

1^ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ — ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1) Αν $\chi \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει : $\chi + \frac{1}{\chi} = 3$, να δείξετε ότι : $\chi^3 + \frac{1}{\chi^3} = 18$.

2) Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ και ισχύει : $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)^2$.

3) Αν ισχύει : $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(\gamma + 2)}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2} = 3$.

4) Αν ισχύει : $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + \beta\gamma} + \frac{\beta^2}{2\beta^2 + \alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{2\gamma^2 + \alpha\beta} = 1$.

5) Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να δείξετε ότι :

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha + \gamma} = 0 .$$

6) Αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, να δείξετε ότι : $\frac{\beta + \gamma}{(\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \gamma)} + \frac{\gamma + \alpha}{(\beta - \gamma) \cdot (\beta - \alpha)} + \frac{\alpha + \beta}{(\gamma - \alpha) \cdot (\gamma - \beta)} = 0$.

7) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ η παράσταση

$$A = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha - \beta)^2 - (\beta - \gamma)^2 - (\gamma - \alpha)^2 \text{ έχει σταθερή τιμή .}$$

8) Αν ισχύει : $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$, όπου $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι : $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}$.

9) (i) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} - \alpha \cdot \beta = (\alpha - \beta)^2$.

(ii) Να αποδείξετε ότι : $\frac{12^3 + 8}{14} - 24 = 100$.

10) Να αποδείξετε ότι : $\frac{2012^4 + 4}{2011^2 + 1} - 2013^2 = 1$.

(Υπόδειξη : Να θέσετε $2012 = \chi$)

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. Αν ισχύει : $\frac{9^v \cdot 3^2 \cdot (3^{-v})^{-1} - 27^v}{3^{3\mu} \cdot 2^3} = \frac{1}{27}$, να δείξετε ότι : $\mu = 1 + v$.

2. Να δείξετε ότι : $\frac{1}{1 + \alpha^{\mu-v}} + \frac{1}{1 + \alpha^{v-\mu}} = 1$.

3. Να συγκρίνετε τις παραστάσεις : $A = 2^{65} - 2^{64} + 2^{60}$, $B = 17 \cdot 3^{40}$

4. Αν $K = [(\alpha^2 \cdot \alpha^{-4}) : \alpha^{-3}] \cdot [(\alpha^2)^3 \cdot (-\alpha)^{-4}]^2$, $\Lambda = [\alpha^3 \cdot (\alpha^2)^{-1}]^{-2} \cdot (\alpha^2)^2 \cdot [(\alpha^3 : \alpha^{-2}) : \alpha^4]^{-5}$, τότε να υπολογίσετε τα K , Λ .

5. Αν ισχύει: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0$, να βρείτε την τιμή του γινομένου : $A = 4^{\frac{3\alpha}{2} + \beta + \alpha\beta} \cdot 6^{-2\alpha\beta} \cdot 9^{\alpha\beta + \beta} \cdot 27^\alpha$.

6. Εάν $\alpha = (2^3)^2$, $\beta = 16^2$, $\gamma = (2^4)^2 \cdot (2^5)^2 : 2^{17}$ να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας μόνο δύναμης με βάση το 2 τα ποσά α , β , γ , α^γ , $\frac{\beta}{\alpha \cdot \gamma}$.

7. Να αποδείξετε με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων ότι :

(i) $1,25^{48} \cdot 4^{72} = 10^{48}$, (ii) $1,75^{32} \cdot 14^{64} \cdot 7^{-96} = 1$, (iii) $\frac{12^{15} \cdot 18^{17}}{36^{24}} = \frac{3}{2}$.

8. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί : $A = \frac{(\alpha^{-2})^3 \cdot \alpha^{-2}}{(\alpha^3)^{-3}}$, $B = \frac{[(\alpha^{-2})^{-1}]^3 \cdot \alpha^{-1}}{(\alpha^2)^3}$ είναι αντίστροφοι.

9. Να δείξετε ότι η παράσταση: $A = \frac{27^{v+1} \cdot 9^{-2v+3}}{6^{-v+1} \cdot 2^{v+8}}$, δεν εξαρτάται από το φυσικό αριθμό v .

10. Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $A = \frac{10^{2011} - 1}{10^{2012} - 1}$, $B = \frac{10^{2012} - 1}{10^{2013} - 1}$.

1) Να γίνουν οι πράξεις στην παράσταση $A = \left(\alpha - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \beta \right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\beta-\alpha} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} \right)$, όπου $\alpha \neq \pm \beta$, έτσι ώστε η παράσταση A να πάρει την απλούστερη μορφή.

2) Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \frac{\frac{\chi-1}{\chi} - \frac{2}{\chi-1} - 4 + \frac{2}{\chi^2-\chi}}{3\chi - \frac{3}{\chi}} + \frac{2}{\chi^2-1} + \frac{\frac{1}{\chi}-\chi}{1+\frac{1}{\chi}}$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή χ ;

3) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ισχύει :

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2}{(\beta-\gamma) \cdot (\beta-\alpha)} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha) \cdot (\gamma-\beta)} = 1.$$

4) Δίνεται η παράσταση : $A = \left(1 + \frac{2}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} \right) : \frac{(1+\chi)^2}{\chi^2 + \lambda + 1}$, όπου $\chi \neq 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η παράσταση A να είναι ανεξάρτητη του χ .

5) Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2 + \frac{2\beta^2}{1 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} \cdot \frac{1}{\alpha}$, $B = \frac{(\alpha-\beta) \cdot (\alpha+\beta)^3 - \alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}$.

Να αποδείξετε ότι : $A \cdot B = 2$

6) Να αποδειχτεί ότι η παράσταση : $A = \frac{\frac{\chi-\alpha}{1+\alpha \cdot \chi} - \frac{\chi-\beta}{1+\beta \cdot \chi}}{1 + \frac{(\chi-\alpha) \cdot (\chi-\beta)}{(1+\alpha \cdot \chi) \cdot (1+\beta \cdot \chi)}}$ είναι ανεξάρτητη του $\chi \in \mathbb{R}$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7) Αν $\alpha = \frac{\chi}{\psi + \omega}$, $\beta = \frac{\psi}{\omega + \chi}$, $\gamma = \frac{\omega}{\chi + \psi}$, να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) = 2$

8) Αν $\chi = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, $\psi = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\beta + \gamma - \alpha)}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \frac{\chi + \psi}{1 - \chi \cdot \psi} \text{ είναι ανεξάρτητη των } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

1. Αν ισχύει : $\frac{\alpha + \beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης : $K = \left(3 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta}\right)^2 + \left(4 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma}\right)^2 + \left(5 - \frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right)^2$.

2. Αν $\chi, \psi \in \mathbb{R}$: $\frac{\chi}{\psi} = -\frac{2}{3}$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις : $A = \frac{\chi + 2\psi}{3\chi - \psi}$, $B = \frac{3\chi\psi + \psi^2}{3\chi^2 - 2\psi^2}$.

3. Δίνεται η σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\eta}{\vartheta}$ και οι αριθμοί χ, ψ, ω από τους οποίους ένας τουλάχιστον να είναι

μη μηδενικός. Να αποδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\chi \cdot \alpha^v + \psi \cdot \gamma^v + \omega \cdot \eta^v}{\chi \cdot \beta^v + \psi \cdot \delta^v + \omega \cdot \vartheta^v}$.

4. Αν $\kappa, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma, \chi, \psi, z \in \mathbb{R}^*$ και ισχύουν οι ισότητες : $\frac{\kappa}{\chi} = \frac{\lambda}{\psi} = \frac{\rho}{z}$,

$\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, να αποδείξετε ότι : $\frac{\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\lambda^2}{\beta^2} + \frac{\rho^2}{\gamma^2} = \frac{\kappa^2 + \lambda^2 + \rho^2}{\chi^2 + \psi^2 + z^2}$.

5. Για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής : $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{6}$ και $2\alpha + 5\beta + 3\gamma = 88$.

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = 4\alpha + 3\beta - 4\gamma$, $B = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$.

6. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει : $\frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2\alpha} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2\beta} = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2\gamma}$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \cdot (\gamma + \alpha)}{8 \cdot \alpha\beta\gamma}$.

7. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύουν : $\frac{\alpha}{0,5} = \frac{\beta}{0,25} = \frac{\gamma}{0,1}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$A = \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, $B = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}$, $\Gamma = \frac{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}$.

