Μάνος Μαυρογιάννης

$16^{ο}$ ΦΥΛΛΑΔΙΟ — ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ (ΜΕΡΟΣ $1^{ο}$)

1) Να λύσετε τις ανισώσεις : (i) $\chi^2 \le 3\chi$ (ii) $2\chi^2 > 1$, (iii) $4\chi^2 > 4\chi - 1$, (iv) $(\chi-1)^2 > 2\chi - 4$,

(v) $2\chi - 1 < \chi^2 \le 3\chi$, (vi) $|\chi^2 - 1| < \chi^2 - \chi - 2$, (vi) $-1 \le \dfrac{\chi^2 - \alpha\cdot\chi + 1}{\chi^2 + \chi + 1} \le 3$, για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

2) Για κάθε $\chi , \psi \in \mathbb{R}^*$ να αποδείξετε ότι : (i) $\chi^2 - \chi\cdot\psi + \psi^2 > 0$, (ii) $\chi^2 + \chi\cdot\psi + 2\cdot\psi^2 > 0$

3) (i) Να λύσετε την εξίσωση : $\chi^2 + 1 \ge \dfrac{5}{2}\chi$ (1) .

(ii) Δίνονται δύο αριθμοί $\kappa , \lambda \in \mathbb{R}$, οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν τη σχέση : $(\lambda - 1)\cdot(\kappa - 1) < 0$. **(α)** Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ.

(β) Να αποδείξετε ότι : $|\kappa - \lambda| \ge \dfrac{3}{2}$.

4) Δίνεται το τριώνυμο : $\chi^2 - 3\cdot\chi + 2$, όπου $\chi \in \mathbb{R}$.

(i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του χ .

(ii) Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha , \beta \in \mathbb{R}^*$, όπου $\alpha < \beta$, για τους οποίους ισχύει : $(\alpha^2 - 3\cdot\alpha + 2)\cdot(\beta^2 - 3\cdot\beta + 2) < 0$. Να αποδείξετε ότι : $|(\alpha - 1)\cdot(\beta - 2)| = (\alpha - 1)\cdot(\beta - 2)$.

5) Δίνεται η ανίσωση : $|\chi - 1| \le 3$ (1) .

(i) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών .

(ii) να βρείτε όλες της ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) .

(iii) να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $\chi^2 + \beta\cdot\chi + \gamma$, όπου $\beta , \gamma \in \mathbb{R}$, το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή , για κάθε $\chi \ge 0$.

6) (i) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda - 3)\cdot\chi^2 - 2(\lambda - 1)\cdot\chi + 2\lambda - 5 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ;

(ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $(\lambda + 1)\cdot\chi^2 + (\lambda + 1)\cdot\chi - 2 < 0$ αληθεύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

(iii) Αν ισχύει : $|\lambda| > \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ οι τιμές του τριωνύμου $-4\cdot\chi^2 + 8\cdot\chi - \lambda^2 - 1$ είναι αρνητικές .

Μάνος Μαυρογιάννης

17ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ — ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ (ΜΕΡΟΣ 2ο)

1) Δίνονται οι ανισώσεις : $2 \leq |\chi| \leq 3$ (1) και $\chi^2 - 4\chi < 0$.

(i) Να βρείτε τις λύσεις τους .

(ii) Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $\chi \in [2\ ,\ 3]$.

(iii) Αν οι αριθμοί $\rho_1\ ,\ \rho_2 \in \mathbb{R}$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων , να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση .

2) Δίνονται τα τριώνυμα : $2\chi^2 - \chi - 1$ και $-6\chi^2 - \chi + 1$.

(i) Να κάνετε τους πίνακες προσήμων των δύο τριωνύμων .

(ii) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $2\chi^2 - \chi - 1 < 0$ και $-6\chi^2 - \chi + 1 < 0$.

(iii) Να βρείτε τις τιμές του $\chi \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η παράσταση : $A = \dfrac{-6\chi^2 - \chi + 1}{2\chi^2 - \chi - 1}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε .

3) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\chi^2 - (\lambda + 1) \cdot \chi + \lambda^2 - 1 = 0$ και (ii) $(\lambda - 1) \cdot \chi^2 - (\lambda - 1) \cdot \chi + \lambda = 0\ ,\ \lambda \neq 1$.

4) Δίνεται η ανίσωση : $2\chi^2 - 3\chi - 2 < 0$ (1) .

(i) Να λύσετε την ανίσωση (1) .

(ii) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $-\dfrac{223}{444}$, $\sqrt[3]{7}$ και $1{,}99$ είναι λύσεις της ανίσωσης (1) .

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\kappa = 2 \cdot \left(-\dfrac{7}{15}\right)^2 + \dfrac{21}{15} - 2$.

(iv) Αν $\lambda \in (-2\ ,\ 2)$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $2\lambda^2 - 3|\lambda| - 2$.

6) Θεωρούμε το τριώνυμο : $f(\chi) = 3 \cdot \chi^2 + \kappa \cdot \chi - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες .

(ii) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

(iii) Αν $\chi_1\ ,\ \chi_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου και $\alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha < \chi_1 < \chi_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot \beta \cdot f(\alpha) \cdot f(\beta)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .