_0)$  κινείται στην παραβολή  $C : x^2 = 4y$  βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινείται το μέσο  $P$  του τμήματος  $AM$ .

**ΒΛ/25.**Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 - 4\alpha x$  και στον άξονα  $yy'$ ,  $\alpha > 0$ .

**ΒΛ/26.**Δίνεται η οικογένεια ευθειών  $\lambda^2 x - \lambda y + 1 = 0$ , όπου  $\lambda \neq 0$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία διέρχεται μία μόνο ευθεία της οικογένειας.

**ΒΛ/27.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 4\alpha x$  και ένα σημείο της  $\Sigma(x_0, y_0)$ . Αν  $T$  η προβολή του  $\Sigma$  στη διευθετούσα, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο  $\Sigma$  είναι μεσοκάθετη στο τμήμα  $TE$ .

**ΒΛ/28.**Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή  $C : y^2 = 4x$  και μία κορυφή του είναι το  $O(0,0)$ . Βρείτε το εμβαδόν του.

**ΒΛ/29.**Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 4\alpha x$  και η εφαπτομένη της  $\varepsilon$  σε ένα σημείο της  $A(x_1, y_1)$ , που τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο  $B$ .

Αποδείξτε ότι  $\hat{AEB} = 90^\circ$ .

**ΒΛ/30.**Θεωρούμε την εξίσωση  $(\mu - 1)x + (\mu + 2)y - 2\mu + 2 = 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

A. Αποδείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$

B. Δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο  $E(2,0)$ .

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το  $O(0,0)$ , εστία το σημείο  $E$ . Να βρεθεί η διευθετούσα της.

Δ. Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) με εξίσωση:  $y = 4x + 12$ .

**ΒΛ/31.**Θεωρώ την παραβολή  $C_1 : y^2 = 2px$  που έχει εστία το κέντρο του κύκλου  $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ . A) Να βρεθεί το  $p$ .

B) Για  $p = 2$  βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που διέρχονται από το σημείο  $A(0,2)$  και μετά προσδιορίστε εκείνη που εφάπτεται και στον κύκλο.

**ΒΛ/32.** Θεωρώ την παραβολή  $C_1 : y^2 = 4x$  και τον κύκλο

$$C_2 : 8x^2 + 8y^2 - 8x - 7 = 0.$$

A) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής  $\varepsilon$ , που διέρχεται από το  $A(1,2)$

B) Δείξτε ότι η παραπάνω ευθεία εφάπτεται και στον κύκλο.

Γ) Βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη των  $C_1, C_2$  που φέρεται από το σημείο τομής της  $\varepsilon$  με τον άξονα  $x'x$ .

Δ) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες.

**ΒΛ/33.** Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 45x$  και το σημείο της  $A(x_1, y_1)$  με  $3x_1 = 2y_1$ . Α) Βρείτε το  $A$ .

Β) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής στο  $A$  και τα σημεία τομής της  $B, \Gamma$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

Γ) Βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο  $OB\Gamma$  κύκλου με  $O(0,0)$ .

Δ) Βρείτε την εξίσωση του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο  $OB\Gamma$  κύκλου.

**ΒΛ/34.** Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της παραβολής  $C : y^2 = 2px$  διάφορο του  $O(0,0)$  και  $N$  η προβολή του στον άξονα  $yy'$ . Να δείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon$  που φέρεται από το  $N$  κάθετη στην ευθεία  $OM$ , περνά από σταθερό σημείο.

**ΒΛ/35.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x - 1$ . **(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2002)**

**ΒΛ/36.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$ .

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι κάθετες.

γ. Να βρείτε ένα σημείο  $M(\kappa, \lambda)$  με  $\kappa > 0$  και  $\lambda > 0$  τέτοιο που το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$  να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και το διάνυσμα  $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$  να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

δ. Γράψτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων  $O$ , άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $M$ . **(3<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2001)**



# Έλλειψη

«και πάντα τα γινωσκόμενα αριθμόν έχοντι . ου γαρ οίον τε ουδέν ούτε νοηθήμεν ούτε γνωσθήμεν άνευ τούτων»  
Φιλόλαος

**BM/01.** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει εστίες τα σημεία  $E'(-3,0)$  ,  $E(3,0)$  και μεγάλο άξονα 10.

**BM/02.** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει τις εστίες της στον άξονα  $yy'$  , έχει κορυφές  $B'(-2,0)$  ,  $B(2,0)$  και μεγάλο άξονα 6.

**BM/03.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $4x^2 + 9y^2 = 36$  παριστάνει έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες

**BM/04.** Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστιακή απόσταση 12 και εκκεντρότητα  $3/5$  .

**BM/05.** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που περνά από το σημείο  $P(16,6)$  και έχει μεγάλο άξονα διπλάσιο από το μικρό.

**BM/06.** Γράψτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα τον  $x'$  και περνά από τα σημεία:  $M(3,-4)$  και  $N(-6,2)$  .

**BM/07.** Γράψτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μεγάλο άξονα τον  $x'$  και περνά από το σημείο  $M(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$  και έχει εκκεντρότητα  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .

**BM/08.** Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κύριο άξονα τον άξονα  $x'$  , μεγάλο άξονα 10 και εκκεντρότητα  $e = \frac{3}{5}$

**BM/09.** Βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, που έχει κύριο άξονα τον άξονα  $yy'$  , κέντρο την αρχή των αξόνων, διέρχεται από το σημείο  $P(\sqrt{2}, 2)$  και έχει εστιακή απόσταση  $EE' = 4$  .

**BM/10.** Δίνεται η έλλειψη  $C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και το σημείο  $M(1,1)$  . Βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει το  $M$  ως μέσο και στη συνέχεια το μήκος αυτής .

**BM/11.** Δίνεται η έλλειψη  $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$  και το σημείο  $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

Βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει το  $M$  ως μέσο.

**BM/12.** Α) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης  $C : x^2 + 4y^2 = 10$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon : 3x + 2y + 3 = 0$ .

Β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης  $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon : x - 4y + 4 = 0$ .

Γ) Βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης  $C : 9x^2 + 16y^2 = 144$  που είναι κάθετες στην ευθεία  $(\eta) : y = -x$ .

**BM/13.** Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης

$C : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  που διέρχονται από το σημείο  $\Sigma(3,4)$ .

**BM/14.** Δίνεται η έλλειψη  $C : x^2 + 4y^2 = 4$  και το σημείο  $\Sigma(3,4)$ . Αν  $\Sigma A, \Sigma B$  οι εφαπτόμενες από το  $\Sigma$  προς την  $C$ , βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AB$  που ορίζουν τα σημεία επαφής.

**BM/15.** Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ .

**BM/16.** Αν  $M(x_0, y_0)$  τυχαίο σημείο της  $C : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ , βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $P(3x_0, 4y_0)$ .

**BM/17.** Αν το σημείο  $M(x_M, y_M)$  κινείται στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 = 4$  βρες το γεωμ. τόπο του σημείου  $P(2x_M, 3y_M)$ .

**BM/18.** Αν  $M(x_0, y_0)$  σημείο της έλλειψης  $C : \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$ , βρες το γ.τ. του σημείου  $\Sigma$  που έχει τετμημένη το ήμισυ της τετμημένης του  $M$  και την ίδια τεταγμένη.

**BM/19.** Αν το σημείο  $\Sigma$  κινείται στην έλλειψη  $C : \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ , βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $M$  αν ισχύει:  $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OS}$ , με  $O(0,0)$ .

**BM/20.** Έστω έλλειψη  $C : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Αν  $\Sigma$  μεταβλητό σημείο της και  $M$  τέτοιο που  $\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{\Sigma M}$  με  $O(0,0)$ , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του  $M$ .

**BM/21.** Έστω έλλειψη  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

A) Αν η εκκεντρότητά της είναι  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$  βρείτε το  $\beta$ .

B) Βρείτε την εφαπτομένη της  $C$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $\eta: y = x + 1$ .

Γ) Αν το σημείο  $M(x_0, y_0)$  κινείται στην έλλειψη  $C$  βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο  $\Sigma(x_0, 2y_0)$ .

**BM/22.** Έστω έλλειψη  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

A) Αν η εκκεντρότητά της είναι  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$  δείξτε ότι:  $\alpha = 2$ .

B) Δείξτε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής  $AB$  που έχει μέσο το σημείο  $M\left(-1, \frac{1}{2}\right)$  είναι  $\lambda = \frac{1}{2}$  και να βρείτε την εξίσωσή της.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της  $C$  που είναι παράλληλη στη χορδή  $AB$ .

Δ) Αν το σημείο  $M(x_0, y_0)$  κινείται στην έλλειψη  $C$  βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο  $\Sigma(2x_0, y_0)$  καθώς και το σημείο  $P(x_0, 2y_0)$ .

**BM/23.** Έστω έλλειψη  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

A) Αν η εκκεντρότητά της είναι  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$  δείξτε ότι  $\beta = 2$ .

B) Βρείτε την εφαπτομένη της  $C$  στο σημείο της  $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ .

Γ) Αν το σημείο  $M(x_0, y_0)$  κινείται στην έλλειψη  $C$  βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο  $\Sigma(2x_0, 3y_0)$ .

**BM/24.** Δίνεται η έλλειψη  $x^2 + 4y^2 = 4$  και το σημείο  $\Sigma(2, 2)$ . Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα μέσα των χορδών της έλλειψης, που περνούν από το  $\Sigma$ .



**BM/25.** Δίνεται η έλλειψη  $C_1 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  και ο κύκλος

$C_2 : x^2 + y^2 = 5$ . Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε από κάθε σημείο του κύκλου προς την έλλειψη είναι κάθετες μεταξύ τους.

**BM/26.** Μεταβλητό σημείο  $M(x, y)$  κινείται στο επίπεδο, ώστε οι

συντεταγμένες του να ορίζονται από τις σχέσεις  $x = \alpha \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}$  και

$y = \beta \frac{2\theta}{1 + \theta^2}$  με  $\alpha, \beta$  σταθερές και  $\theta$  μεταβλητή,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Αποδείξτε ότι

το  $M$  κινείται στην  $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

**BM/27.** Στους άξονες  $x'$  και  $y'$  κινούνται αντίστοιχα τα σημεία  $A$  και  $B$ , ώστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  να έχει σταθερό μήκος 2. Βρείτε τη γραμμή στην οποία κινείται το σημείο  $M$  της ευθείας  $AB$ , αν  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ .

**BM/28.** Δίνονται οι ελλείψεις:  $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  και  $C_2 : \frac{x^2}{\lambda\alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda\beta^2} = 1$ .

Αποδείξτε ότι είναι όμοιες (έχουν την ίδια εκκεντρότητα)

**BM/29.** Υπολογίστε την εκκεντρότητα της

έλλειψης  $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  του διπλανού σχήματος.

**BM/30.** Στο διπλανό σχήμα τα σημεία  $E', E$

είναι οι εστίες της έλλειψης:  $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .

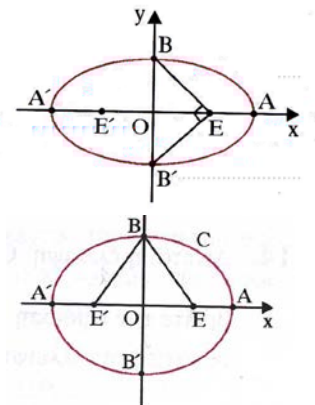
Αν το τρίγωνο  $E'BE$  είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

**BM/31.** Στην έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $\alpha > \beta$ , μεγάλο άξονα τον  $AA'$  και

μικρό  $B'B$ , το τρίγωνο  $BA'E$  είναι ορθογώνιο στο  $B$ . Βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

**BM/32.** Σε μια έλλειψη η κάθετη στον άξονα  $x'x$  στην εστία  $E$ , τέμνει την έλλειψη στο  $\Gamma$ . Βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης, ώστε να είναι  $A'B \parallel O\Gamma$ .

**BM/33.** Δίνονται δύο κωνικές τομές: η παραβολή  $y^2 = 2px$  και η έλλειψη  $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$ ,  $p > 0$ .



**A.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right), E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$  είναι οι εστίες

$E, E'$  της έλλειψης.

**B.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής  $K$  και  $\Lambda$  των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία  $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$  και  $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$

**Γ.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο  $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$  είναι κάθετες . **(4<sup>ο</sup> θέμα Πανελλαδικών 2003)**

**BM/34.** Δίνεται η έλλειψη  $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ . Έστω  $M$  το σημείο του 1<sup>ου</sup>

τεταρτημόριου όπου η διχοτόμος της 1<sup>ης</sup> γωνίας των αξόνων τέμνει την έλλειψη  $C$ . Αν η εφαπτομένη της  $C$  στο  $M$  έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda = -\frac{1}{4}$ : **A)** Βρείτε την εκκεντρότητα της  $C$ .

**B)** Αν επιπλέον η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία  $E'(-\sqrt{6}, 0)$  και  $E(\sqrt{6}, 0)$

τότε να βρείτε: **i)** Τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα,

**ii)** τις εφαπτόμενες της έλλειψης  $C$  που είναι κάθετες στην ευθεία  $\eta : y = 2x + 2012$ .



# Υπερβολή

**BN/01.** Δίνονται οι υπερβολές  $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  και  $C': \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ .

Να βρείτε τα στοιχεία των υπερβολών, την εκκεντρότητα τους και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων τους.

**BN/02.** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από το σημείο  $P(2, 3\sqrt{2})$  και έχει κορυφές  $A(0, 3)$  και  $A'(0, -3)$ .

**BN/03.** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστίες  $E'(-5, 0)$ ,  $E(5, 0)$  και εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{5}{3}$ .

**BN/04.** Βρείτε την υπερβολή που έχει εστιακή απόσταση  $4\sqrt{13}$ , ασύμπτωτες τις ευθείες  $y = \pm \frac{2}{3}x$  και κύριο άξονα τον  $x'x$ .

**BN/05.** Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με ασύμπτωτες  $y = \pm \frac{3}{2}x$ , που διέρχεται από το  $P\left(\frac{10}{3}, 4\right)$ .

**BN/06.** Δίνεται η έλλειψη  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής με εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{3}{2}$ , που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη.

**BN/07.** Βρείτε την εξίσωση της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  που έχει κορυφές της τις εστίες της έλλειψης  $C': \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  και εστίες της τις κορυφές της έλλειψης.

**BN/08.** Βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $\alpha > \beta$  αν η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της είναι  $60^\circ$ .

**BN/09.**Εστω η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ . Αν έχει εκκεντρότητα  $\varepsilon = 2$ , να βρείτε την οξεία γωνία των ασυμπτώτων της.

**BN/10.**Αν η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι  $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες  $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$ .

**BN/11.**Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  και το σημείο  $M(1,3)$ . Να βρείτε την εξίσωση της χορδής  $AB$  που έχει μέσο το  $M$ , καθώς και το μήκος της.

**BN/12.**Δίνεται η εξίσωση  $C: \frac{x^2}{\lambda+2} + \frac{y^2}{\lambda+7} = 1$ . Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει υπερβολή και βρείτε τα στοιχεία της.

**BN/13.**Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  και η ευθεία  $\varepsilon: y = x + 5$ . Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που είναι παράλληλη προς την ευθεία  $\varepsilon$ .

**BN/14.**Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  που είναι κάθετη στην ευθεία  $\eta: x + y - 3 = 0$ .

**BN/15.**Δίνεται η υπερβολή  $x^2 - y^2 = 5$  και το σημείο  $\Sigma(5,5)$  στο εξωτερικό της. Βρείτε τις εφαπτόμενες της υπερβολής που περνούν από το  $\Sigma$ .

**BN/16.**Δίνεται η υπερβολή  $x^2 - y^2 = \alpha^2$ . Δείξτε ότι κάθε χορδή παράλληλη προς τον άξονα της, φαίνεται από τις κορυφές της υπό ορθή γωνία.

**BN/17.**Δίνεται η υπερβολή  $x^2 - 4y^2 = 4$  και το σημείο  $\Sigma\left(2, \frac{1}{2}\right)$  που είναι μέσο χορδής  $\Gamma\Delta$  της υπερβολής. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής που είναι παράλληλη προς τη  $\Gamma\Delta$ .

**BN/18.**Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  και την ευθεία  $\varepsilon: y = 2$ .

**BN/19.** Εστω σημείο  $M(x_0, y_0)$  σημείο του επιπέδου έτσι ώστε

$$x_0 = \frac{2}{\eta\mu\theta} \text{ και } y_0 = \sqrt{5} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}, \text{ όπου } \theta \in (0, \pi). \text{ Βρείτε το γεωμετρικό τόπο}$$

του  $M$  όταν το  $\theta$  μεταβάλλεται.

**BN/20.** Δίνεται η υπερβολή  $C: x^2 - 4y^2 = 4$  και το σημείο  $P(3, 1)$ . Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα μέσα των χορδών της υπερβολής, των οποίων οι ευθείες περνούν από το  $P$ .

**BN/21.** Αν το σημείο  $M$  κινείται στην υπερβολή  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$  βρείτε το γεωμ.τόπο του μέσου  $\Sigma$  του τμήματος  $OM$  με  $O(0, 0)$ .

**BN/22.** Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων η απόσταση από το σημείο  $A(0, 6)$  είναι τα  $\frac{3}{2}$  της απόστασης από την ευθεία  $\varepsilon: 3y - 8 = 0$ .

**BN/23.** Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  και η ευθεία  $\varepsilon: y = 2x - 1$ .

Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών  $\Gamma\Delta$  της υπερβολής που είναι παράλληλες στην  $\varepsilon$ .

**BN/24.** Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το σημείο  $A(-2, 0)$  και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου  $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ .

**BN/25.** Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = 1$  και της υπερβολής  $C': \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ .

**BN/26.** Δίνεται η υπερβολή  $C: \beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ . Αν η εφαπτομένη της  $C$  σε τυχαίο σημείο της  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $N$  και  $\Gamma$  η προβολή του  $M$  στον  $x'x$  να δείξετε ότι  $OG \cdot ON = \text{σταθερό}'$ .

**BN/27.** Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{3} = 1$  με εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

A) Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

B) Βρείτε τη χορδή της  $AB$  που έχει ως μέσο το σημείο  $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$ .

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της  $C$  που είναι παράλληλη στην χορδή  $AB$ .

## Ασκήσεις επανάληψης

**BO/01.** Αν το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  με  $|\vec{\alpha}| = 10\sqrt{5}$  αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$  ώστε  $\vec{\alpha}_1 = (-6, 12)$ , βρείτε τα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\alpha}_2$ .

**BO/02.** Αν  $\vec{\alpha} = (4, 2)$  και  $\vec{\beta} = (5, 0)$  να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{x}, \vec{y}$  ώστε:  $\vec{x} \parallel \vec{\alpha}$ ,  $2\vec{x} + \vec{y} = \vec{\beta}$  και  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

**BO/03.** Βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , αν  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και  $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{21}$ .

**BO/04.** Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ,  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{6}$  και  $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$  υπολογίστε τα  $|\vec{\beta}|$  και  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$ .

**BO/05.** Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ,  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2\sqrt{7}$  και  $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$  βρείτε τα  $|\vec{\alpha}|$  και  $|\vec{\beta}|$ .

**BO/06.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$  και  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  βρείτε το  $|\vec{v}|$  και τις γωνίες  $(\vec{\alpha}, \vec{v})$  και  $(\vec{v}, \vec{\beta})$ .

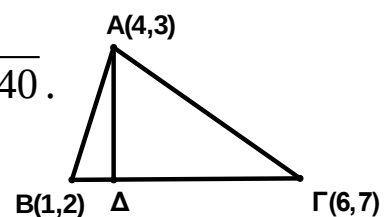
**BO/07.** Αν  $\vec{\alpha} = (2, 1)$  και  $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (5, 0)$ :

A) Δείξτε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

B) Βρείτε το  $\kappa \in \mathbb{R}$  αν  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

Γ) Βρείτε διάνυσμα  $\vec{x}$  ώστε  $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$  με  $|\vec{x}| = \sqrt{40}$ .

**BO/08.** Υπολογίστε τη γωνία  $\hat{A}$  του διπλανού τριγώνου  $AB\Gamma$  καθώς και τα διανύσματα  $\vec{B\Delta}$  και  $\vec{A\Delta}$ .



**BO/09.** Αν  $\vec{\alpha} = (1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (3, 1)$  βρείτε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  και το  $\sin(\vec{\beta}, 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ .

**BO/10.** Αν  $A(1,1)$ ,  $B(4,2)$  και  $\Gamma(3,x)$ , βρείτε το  $x \in \mathbb{R}$  ώστε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι ορθογώνιο στο  $B$ .

**BO/11.** Έστω  $AM$  διάμεσος τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μοναδιαία και κάθετα διανύσματα. Αν  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$  βρείτε το  $|\overrightarrow{AM}|$ , και τη γωνία  $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$ .

**BO/12.** Αν  $A(0,1)$ ,  $B(1,3)$ ,  $\Gamma(3,2)$  βρείτε τη γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και σημείο  $P$  τέτοιο που  $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ .

**BO/13.** Αν  $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ ,  $\overrightarrow{OG} = \vec{\gamma}$ ,  $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ ,  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3} - 1$  και  $(\sqrt{3} + 1)\vec{\alpha} = \sqrt{3} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ , απόδειξε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά και ότι  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OG}$ . Βρείτε τη γωνία  $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$ .

**BO/14.** Αν  $AB = A\Gamma = B\Gamma = 2$ .

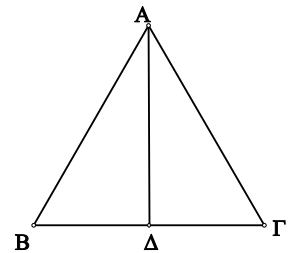
Υπολογίστε τα :

A)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

B)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

Γ)  $\overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma \Delta}$

Δ)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ .



**BO/15.** Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda - 5 = 0$ :

A) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία.

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ .

**BO/16.** Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - y^2 = 2x - 1$  (1).

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  που είναι κάθετες.

B) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\zeta)$  που διέρχεται από το σημείο τομής  $A$  των ευθειών  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $150^\circ$ .

Γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από το σημείο  $M(1,1)$  και τέμνει τις ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  στα σημεία  $A$  και  $B$ , έτσι ώστε το σημείο  $M$  να είναι μέσο του  $AB$ .

**ΒΟ/17.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$ .

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  που είναι παράλληλες.

B) Αν  $(\varepsilon_1): x + y - 2 = 0$  και  $(\varepsilon_2): x + y - 4 = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης  $(\varepsilon)$  των  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ .

A) Αν A είναι ένα σημείο της ευθείας  $(\varepsilon_1)$  με τεταγμένη 2 και B ένα σημείο της ευθείας  $(\varepsilon_2)$  με τετμημένη 1, να βρείτε τα σημεία A και B.

B) Να βρείτε τις συντεταγμένες δυο σημείων Γ και Δ της ευθείας  $(\varepsilon)$ , έτσι ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι τετράγωνο.

**ΒΟ/18.** Έστω τα σημεία  $A(\lambda + 2, 2\lambda + 1)$ ,  $B(\lambda - 3, 3\lambda - 2)$  και  $\Gamma(0, 3\lambda - 5)$ .

A) Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

B) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M(x, y)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$ , όπου  $O(0, 0)$ .

Γ) Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο στο B.

Δ) Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε  $(AB\Gamma) = 8$ .

**ΒΟ/19.** Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})x - |\vec{\alpha}|y + 2 = 0$ , η οποία είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (2, -1)$ .

A) Να δείξετε ότι:  $|\vec{\beta}| \geq 2$ .

B) Αν το  $|\vec{\beta}|$  παίρνει τη ελάχιστη τιμή του και A, B τα σημεία τομής της  $(\varepsilon)$  με τους άξονες, να βρείτε:

B1) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M(x, y)$  του επιπέδου που είναι μέσα του AB.

B2) τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $N(x, y)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι  $\overrightarrow{NA} = 2 \cdot \overrightarrow{BN}$ .

**ΒΟ/20.** Αν  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$  και  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$  υπολογίστε τη γωνία  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$ .

**ΒΟ/21.** Βρείτε σημείο M της έλλειψης  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  με μεγάλο άξονα

A'A ώστε  $\widehat{AMO} = 90^\circ$  με  $O(0, 0)$ .



**BO/22.** Αν η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο της υπερβολής:  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  τέμνει τις ασύμπτωτές της στα  $A, B$  δείξτε ότι το  $M$  είναι μέσο του  $AB$ .

**BO/23.** Αν  $C: \frac{x^2}{29-\lambda} + \frac{y^2}{4-\lambda} = 1$ , βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η  $C$  είναι έλλειψη, για ποιες υπερβολή και σε κάθε περίπτωση βρείτε τις εστίες.

**BO/24.** Αν μια χορδή  $B\Gamma$  της παραβολής  $C: y^2 = 4x$  διέρχεται από το σημείο  $A(4,0)$  να δείξετε ότι:  $OB \perp O\Gamma$ .

**BO/25.** Αν η παραβολή  $C: y^2 = 2px$  διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$  βρείτε την εφαπτομένη της που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ .

**BO/26.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$ .

A) Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δυο παράλληλες ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ .

B) Έστω ότι η ευθεία  $(\zeta): x + 2y - 8\lambda = 0$  τέμνει τις ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Αν  $M$  το μέσο του τμήματος  $AB$ , τότε B1) να δείξετε ότι  $M(2 - 2\lambda, 5\lambda - 1)$ .

B2) να αποδείξετε ότι καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ , το σημείο  $M$  κινείται σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**BO/27.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$  (1).

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δυο ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  κάθετες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B) Να βρείτε το σημείο τομής  $M$  των  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ .

Γ) Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινείται το σημείο  $M$  καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ .

**BO/28.** Θεωρούμε την εξίσωση  $x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0$ .

A) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ .

B) Αν  $(\varepsilon_1): x + y + 2 = 0$ ,  $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$ , να βρεθεί το σημείο τομής  $M$  των ευθειών.

Γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  με τον άξονα  $y'y$ .

Δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $M(-2,0)$  και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2.

**ΒΟ/29.** Έστω τα σημεία  $A(3,4)$ ,  $B(5,7)$  και  $\Gamma(2\lambda+1, 3\lambda-2)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου.

B) Να δείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ανεξάρτητο του  $\lambda$ .

Γ) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το σημείο  $\Gamma$  κινείται σε ευθεία  $(\varepsilon)$  παράλληλη στην  $AB$ .

Δ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  παραμένει σταθερό και ανεξάρτητο του  $\lambda$ .

**ΒΟ/30.** Έστω η εξίσωση:  $(x-2)^2 + y(y-1) - 25 + \lambda(x-2y+5) = y-1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (1).

A) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από δυο σταθερά σημεία  $A, B$  και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής  $AB$ .

Γ) Αν το κέντρο του κύκλου  $C$  που παριστάνει η (1) ανήκει στην ευθεία  $(\varepsilon): 3x-2y-4=0$ , να βρείτε τον  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**ΒΟ/31.** Θεωρούμε την εξίσωση:  $x^2 + y^2 - (3\alpha+2)x + \alpha^2 - 4 = 0$ , (1) με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

A) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ) Έστω ο κύκλος  $C$  που προκύπτει από την (1) για  $\alpha=2$  και η ευθεία  $y=\lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  που τέμνει τον κύκλο σε σημείο  $A$  διαφορετικό του  $O(0,0)$ . Να αποδείξετε ότι το μέσο  $M$  του  $OA$  κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας που διέρχεται από το  $O(0,0)$ .

**ΒΟ/32.** Δίνεται ο κύκλος  $C_1: x^2 + y^2 = 2$  και η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2 + \lambda(x-y+2) = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (1).

A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$  του κύκλου  $C_1$  στο σημείο του  $A(-1, \kappa)$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}$ .

B) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η (1) παριστάνει κύκλο

Γ) Να βρείτε τι παριστάνει η (1) για  $\lambda=2$ .

Δ) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

E) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται στην ευθεία  $(\varepsilon)$ .

ΣΤ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η (1).

**ΒΟ/33.** Δείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - y^2 + 4kx + 2ky + 3k^2 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους, βρείτε το σημείο τομής τους καθώς και το γεωμ. τόπο του σημείου τομής τους.

**ΒΟ/34.** Α) Δείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$  παριστάνει δύο ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ .

Β) Αν η ευθεία  $(\eta): x + 2y - 8\lambda = 0$  τέμνει τις  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  στα σημεία Α, Β και Μ το μέσο του ΑΒ:

Β1) Βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

Β2) Δείξτε ότι το Μ κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

**ΒΟ/35.** Αν η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  διέρχεται από το σημείο  $P(-1, 3)$  και τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β ώστε το Ρ να είναι το μέσο του ΑΒ:

Α) Βρείτε την εξίσωση της  $(\varepsilon_1)$ .

Β) Αν  $\Gamma(-5, 1)$  και  $\Delta(2\alpha - 1, 5 - 4\alpha)$  και το Δ ανήκει στην  $(\varepsilon_1)$ :

Β1) Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Β2) Βρείτε τη μεσοκάθετο  $(\varepsilon_2)$  του ΓΔ.

Β3) Βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

**ΒΟ/36.** Θεωρούμε τις εξισώσεις:  $\lambda x + (2 - \lambda)y + \lambda + 4 = 0$  (1)

$(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda^2 - 1 = 0$  (2).

Α) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η (2) παριστάνει ευθεία;

Β) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η (2) είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  και για ποιες στον  $y'y$ ;

Γ) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η (2) διέρχεται από το σημείο  $O(0, 0)$ ;

Δ) Δείξτε ότι η (1) παριστάνει ευθεία που διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

Ε) Βρείτε τα  $\lambda$  ώστε οι ευθείες που παριστάνουν οι (1) και (2) να είναι παράλληλες.

**ΒΟ/37.** Α) Έστω  $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$  κύκλος και  $\varepsilon: x + y + 1 = 0$  ευθεία.

Α) Δείξτε ότι ο κύκλος και η ευθεία δεν τέμνονται.

Β) Αν το σημείο Μ κινείται στον κύκλο και το Ν στην ευθεία βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $|\overrightarrow{MN}|$ .

**ΒΟ/38.** Οι ευθείες  $(\varepsilon_1): (\lambda - 1)x + \lambda y + 1 - 3\lambda = 0$  και  $(\varepsilon_2): (4 - \lambda)x + (6 - \lambda)y - \lambda = 0$  είναι παράλληλες.

Α) Να δείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

Β) Να βρείτε την απόσταση των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$ .

Γ) Να βρείτε ευθεία  $(\eta)$  τέτοια ώστε η  $(\varepsilon_2)$  να είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών  $(\varepsilon_1)$  και  $(\eta)$ .

**ΒΟ/39.** Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): x - 4y - 7 = 0$  και τα σημεία  $A(-2, 4)$  και  $B(2, 6)$ .

Α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  της ευθείας  $(\varepsilon)$  το οποίο ισαπέχει από τα  $A$  και  $B$ .

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $ABM$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $K(x, y)$  για τα οποία ισχύει:  $(KAB) = (MAB)$  είναι δυο ευθείες.

**ΒΟ/40.** Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon_1: (\lambda - 1)x - (\lambda + 5)y - 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: x + (\lambda + 1)y + \lambda + 3 = 0$ .

Α) Βρείτε διανύσματα  $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$  και  $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$ .

Β) Δείξτε ότι οι  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  τέμνονται για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Γ) Βρείτε τα  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

**ΒΟ/41.** Αν το  $M(\alpha, \beta)$  ανήκει στον κύκλο  $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  να βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $N(3\alpha - 1, 3\beta + 2)$

**ΒΟ/42.** Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 6x + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$ .

Α) Βρείτε τα  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να παριστάνει κύκλο.

Β) Δείξτε ότι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο.

Γ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων τους.

**ΒΟ/43.** Έστω  $A(3\lambda - 1, \lambda + 5)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(11, 5)$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Α) Βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $A$ .

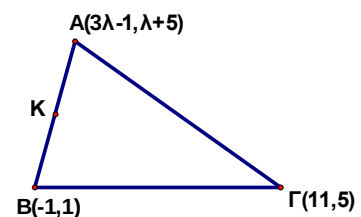
Β) Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι σταθερό.

Γ) Για  $\lambda = 2$ :

i) Βρείτε το μέσο  $K$  της  $AB$ .

ii) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο  $AB$ .

iii) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με διάμετρο  $AB$



στο σημείο του  $A$ .

**ΒΟ/44.** Θεωρούμε την υπερβολή:  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{3} = 1$  με εκκεντρότητα

$$e = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

A) Δείξτε ότι:  $\alpha = 2$ .

B) Βρείτε τη χορδή της υπερβολής που έχει ως μέσο το σημείο  $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που είναι παράλληλη στην  $AB$ .

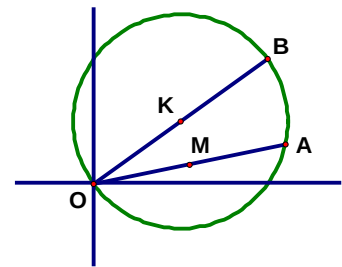
**ΒΟ/45.** Θεωρούμε τον κύκλο  $C$  που έχει ακτίνα  $\rho = 2\sqrt{2}$ , διέρχεται από το  $O(0,0)$  και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία  $(\eta): y = x$ .

A) Βρείτε το κέντρο του αν γνωρίζουμε ότι ανήκει στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

B) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$ .

Γ) Βρείτε το σημείο του κύκλου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το  $O(0,0)$ .

Δ) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  των χορδών  $OA$  του κύκλου που έχουν ως ένα άκρο το  $O(0,0)$ .



**ΒΟ/46.** Θεωρούμε τον κύκλο  $C$  που έχει κέντρο  $K(3,3)$  και εφάπτεται στην ευθεία:  $(\eta): x - y - 4 = 0$ .

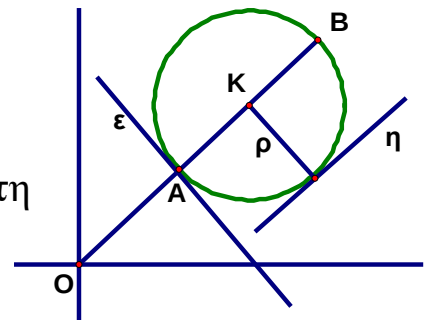
A) Βρείτε την ακτίνα του  $\rho$ .

B) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου  $C$ .

Γ) Βρείτε το σημείο  $A$  του κύκλου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το  $O(0,0)$ .

Δ) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του  $A$ .

Ε) Αν το σημείο  $\Sigma$  κινείται στον κύκλο  $C$ , βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$  που είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $O\Sigma$ .



**ΒΟ/47.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(-1,-1)$ ,  $B(5,1)$  και  $\Gamma(3\lambda-1, \lambda+1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

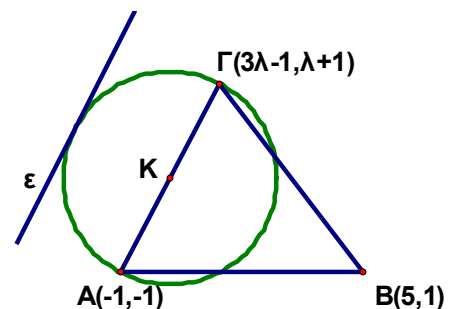
A) Βρείτε το γεωμετρικό τόπο του  $\Gamma$ .

B) Δείξτε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό.

Γ) Για  $\lambda = 2$ :

i) Βρείτε το μέσο  $K$  του  $A\Gamma$ .

ii) Βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την πλευρά  $A\Gamma$ .



iii) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου που είναι παράλληλη στην ΑΓ.

**ΒΟ/48.** Δίνεται ο κύκλος  $C : (x-1)^2 + (y-7)^2 = 9$  και το σημείο  $A(1,1)$ .

A) Να δείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό σημείο του C.

B) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  του C που διέρχονται από το A.

Γ) Να βρείτε την οξεία γωνία των  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ .

**ΒΟ/49.** Έστω ο κύκλος  $C_1$  με κέντρο  $K(1, -2)$  που εφάπτεται εσωτερικά του  $C_2 : x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ .

A) Να βρείτε την εξίσωση του  $C_1$ .

B) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των  $C_1, C_2$ .

**ΒΟ/50.** Δίνεται ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$  και η ευθεία (ε) :  $3x - 4y - 10 = 0$ .

A) Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς τον κύκλο C.

B) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει η ευθεία (ε) από ένα σημείο του κύκλου C.

**ΒΟ/51.** Δίνονται οι κύκλοι  $C_1 : x^2 + y^2 = 1$  και  $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ .

A) Να βρείτε τη σχετική θέση των δυο κύκλων.

B) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο του  $C_1$  από ένα σημείο του  $C_2$ .

**ΒΟ/52.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda x + (2\lambda - 4)y - 4\lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

B) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση ανήκουν σε μια ευθεία για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Γ) Αν ο κύκλος C που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$ , να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  και την εφαπτομένη του C στο A.

**ΒΟ/53.** Έστω  $\vec{\alpha} = (3, 1)$  και  $\vec{\beta} = (2, -1)$ .

A) Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

B) Βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

Γ) Αναλύστε το διάνυσμα  $\vec{\beta}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η

μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{a}$ .

Δ) Βρείτε διάνυσμα  $\vec{u}$  κάθετο στο  $\vec{a}$  με μέτρο  $2\sqrt{10}$ .

**BO/54.** Δίνονται τα σημεία  $A(0, -2)$ ,  $B(-1, 1)$  και  $\Gamma(\kappa - 1, 2 - 3\kappa)$ .

Α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι κορυφές τριγώνου για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

Β) Να αποδειχθεί ότι το σημείο  $\Gamma$  κινείται σε σταθερή ευθεία καθώς το  $\kappa$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}$ .

Γ) Να βρεθεί για ποια τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $A$ .

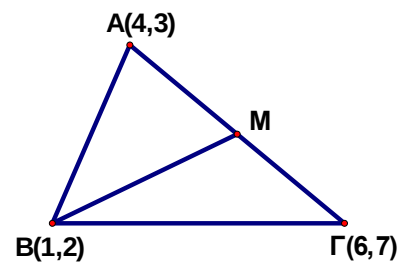
Δ) Να βρεθεί για ποια τιμή του  $\kappa$  το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με βάση  $AB$ .

**BO/55.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(4, 3)$ ,  $B(1, 2)$  και  $\Gamma(6, 7)$ .

Α) Βρείτε τη γωνία  $A$  του τριγώνου.

Β) Αν  $BM$  η διάμεσος υπολογίστε το  $|\overrightarrow{BM}|$ .

Γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .



**BO/56.** Αν η έλλειψη:  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + y^2 = 1$  έχει εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ :

Α) Δείξτε ότι:  $\alpha = 2$ .

Β) Δείξτε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της χορδής  $AB$  της έλλειψης που έχει μέσο το σημείο  $M\left(-1, \frac{1}{2}\right)$  είναι  $\lambda = \frac{1}{2}$  και βρείτε την εξίσωσή της.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής που είναι παράλληλη στην  $AB$ .

Δ) Αν το σημείο  $M(x_0, y_0)$  κινείται στην έλλειψη  $C$  βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $\Sigma(2x_0, y_0)$ .

**BO/57.** Αν  $\varepsilon_1: (\mu - 3)x + 4y - \mu = 0$  και  $\varepsilon_2: 4x + (\mu + 3)y + 1 = 0$  βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$  ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

**BO/58.** Αν  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ , βρείτε:

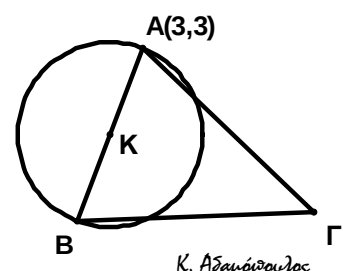
Α) Το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ , Β) το  $|\vec{v}|$  αν  $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$  Γ) το  $\vec{v} \cdot \vec{\beta}$  και Δ) την  $(\vec{v}, \vec{\beta})$ .

**BO/59.** Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(3, 3)$

και κύκλος διαμέτρου  $AB$  με εξίσωση:

$$C: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

Α) Βρείτε το  $B$ .



Β) Βρείτε το γεωμ. τόπο του  $\Gamma$  αν το εμβαδόν του  $AB\Gamma$  είναι 6 τ. μονάδες.

Γ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο  $A$ .

Δ) Βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου που είναι παράλληλη στην  $AB$ .

**ΒΟ/60.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $x^2 - y^2 - 2\lambda x - 4\lambda y - 3\lambda^2 = 0$  παριστάνει δύο κάθετες ευθείες, να βρεθεί το σημείο τομής τους (συναρτήσει του  $\lambda$ ) καθώς και ο γεωμ. τόπος του σημείου τομής.

**ΒΟ/61.** Αν  $\vec{\alpha} = (\mu + 1, 1)$ ,  $\vec{\beta} = (1, 2\mu + 1)$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$ :

Α) δείξτε ότι  $\mu = 1$ .

Β) Υπολογίστε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ .

Γ) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  αν τα διανύσματα:  $\vec{\delta}_1 = \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$  και  $\vec{\delta}_2 = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα.

Δ) Αναλύστε το  $\vec{\beta}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο  $\vec{\gamma} = (2, 3)$ .

**ΒΟ/62.** Θεωρούμε την ευθεία:  $(\varepsilon) : (1 - \sin\theta)x + (1 + \sin\theta)y - 1 = 0$  με  $\theta \in (0, \pi)$ .

Α) Δείξτε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε  $\theta \in (0, \pi)$ .

Β) Δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο.

Γ) Από τις παραπάνω ευθείες βρείτε εκείνη που απέχει από το  $O(0, 0)$

απόσταση  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

Δ) Βρείτε το  $\theta$  αν η  $(\varepsilon)$  εφάπτεται σε κύκλο κέντρου  $K(1, 1)$  και  $\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**ΒΟ/63.** Θεωρούμε την παραβολή  $C : y^2 = 2px$ . Φέρω την εφαπτομένη στο σημείο της  $M$ , που τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A$ . Αν η κάθετη στην εφαπτομένη στο  $M$  τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο  $B$ , δείξτε ότι η εστία  $E$  είναι το μέσο του  $AB$ .

**ΒΟ/64.** Θεωρούμε την παραβολή  $C : y^2 = 2px$  με εστία  $E$ . Από τυχαίο σημείο  $A$  του άξονα  $y'y$  φέρουμε ευθεία  $(\varepsilon)$  κάθετη στην  $AE$  στο  $A$ . Να δείξετε ότι η  $(\varepsilon)$  είναι εφαπτομένη της παραβολής.

**ΒΟ/65.** Θεωρούμε την έλλειψη  $C : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ , με  $\alpha > \beta$ . Αν

$\alpha^2 = 2\beta^2 - 7$  και η εκκεντρότητα είναι  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ .

Α) Βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .



Β) Δείξτε ότι η χορδή AB που έχει μέσο  $M\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{4}{5}$  και βρείτε την εξίσωσή της.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης που είναι παράλληλη της AB.

**ΒΟ/66.** Θεωρούμε την έλλειψη  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$  που εφάπτεται στην ευθεία (ε):  $y = -x + 4$ .

Α) Βρείτε το  $a^2$ .

Β) Βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης που είναι κάθετες στην (ε).

**ΒΟ/67.** Αν  $E'(0, -2\sqrt{2})$  και  $E(0, 2\sqrt{2})$  οι εστίες μια έλλειψης C με εκκεντρότητα  $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$ : Α) Βρείτε την εξίσωσή της.

Β) Βρείτε τις εφαπτόμενές της που σχηματίζουν με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ .

**ΒΟ/68.** Έστω  $\varepsilon_1: 2x + \alpha y - 3 = 0$  και  $\varepsilon_2: \beta x + 4y + \gamma = 0$  δύο ευθείες που είναι κάθετες και τέμνονται στο σημείο  $A(2,1)$ .

Α) Βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Β) Θεωρούμε τα σημεία  $B(3,8)$  και  $\Gamma(10,-13)$ :

i) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_3$  που διέρχεται από τα B,  $\Gamma$ .

ii) Βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ .

iii) Βρείτε το σημείο M της  $\varepsilon_3$  που ισαπέχει από τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

iv) Αν είναι  $M(5,2)$  να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο M και απέχουν από το σημείο  $\Gamma$  απόσταση ίση με 5.

**ΒΟ/69.** Αν  $|\vec{\beta}| = 3$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$  και  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (6\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$ :

Α) Δείξτε ότι  $|\vec{\alpha}| = 2$

Β) Αν  $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  βρείτε το  $|\vec{\gamma}|$  και τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ .

**ΒΟ/70.** Θεωρώ την εξίσωση:  $x^2 + y^2 + (\lambda - 1)x + (3 - \lambda)y - 2\lambda - 1 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Α) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Β) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του κέντρου του είναι μια ευθεία (ε).

Γ) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η ακτίνα του να είναι 4.

Δ) Αν  $\rho = 4$  βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε).

**ΒΟ/71.** Έστω η εξίσωση:  $(x^2 + y^2 - 4x + 2y) + \lambda(x + y - 2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}.$

B) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του κέντρου του είναι μια ευθεία (ε).

Γ) Δείξτε ότι ο κύκλος διέρχεται από δύο σταθερά σημεία A, B.

Δ) Αν  $\lambda = 2$  βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία (η):  $3x - 4y + 1 = 0.$

E) Αν  $\lambda = 2$  βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου KAB.

**ΒΟ/72.** Θεωρώ τα διανύσματα:  $\vec{\alpha} = (y - 1, 1)$  και  $\vec{\beta} = (y + 1, 1 - 4x).$

A) Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  να δείξετε ότι ο γεωμ. τόπος του  $M(x, y)$  είναι η παραβολή:  $C_1 : y^2 = 4x.$

B) Αν  $|5\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 3\sqrt{2}$  να δείξετε ότι ο γεωμ. τόπος του  $N(x, y)$  είναι ο

κύκλος:  $C_2 : (x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}.$

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής  $C_1$  που είναι παράλληλη στην ευθεία: (η):  $x - y + 4 = 0$  και αποδείξτε ότι εφάπτεται και στο κύκλο  $C_2.$

Δ) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής  $C_1$  που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου  $C_2.$

E) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής  $C_1$  που απέχουν από την εστία της απόσταση 1.

**ΒΟ/73.** Αν  $O(0,0)$  θεωρώ τα διανύσματα:  $\vec{OA} = (-1, y)$  και  $\vec{OB} = (2x, y).$

Δ1) Αν  $\vec{OA} \perp \vec{OB}$  να δείξετε ότι ο γεωμ. τόπος των σημείων  $M(x, y)$  είναι η παραβολή:  $C_1 : y^2 = 2x$  και να βρείτε την εστία.

Δ2) Αν  $3\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 = 15$  δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος των σημείων  $M(x, y)$  είναι ο κύκλος  $C_2$  κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho = \sqrt{3}.$

Δ3) Βρείτε τα κοινά σημεία A και B του κύκλου και της παραβολής, όπου A το σημείο με θετικές συντεταγμένες.

Δ4) Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο ένα από τα κοινά σημεία είναι παράλληλη της εφαπτομένης της παραβολής στο άλλο από τα κοινά σημεία.

Δ5) Βρείτε τη χορδή του κύκλου που διέρχεται από το σημείο Α και έχει μήκος  $2\sqrt{2}$ .

**ΒΟ/74.** Αν  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 1$  και  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ :

Α) Δείξτε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$ .

Β) Βρείτε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ .

Γ) Δείξτε ότι  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$ .

**ΒΟ/75.** Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 2 = 2x \ln \theta + \ln^2 \theta + 4 \ln \theta$  (1), όπου  $\theta > 0$ .

Α) Να βρείτε τις τιμές του  $\theta$  για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Για τις παραπάνω τιμές του  $\theta$ , να βρείτε αυτές για τις οποίες:

Β) Η ευθεία (ε):  $x + 2015y = \ln(2 - \theta)$  διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου

Γ) Η ευθεία (ζ):  $y = x + 4$  εφάπτεται του κύκλου.

**ΒΟ/76.** Αν  $\vec{\alpha} = (x - 2, 2y + 1)$ ,  $\vec{\beta} = (x + 2, 2y - 1)$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$ :

Α) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του σημείου  $M(x, y)$  είναι η έλλειψη

$$C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Β) Βρείτε την εκκεντρότητα της C.

Γ) Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης που είναι παράλληλες στην ευθεία AB, (AA' ο μεγάλος και BB' ο μικρός άξονας)

Δ) Αν το σημείο  $P(x_0, y_0)$  κινείται στην έλλειψη C βρείτε το γεωμ. τόπο του σημείου  $\Sigma\left(\frac{x_0}{4}, \frac{y_0}{2}\right)$ .

Ε) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της απόστασης ΡΣ.

**ΒΟ/77.** Θεωρούμε την εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6\alpha x + 2\beta y - 1 = 0$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\beta^2 = 6\alpha$ .

Α) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Β) Δείξτε ότι ο γεωμ. τόπος του κέντρου του κύκλου είναι μια παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία.

Βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η ακτίνα του κύκλου να είναι 7.

Γ) Βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία (η):  $x - 2y + 1 = 0$ .

**ΒΟ/78.** Δίνεται η εξίσωση:  $\lambda x + (\lambda + 1)y + \lambda - 4 = 0$  (1).

Γ1) Δείξτε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Γ2) Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.

Γ3) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  για το οποίο η ευθεία που παριστάνει η (1) σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$ .

**ΒΟ/79.** Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{a} = (2,1)$  και  $\vec{b} = (1,3)$ .

B1) Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . B2) Βρείτε τη γωνία  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

B3) Βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{a} + \lambda \vec{b}$  να είναι κάθετα.

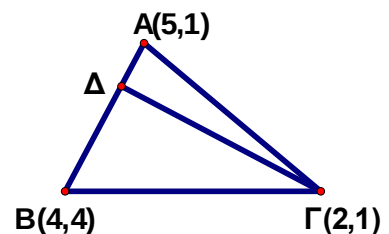
**ΒΟ/80.** Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ:

A) Βρείτε τις εξισώσεις της πλευράς ΒΓ και του ύψους ΑΔ.

B) Βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το  $O(0,0)$  άξονα συμμετρίας τον  $y'y$  και διέρχεται από το σημείο Γ.

Γ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στη ΒΓ.

Δ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.



**ΒΟ/81.** Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ:

A) Βρείτε το γεωμ. τόπο του Α.

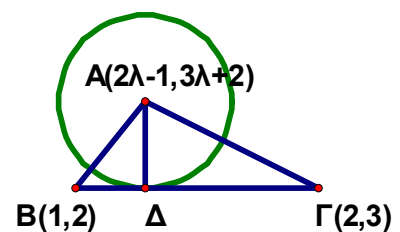
Για  $\lambda=1$ , βρείτε:

B) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Γ) Την απόσταση του Α από την ευθεία ΒΓ.

Δ) την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Α που εφάπτεται στη ΒΓ.

Ε) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΓ.



**ΒΟ/82.** Αν  $\vec{a} \not\perp \vec{b}$ :

A) Δείξτε ότι η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 + 2|\vec{a}|x - 4|\vec{b}|y + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

B) Αν ο κύκλος διέρχεται από το  $O(0,0)$  και η ευθεία

$(\varepsilon): y = x + 2|\vec{a}| + 4|\vec{b}|$  εφάπτεται του C στο σημείο  $A(-2|\vec{a}|, 4|\vec{b}|)$

B1) Δείξτε ότι  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

B2) Δείξτε ότι:  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ .

B3) Αν επιπλέον  $\vec{\alpha} = \left( \frac{|\vec{\alpha}|}{2}, -\sqrt{3} \right)$  βρείτε την εξίσωση του κύκλου, το

κέντρο και την ακτίνα του.

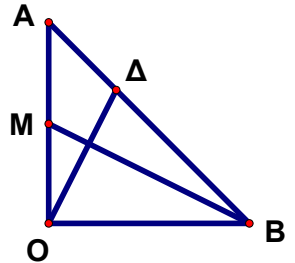
**BO/83.** Έστω τρίγωνο OAB ισοσκελές και ορθογώνιο στο A.

Στην AB παίρνουμε το σημείο Δ ώστε  $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ .

Αν  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ :

A) Να εκφράσετε τα  $\vec{OD}$  και  $\vec{BM}$  συναρτήσει των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

B) Να δείξετε ότι διάνυσμα  $\vec{OD}$  είναι κάθετο στο  $\vec{BM}$ .



**BO/84.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Δείξτε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

B) Δείξτε ότι το κέντρο του παραπάνω κύκλου κινείται σε μια ευθεία.

Γ) Θεωρούμε τον κύκλο  $C_1$  που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση και το κέντρο του βρίσκεται στην ευθεία  $\eta: 3x + y - 6 = 0$ , καθώς και την παραβολή  $C_2$  με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον  $x'$  και εστία το σημείο  $E(-1, 0)$ .

Γ1) Βρείτε τις εξισώσεις των  $C_1, C_2$ .

Γ2) Βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των  $C_1, C_2$ .

**BO/85.** Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις ευθείες  $(\varepsilon_\lambda)$  με εξίσωση:  $(\varepsilon_\lambda): x + (\lambda + 2)y + 1 - \lambda = 0$  και το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (\lambda, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ .

A) Να δείξετε ότι από τις παραπάνω ευθείες αυτή που είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  είναι η  $x + y + 2 = 0$ . Στη συνέχεια να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της από αρχή των αξόνων.

B) Να αποδείξετε ότι  $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Γ) Να αποδείξετε ότι από τις παραπάνω ευθείες αυτή που απέχει τη μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι η  $(\varepsilon_1): 3x - y + 10 = 0$ .

Δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο M της  $(\varepsilon_1)$  με τεταγμένη  $\frac{\vec{\alpha}}{2}$  όπου  $\vec{\alpha} = (-1, 1)$  και απέχουν από το σημείο

A(1,1) απόσταση ίση με  $\sqrt{8}$ .

**ΒΟ/86.** Θεωρούμε τον κύκλο  $C$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(-2,0)$ ,  $B(2,0)$  και  $\Gamma(0,6)$ . Α) Να δείξετε ότι  $C : x^2 + (y-4)^2 = 4$ .

Β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου  $C$ .

Γ) Από τα σημεία του κύκλου να βρείτε εκείνο που απέχει την μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων και εκείνο που απέχει την ελάχιστη και στη συνέχεια να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων θέσης των σημείων αυτών.

Δ) Αν  $M_1, M_2$  είναι τα σημεία επαφής του κύκλου με τις εφαπτομένες του ερωτήματος Β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή το  $O(0,0)$  και διέρχεται από τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$ .

**ΒΟ/87.** Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , καθώς και η εξίσωση:  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 1)x + (2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})y + 4 = 0$  (1).

Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθείες για κάθε τιμή του  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \in \mathbb{R}$ , οι οποίες διέρχονται από σταθερό σημείο.

Β) Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία που παριστάνει η (1) διέρχεται από το σημείο  $A(-2, -3)$  τότε  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

Αν για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύουν οι σχέσεις:  $|2\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$  και

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \frac{\vec{\beta}^2}{2} :$$

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει την ευθεία  $(\varepsilon) : x - 3y - 8 = 0$ .

Δ) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$ , ώστε η ευθεία  $(\varepsilon)$  να εφάπτεται στον κύκλο  $C : (x - \kappa)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{10}$ .

**ΒΟ/88.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2x - 1, y + 2)$ ,  $\vec{\beta} = (2x + 1, y - 2)$ .

Α) Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος  $C_1$  των σημείων  $M(x, y)$  είναι μια έλλειψη της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

Β) Αν ισχύει:  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + 12y^2 - 64 = 0$  να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος  $C_2$  των σημείων  $N(x, y)$ , είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Γ) Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που ανήκουν και στους δυο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους  $C_1, C_2$ .

Δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το σημείο  $A(2,2)$ .

**ΒΟ/89.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ώστε  $|2\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$  και

$(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = -6$  και ο κύκλος:

$$C: x^2 + y^2 - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 5)x - |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|y + 9 = 0.$$

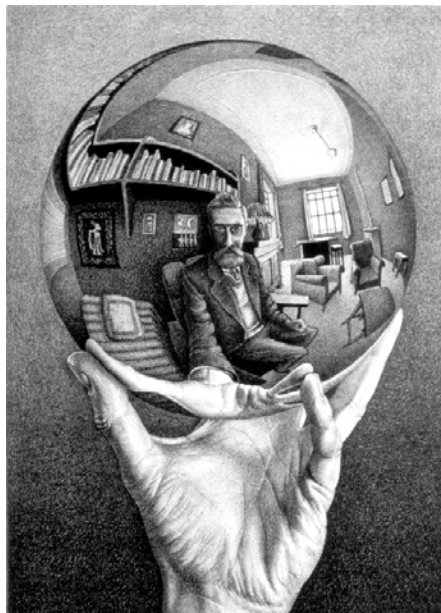
A) Να δείξετε ότι  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ .      B) Να δείξετε ότι  $\vec{\beta} - 2\vec{\alpha} \neq 0$ .

Γ) Να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου  $C$ .

Δ) Να βρείτε τον αριθμό  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

E) Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου  $C$  στο σημείο του

$$B\left(\frac{\vec{\beta}^2}{2} + |\vec{\alpha}|, (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})^2 + 2|\vec{\alpha}|\right).$$



*Ερχόμαστε από μια σκοτεινή άβυσσο. Καταλήγουμε σε μια σκοτεινή άβυσσο. Το ενδιάμεσο φωτεινό διάστημα το λέμε Ζωή.*

*Ευτός ως γεννηθούμε, αρχίζει η επιστροφή. Ταυτόχρονα το ξεκίνημα και ο γυρισμός. Κάθε στιγμή πεθαίνουμε. Γι αυτό πολλοί διαλάλησαν:Σκοπός της ζωής είναι ο θάνατος.*

*Μα ευτός ως γεννηθούμε, αρχίζει κι η προσπάθεια να δημιουργήσουμε, να συνθέσουμε, να κάμουμε την ύλη ζωή. Κάθε στιγμή γεννιόμαστε. Γι αυτό πολλοί διαλάλησαν: Σκοπός της εφήμερης ζωής είναι η αθανασία.*

*Στα πρόσκαιρα ζωντανά σώματα τα δυο τούτα ρέματα παλεύουν:*

- α) ο ανήφορος, προς τη σύνθεση, προς τη ζωή, προς την αθανασία,*
- β) ο κατήφορος, προς την αποσύνθεση, προς την ύλη προς τον θάνατο.*

*Και τα δύο ρέματα πηγάζουν από τα έγκατα της αρχέγονης ουσίας. Στην αρχή η ζωή ξαφνιάζει, σαν παράνομη φαίνεται σαν παρά φύση, σαν εφήμερη αντίδραση στις σκοτεινές αιώνιες πηγές. Μα βαθύτερα νιώθουμε: η Ζωή είναι κι αυτή άναρχη, ακατάλυτη φόρα του Σύμπαντου. Αλλιώς πούθε η περάνθρωπη δύναμη που μας σφεντονίζει από το αγέννητο στο γεννητό και μας γκαρδιώνει – φυτά, ζώα, ανθρώπους – στον αγώνα; Και τα δύο ρέματα είναι άγια.*

*Χρέος μας λοιπόν να συλλάβουμε τ' όραμα που χωράει κι εναρμονίζει τις δύο τεράστιες τούτες άναρχες, ακατάλυτες ορμές, και με τ' όραμα τούτο να ρυθμίσουμε το στοχασμό μας και την πράξη.*

*Νίκος Καζαντζάκης  
(Εισαγωγή στην «Ασκητική»)*