ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left[x^2+2\frac{\beta}{2\alpha}x+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right]=$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]=$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Αν $\Delta>0$, τότε $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ και το τριώνυμο γίνεται:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]=$$

$$=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=\alpha\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)=$$

$=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$, όπου x_1,x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Αν $\Delta=0$, τότε: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και

αν $\Delta<0$, τότε $-\Delta=|\Delta|$ και το τριώνυμο γράφεται

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Άρα:

$$\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\begin{cases}\alpha(x-x_1)(x-x_2), & \Delta>0\\ \alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2, & \Delta=0\\ \alpha\left[\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\dfrac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right], & \Delta<0\end{cases}}$$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Αν $\Delta > 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	0	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

Αν $\Delta = 0$, τότε: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-\beta/2\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α	0	ομόσημο του α

Αν $\Delta < 0$, τότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ και το πρόσημο των τιμών της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	ομόσημο του α

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι:

→ **Ετερόσημο του α**, για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του, μόνο όταν $\Delta > 0$.

→ **Μηδέν,** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

→ **Ομόσημο του α,** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Λυμένες ασκήσεις- Μεθοδολογία ασκήσεων

Παραγοντοποίηση τριωνύμου – απλοποίηση παράστασης

Κάθε τριώνυμο παραγοντοποιείτε ανάλογα με τη διακρίνουσα του (βλέπε θεωρία) .
Στις κλασματικές παραστάσεις παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες.

1. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα:

i. x^2-4x+3 ii. $2x^2-5x-3$ iii. $8x^2+24x+18$

Λύση

i. Το τριώνυμο x^2-4x+3 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=4$ και ρίζες $x=1$ ή $x=3$, άρα $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

ii. Το τριώνυμο $2x^2-5x-3$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot(-3)=49$ και ρίζες $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=3$, άρα $2x^2-5x-3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$

iii. Το τριώνυμο $8x^2+24x+18$ έχει διακρίνουσα $\Delta=24^2-4\cdot8\cdot18=0$ και ρίζα $x=-\frac{24}{2\cdot8}=-\frac{3}{2}$, άρα $8x^2+24x+18=8\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

i. $x^2-\frac{\alpha-\beta}{2}x-\frac{\alpha\beta}{4}$ ii. $x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$ iii. $(\alpha+\beta)^2-5(\alpha+\beta)+6$

Λύση

i. Η παράσταση $x^2-\frac{\alpha-\beta}{2}x-\frac{\alpha\beta}{4}$ είναι τριώνυμο ως προς x και έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-\frac{\alpha\beta}{4}\right)=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4}+\frac{4\alpha\beta}{4}=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+4\alpha\beta}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Delta=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\geq0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι: $$x_{1,2}=\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}}}{2}=\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\begin{array}{l}\overset{x_1}{\nearrow}\ \frac{\alpha}{2}\\ \underset{x_2}{\searrow}\ -\frac{\beta}{2}\end{array},$$

άρα $x^2-\frac{\alpha-\beta}{2}x-\frac{\alpha\beta}{4}=\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x+\frac{\beta}{2}\right)$.

ii. Η παράσταση $x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}+1^2+4\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}+1^2=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

Οι ρίζες του τριωνύμου

είναι: $x_{1,2}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1\pm\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}\begin{cases}\xrightarrow{x_1}\sqrt{2}\\ \xrightarrow{x_2}-1\end{cases}$, άρα

$$x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+1\right)$$

iii. Η παράσταση $(\alpha+\beta)^2-5(\alpha+\beta)+6$ είναι τριώνυμο ως προς $(\alpha+\beta)$ με διακρίνουσα: $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1$ και ρίζες $\alpha+\beta=2$ ή $\alpha+\beta=3$, άρα $(\alpha+\beta)^2-5(\alpha+\beta)+6=(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-3)$.

3. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

i. $\frac{x^2-7x+6}{x^2-4x-12}$ ii. $\frac{3x^2+10x+3}{x^2-9}$ iii. $\frac{9x^2-12x+4}{3x^2-5x+2}$

Λύση

i. Το τριώνυμο x^2-7x+6 έχει $\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot6=25$ και ρίζες $x=1$ ή $x=6$, άρα $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$.

Το τριώνυμο $x^2-4x-12$ έχει $\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-12)=64$ και ρίζες $x=-2$ ή $x=6$, άρα $x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$.

Οπότε: $\frac{x^2-7x+6}{x^2-4x-12}=\frac{(x-1)\cancel{(x-6)}}{(x+2)\cancel{(x-6)}}=\frac{x-1}{x+2}$

ii. Το τριώνυμο $3x^2+10x+3$ έχει $\Delta=10^2-4\cdot3\cdot3=64$ και ρίζες $x=-\frac{1}{3}$ ή $x=-3$ άρα $3x^2+10x+3=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)=(3x+1)(x+3)$

Επειδή $x^2-9=(x-3)(x+3)$, έχουμε: $\frac{3x^2+10x+3}{x^2-9}=\frac{(3x+1)\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}=\frac{3x+1}{x-3}$

iii. Το τριώνυμο $9x^2-12x+4$ έχει $\Delta=0$ και ρίζα $x=-\frac{-12}{18}=\frac{2}{3}$, άρα

$9x^2-12x+4=9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$.

Το τριώνυμο $3x^2-5x+2$ έχει $\Delta=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=1$ και ρίζες $x=1$ ή $x=\frac{2}{3}$,

άρα $3x^2-5x+2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$.

Οπότε $\frac{9x^2-12x+4}{3x^2-5x+2}=\frac{\cancel{9}^{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{3}\cancel{\left(x-\frac{2}{3}\right)}(x-1)}=\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x-1}=\frac{3x-2}{x-1}$.

4. i. Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις: $2\alpha^2-4\alpha\beta-3\beta^2$ και $\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2$.

ii. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{2\alpha^2-5\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2}$.

Λύση

i. Η παράσταση $2\alpha^2-5\alpha\beta-3\beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α με διακρίνουσα

$\Delta=(-5\beta)^2-4\cdot2\cdot(-3\beta^2)=49\beta^2$ και ρίζες $\alpha=-\frac{\beta}{2}$ ή $\alpha=3\beta$, άρα

$2\alpha^2-5\alpha\beta-3\beta^2=2\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)(\alpha-3\beta)=(2\alpha+\beta)(\alpha-3\beta)$

Η παράσταση $\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α με διακρίνουσα

$\Delta=(-2\beta)^2-4\cdot1\cdot(-3\beta^2)=16\beta^2$ και ρίζες $\alpha=-\beta$ ή $\alpha=3\beta$, άρα

$\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-3\beta)$

ii. $\frac{2\alpha^2-5\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta-3\beta^2}=\frac{(2\alpha+\beta)\cancel{(\alpha-3\beta)}}{(\alpha+\beta)\cancel{(\alpha-3\beta)}}=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$

Πρόσημο τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$ είναι:

→ Ετερόσημο του α, για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών του, μόνο όταν $\Delta>0$.

→ Μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.

→ Ομόσημο του α, σε κάθε άλλη περίπτωση.

Λύση της ανίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq$ ή ≥ 0, $\alpha\neq0$

Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Λύση είναι οι τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο είναι αρνητικό, στη περίπτωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ και θετικό στη περίπτωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$.

Πρόσημο τριωνύμου με παράμετρο

- Ενα τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, όταν $\Delta<0$.
- Για να είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $\Delta<0$ και $\alpha>0$.
- Για να είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $\Delta<0$ και $\alpha<0$.
- Για να είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $\Delta\leq 0$ και $\alpha>0$.
- Για να είναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $\Delta\leq 0$ και $\alpha<0$.

5. Για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

i. x^2-6x+8 ii. $4x^2+4x+1$ iii. $2x^2-3x+6$

Λύση

i. Το τριώνυμο x^2-6x+8 έχει $\Delta=4$ και ρίζες $x=2$ ή $x=4$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	−	0	+	

Το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha=1>0$ εκτός των ριζών, δηλαδή $x^2-6x+8>0$ για κάθε $x<2$ ή $x>4$ και ετερόσημο του α εντός των ριζών, δηλαδή $x^2-6x+8<0$ για κάθε $2<x<4$.

ii. Το τριώνυμο $4x^2+4x+1$ έχει

$\Delta=0$ και ρίζα $x=-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$4x^2+4x+1$		+	0	+	

Το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha=4>0$ εκτός των ριζών, οπότε $4x^2+4x+1>0$ για κάθε $x\neq-\dfrac{1}{2}$.

iii. Το τριώνυμο $2x^2-3x+6$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-39<0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha=2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $2x^2-3x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

i. $-x^2+x+6$ ii. $-2x^2+12x-18$ ii. $-3x^2+x-2$

Λύση

i. Το τριώνυμο $-x^2+x+6$ έχει $\Delta=25$ και ρίζες $x=-2$ ή $x=3$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		−	0	+	0	−	

Το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha=-1<0$ εκτός των ριζών, δηλαδή $-x^2+x+6<0$ για κάθε $x<-2$ ή $x>3$ και ετερόσημο του α εντός των ριζών, δηλαδή $-x^2+x+6>0$ για κάθε $-2<x<3$.

ii. Το τριώνυμο $-2x^2+12x-18$ έχει

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-2x^2+12x-18$		−	0	−	

$\Delta = 0$ και ρίζα $x = 3$.
Είναι ομόσημο του $\alpha = -2 < 0$
εκτός των ριζών, οπότε $-2x^2 + 12x - 18 < 0$ για κάθε $x \neq 3$.

iii. Το τριώνυμο $-3x^2 + x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -23 < 0$, οπότε είναι ομόσημο του $\alpha = -3 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $-3x^2 + x - 2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

i. $3x^2 \geq 12x$ ii. $2x^2 - 32 \leq 0$ iii. $x^2 + 2x \leq 8$

Λύση

i. $3x^2 \geq 12x \Leftrightarrow 3x^2 - 12x \geq 0 \Leftrightarrow$
$3x(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$3x^2 - 12x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii. **1^{ος} τρόπος**
$2x^2 - 32 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow$
$2(x-4)(x+4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$2x^2 - 32$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2^{ος} τρόπος
$2x^2 - 32 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 32 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

iii. $x^2 + 2x \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$
Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 8$ έχει $\Delta = 36$ και ρίζες $x = -4$ ή $x = 2$. Άρα

$x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow$
$(x+4)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x^2 + 2x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

8. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

i. $x^2 - 5x + 6 < 0$ ii. $3x^2 + 6x - 9 > 0$

Λύση

i. Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\Delta = 1$ και ρίζες $x = 2$ ή $x = 3$, άρα
$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii. Το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 9$ έχει $\Delta = 144$ και ρίζες $x = -3$ ή $x = 1$, άρα: $3x^2 + 6x - 9 > 0 \Leftrightarrow$
$3(x+3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2 + 6x - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

9. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

i. $x^2 + 16 > 8x$ ii. $3x^2 - 12x + 12 \geq 0$ iii. $9x^2 + 4 \leq 12x$

Λύση

i. $x^2+16>8x \Leftrightarrow x^2-8x+16>0$
Το τριώνυμο $x^2-8x+16$ έχει $\Delta=0$ κα
$x^2-8x+16>0 \Leftrightarrow (x-4)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x^2-8x+16$		$+$	0	$+$	

ii. Το τριώνυμο $3x^2-12x+12$ έχει
$\Delta=0$ και ρίζα το $x=2$, άρα:
$3x^2-12x+12\geq 0 \Leftrightarrow$
$3(x-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$3x^2-12x+12$		$+$	0	$+$	

iii. $9x^2+4\leq 12x \Leftrightarrow 9x^2-12x+4\leq 0$
Το τριώνυμο $9x^2-12x+4$ έχει
$\Delta=0$ και ρίζα το $x=\dfrac{2}{3}$, άρα:

x	$-\infty$		$2/3$		$+\infty$
$9x^2-12x+4$		$+$	0	$+$	

$$9x^2-12x+4\leq 0 \Leftrightarrow 9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

10. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:
i. $x^2-3x+5\leq 0$ ii. $2x^2-12x+18<0$ iii. $-5x^2+4x-1<0$

Λύση

i. Το τριώνυμο x^2-3x+5 έχει
$\Delta=-11<0$, άρα
$x^2-3x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε η ανίσωση $x^2-3x+5\leq 0$ είναι αδύνατη.

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-3x+5		$+$	

ii. Το τριώνυμο $2x^2-12x+18$ έχει
$\Delta=0$ και ρίζα το $x=3$, άρα:
$2x^2-12x+18\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε η ανίσωση $2x^2-12x+18<0$ είναι αδύνατη.

x	$-\infty$
0	2

iii. Το τριώνυμο $-5x^2+4x-1$ έχει
$\Delta=-4<0$, άρα
$-5x^2+4x-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-5x^2+4x-1$		$-$	

11. Να βρεθούν οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $2<x^2-5x+8<4$.

Λύση

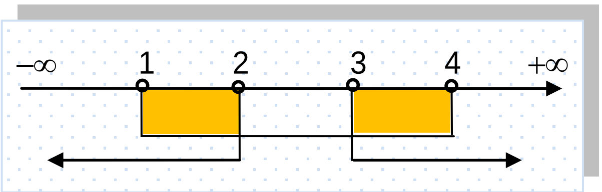
$$2<x^2-5x+8<4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+8>2 \\ x^2-5x+8<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$$

Το τριώνυμο x^2-5x+6 έχει $\Delta=1$
και ρίζες $x=2$ ή $x=3$.
Άρα $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x<2$ ή $x>3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Το τριώνυμο x^2-5x+4 έχει $\Delta=9$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.
Άρα $x^2-5x+4<0 \Leftrightarrow 1<x<4$

x	$-\infty$ 1
ο	4 ο$+\infty$



Με συναλήθευση προκύπτει ότι $1<x<2$ ή $3<x<4$

12. Δίνεται η εξίσωση $4x^2-8\lambda x+17\lambda-4=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:
i. έχει ρίζες άνισες ii. έχει ρίζες ίσες iii. είναι αδύνατη

Λύση

i. Η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς x.
Το τριώνυμο $4x^2-8\lambda x+17\lambda-4$ έχει διακρίνουσα:
$\Delta=(-8\lambda)^2-4\cdot4\cdot(17\lambda-4)=64\lambda^2-272\lambda+64=16(4\lambda^2-17\lambda+4)$
Για να έχει η εξίσωση ρίζες άνισες, πρέπει:
$\Delta>0 \Leftrightarrow 16(4\lambda^2-17\lambda+4)>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-17\lambda+4>0$

Το τριώνυμο $4\lambda^2-17\lambda+4$ έχει $\Delta_1=225$ και ρίζες $\lambda=\frac{1}{4}$ ή $\lambda=4$.

Άρα

$4\lambda^2-17\lambda+4>0 \Leftrightarrow \lambda<\frac{1}{4}$ ή $\lambda>4$

λ	$-\infty$ 1/4
ο	4 ο$+\infty$

ii. Για να έχει η εξίσωση ρίζες ίσες, πρέπει:
$\Delta=0 \Leftrightarrow 16(4\lambda^2-17\lambda+4)=0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-17\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{4}$ ή $\lambda=4$

iii. Για να είναι η εξίσωση αδύνατη, πρέπει:
$\Delta<0 \Leftrightarrow 16(4\lambda^2-17\lambda+4)<0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-17\lambda+4<0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\lambda<4$

13. Να αποδεδειχθεί ότι το τριώνυμο $x^2-(\lambda+2)x+2\lambda-1$ έχει ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Λύση

Για να έχει το τριώνυμο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει να έχει $\Delta>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
Είναι $\Delta=(\lambda+2)^2-4\cdot1\cdot(2\lambda-1)=\lambda^2+4\lambda+4-8\lambda+4=\lambda^2-4\lambda+8$
Επειδή το τριώνυμο $\lambda^2-4\lambda+8$ έχει $\Delta'=(-4)^2-4\cdot1\cdot8=-16<0$, είναι ομόσημο του $\alpha=1>0$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα $\Delta=\lambda^2-4\lambda+8>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε

το τριώνυμο $x^2-(\lambda+2)x+2\lambda-1$ έχει ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

14. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η ανίσωση $x^2-2\lambda x+3\lambda-2>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Για να είναι το τριώνυμο $x^2-2\lambda x+3\lambda-2$ ομόσημο του $\alpha=1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει να μην έχει ρίζες, άρα $\Delta<0\Leftrightarrow(2\lambda)^2-4(3\lambda-2)<0\Leftrightarrow$

$4\lambda^2-12\lambda+8<0\Leftrightarrow\lambda^2-3\lambda+2<0$.

Το τριώνυμο $\lambda^2-3\lambda+2$ έχει $\Delta'=1$ και ρίζες $\lambda=1$ ή $\lambda=2$, άρα:

$\lambda^2-3\lambda+2<0\Leftrightarrow$

$(\lambda-1)(\lambda-2)<0\Leftrightarrow\ \ 1<\lambda<2$

λ	$-\infty$ 1
ο	2 σ$+\infty$

15. Δίνεται το τριώνυμο $(23-3\lambda)x^2-2(\lambda-5)x+2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθεί η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λυθεί η ανίσωση $\Delta<0$.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(23-3\lambda)x^2-2(\lambda-5)x+2>0$, αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

i. Είναι $\Delta=4(\lambda-5)^2-4\cdot(23-3\lambda)\cdot2=4(\lambda^2-10\lambda+25)-8(23-3\lambda)\Leftrightarrow$

$\Delta=4\lambda^2-40\lambda+100-184+24\lambda=4\lambda^2-16\lambda-84=4(\lambda^2-4\lambda-21)$

$\Delta<0\Leftrightarrow4(\lambda^2-4\lambda-21)<0\Leftrightarrow\lambda^2-4\lambda-21<0$

Το τριώνυμο $\lambda^2-4\lambda-21$ έχει $\Delta'=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-21)=100$ και ρίζες $\lambda=-3$ ή $\lambda=7$, άρα

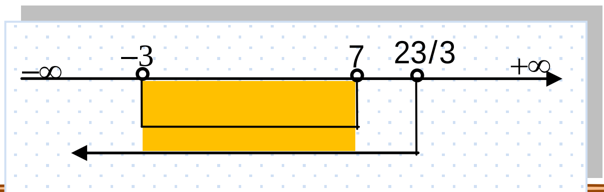
$\lambda^2-4\lambda-21<0\Leftrightarrow$

$(\lambda+3)(\lambda-7)<0\Leftrightarrow\ \ -3<\lambda<7$

λ	$-\infty$ -3
ο	7 σ$+\infty$

ii. Η ανίσωση $(23-3\lambda)x^2-2(\lambda-5)x+2>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, μόνο όταν το τριώνυμο $(23-3\lambda)x^2-2(\lambda-5)x+2$ έχει $\Delta<0$ και τότε είναι ομόσημο του $\alpha=23-3\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή όμως $(23-3\lambda)x^2-2(\lambda-5)x+2>0$, πρέπει και $23-3\lambda>0$. Άρα τελικά πρέπει:

$\Delta<0\Leftrightarrow-3<\lambda<7$ και $23-3\lambda>0\Leftrightarrow23>3\lambda\Leftrightarrow\lambda<\dfrac{23}{3}$.



Με συναλήθευση προκύπτει ότι $-3 < \lambda < 7$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Ερωτήσεις κατανόησης

16. Να τοποθετήσετε μέσα σε κάθε ορθογώνιο το γράμμα Σ αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις τις θεωρείτε σωστές ή το Λ αν τις θεωρείτε λανθασμένες

i. Όταν το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει $\Delta > 0$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$.

ii. Για το τριώνυμο $f(x) = (x-\kappa)^2 - \lambda$, $\lambda > 0$ ισχύει $\Delta < 0$

iii. Αν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου τότε ισχύει: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - x_1)(\alpha x - \alpha x_2)$

iv. Το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, δεν μπορεί να βρεθεί όταν $\Delta < 0$.

v. Τα τριώνυμα $x^2 + 4x + 3$ και $x^2 + 4|x| + 3$ έχουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το ίδιο πρόσημο.

vi. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και ισχύει ο

πίνακας

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		$-$	0	$+$	0	$-$	

, τότε $\alpha < 0$.

vii. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ είναι αδύνατη τότε η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ θα είναι επίσης αδύνατη.

viii. Αν για το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ ισχύει $\alpha f(1) < 0$ τότε αυτό έχει δύο ρίζες άνισες.

17. Ο αριθμός των ακεραίων που επαληθεύουν την ανίσωση $x^2 + 81 < 18x$ είναι:

Α. 0 Β. 4 Γ. 7 Δ. 8 Ε. 2

18. Αν η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda - 3 \leq 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε οι συνθήκες που χρησιμοποιούμε προκειμένου να υπολογίσουμε το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:

Α) $\Delta \leq 0,\ \lambda - 1 > 0$ Β) $\Delta \geq 0,\ \lambda - 1 < 0$ Γ) $\Delta > 0,\ \lambda - 1 < 0$

Δ) $\Delta \leq 0,\ \lambda - 1 < 0$ Ε) $\Delta < 0,\ \lambda - 1 < 0$

19. Εστω το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν:

Α) $\Delta > 0$ και $\alpha < 0$ Β) $\Delta \geq 0$ και $\alpha < 0$ Γ) $\Delta \leq 0$ και $\alpha < 0$

Δ) $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$ Ε) $\Delta < 0$ και $\alpha < 0$

20. Αν για το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ είναι $\alpha f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:
Α) $\Delta>0$ Β) $\Delta<0$ Γ) $\Delta\leq 0$ Δ) $\Delta<0$ και $\alpha>0$ Ε) $\Delta<0$ και $\alpha<0$

21. Αν οι αριθμοί -2 και 4 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=x^2-\kappa x+\lambda$ ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

Α) $f(5)<0$ Β) $f(-5)<0$ Γ) $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ Δ) $f(1000)\leq 0$ Ε) $f(-150)<0$

22. Αν ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$ είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $\alpha f(1)<0$, ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα:

Α) $(-\infty,\rho_1)$ Β) (ρ_1,ρ_2) Γ) $[\rho_1,\rho_2]$ Δ) $[\rho_2,+\infty)$ Ε) $(\rho_2,+\infty)$

23. Οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ είναι $x_1=2$, $x_2=-3$ και η παραγοντοποιημένη μορφή του $(2-x)(x+3)$. Τότε ο α ισούται με:

Α. 1 Β. - 1 Γ. 2 Δ. - 2 Ε. 3

24. Κάθε στοιχείο της στήλης (Α) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β). Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών:

στήλη (Α) Σχέσεις	στήλη (Β) $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$
	1. αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Α) $\Delta<0$ και $\alpha<0$	2. αληθεύει για κάθε x που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου
Β) $\Delta<0$ και $\alpha>0$	3. αληθεύει για κάθε x εκτός των ριζών του τριωνύμου
Γ) $\Delta>0$ και $\alpha>0$	4. δεν αληθεύει για κανένα x
	5. αληθεύει για x ίσο με τις ρίζες του τριωνύμου
	6. δεν μπορούμε να απαντήσουμε για ποια x αληθεύει η ανίσωση

Α΄ ΟΜΑΔΑ

25. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

i. x^2-3x+2 ii. $3x^2+5x+2$ iii. $-3x^2-3x+18$

iv. $9x^2-24x+16$ v. $10x^2-20x+10$ vi. $x^2+x+\frac{1}{4}$

26. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

i. $x^2-6\sqrt{2}x+9$ ii. $x^2-4\sqrt{3}x+8$ iii. $x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x-\sqrt{3}$

iv. $x^2-\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{6}$ v. $4x^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x-\sqrt{6}$

27. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα:

i. $\kappa^2x^2-2\lambda\kappa^2+\lambda^2\kappa^2-1$, $\kappa\neq 0$

ii. $\left(\kappa^2-\lambda^2\right)x^2-2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)x+\kappa^2-\lambda^2$, $\kappa\neq\pm\lambda$

iii. $\alpha^2x^2-2\alpha^3x+\alpha^4-1$, $\alpha\neq 0$

iv. $(x+y)^2-7(x+y)+10$

v. $\alpha^2x^2-2\alpha^2\beta x+\alpha^2\beta^2-1$, $\alpha\neq 0$

vi. $5\alpha x^2+(5\alpha-3\beta)x-3\alpha\beta$, $\alpha\neq 0$

vii. $x^2-(2\alpha+\beta)x+\alpha^2+\alpha\beta$

28. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2+5xy-3y^2$ και στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x^2+5xy-3y^2=15 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

29. Να απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις:

i. $\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$ ii. $\dfrac{3x^2+3x-18}{x^2+4x+3}$ iii. $\dfrac{9x^2-4}{9x^2-12x+4}$

iv. $\dfrac{x^2+3x-18}{x^2+4x-12}$ v. $\dfrac{x^2-2\lambda x-3\lambda^2}{x^2-7\lambda x+12\lambda^2}$ vi. $\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$

30. Για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i. x^2-7x+6 ii. $9x^2+6x+1$ iii. $3x^2-2x+5$

iv. $-x^2+5x-6$ v. $-4x^2+20x-25$ vi. $-3x^2-4x-5$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2\leq 2x$ ii. $3x+x^2\geq 0$ iii. $x^2+x\leq 2$

iv. $2x^2+40\geq 18x$ v. $3x^2+7x+2>0$ vi. $15x^2-30x-45<0$

vii. $x+6\ge x^2$ viii. $-4x^2+4x+3\le 0$ ix. $-3x^2+6\sqrt{2}x+18\ge 0$

32. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i. $(x+4)(x+5)-4\ge 2$ ii. $-3x^2+7x-4>0$ iii. $(x+5)x\le 2(x^2+2)$

33. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i. $4x^2+9>12x$ ii. $x^2-6x+9<0$ iii. $9x^2-6x+1\ge 0$
iv. $x^2+4x+4\le 0$ v. $x(x+8)>-16$ vi. $9x^2-20x+4\le 0$

34. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i. $4x-5<3x^2$ ii. $x^2-x+1>0$ iii. $x^2+7<3x$
iv. $2x^2-6x+11\le 0$ v. $-5x^2+7x-6\ge 0$ vi. $-x^2+4x\le 21$

35. Δίνεται το τριώνυμο $x^2-8x+12$.
i. Να βρείτε τις ρίζες του.
ii. Όταν το x μεταβάλλεται από 3 έως 5, το πρόσημο του $x^2-8x+12$ μεταβάλλεται; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

36. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
i. $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$ ii. $f(x)=\sqrt{2-x+x^2}$ iii. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$
iv. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-7x+6}}$ v. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-4x+2}}$ vi. $f(x)=\sqrt{-5x^2+10x-5}$

37. Για ποιες τιμές του x το τριώνυμο $x^2-14x+50$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26;

38. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις: $x^2-8<0$ και $x^2-5x+6>0$

39. Για ποιες τιμές του x ισχύει: $-5<-x^2+2x+3<0$

40. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $2x-1<x^2-4<12$

41. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x^2+8x+10|-3}$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

42. Να απλοποιήσετε την παράσταση $|x^2-6x+8|+|x^2-3x+2|$

Β΄ ΟΜΑΔΑ

43. Να απλοποιήστε το κλάσμα $\dfrac{\left(x^2+3x-4\right)^2-\left(x^2-x\right)^2}{(x^3-1)-(x^2+x-2)}$

44. Να βρείτε το $k\in\mathbb{R}$ ώστε να απλοποιείται το κλάσμα $\dfrac{x^2+kx-3}{x^2-4x+3}$

45. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες πραγματικές και άνισες:

i. $(\lambda+5)x^2-2(1-\lambda)x+1=0$, $\lambda\neq-5$ ii. $\left(5\lambda-2\right)x^2-6\lambda x+3\lambda+1=0$, $\lambda\neq\dfrac{2}{5}$.

46. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $\left(1-\lambda\right)x^2-3\left(\lambda-1\right)x+6=\lambda$:

i. έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.
ii. δεν έχει πραγματικές ρίζες.

47. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2-\left(\lambda-2\right)x+2-\lambda=0$ έχει ρίζες.

48. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^2-10\lambda x+7\lambda-1=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

49. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2+\lambda x+\lambda^2-\lambda-2=0$.

50. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left(\lambda+3\right)x^2-2\left(\lambda-2\right)x+3\left(\lambda-2\right)=0$.

51. Να αποδείξετε ότι η ανίσωση $x^2+6\lambda x+9\lambda^2+4>0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

52. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το τριώνυμο $\left(\mu-5\right)x^2-4x+4$ είναι θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

53. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει:
$\left(3-\lambda\right)x^2-2\left(7-4\lambda\right)x+8+4\lambda>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

54. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\left(\lambda+1\right)\left(x^2+2\right)>2\lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

55. Δίνεται το τριώνυμο $\left(\lambda-2\right)x^2+\left(\lambda-2\right)x+2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta<0$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda-2)x^2+(\lambda-2)x+2>0$, αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

56. Δίνεται η ανίσωση $(\lambda+1)x^2+2(3-\lambda)x+3\lambda-5>0$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση επαληθεύεται για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών της.

57. Να αποδείξετε ότι $x^2+xy+y^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει το ίσον ;

58. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει $x^2+y^2-2x-y+\lambda>0$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

59. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις x και y είναι 24 cm. Αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου αυξηθούν και οι δύο κατά 2 cm, το εμβαδόν του θα γίνει 60 cm^2. Να βρεθούν τα x, y.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

16. i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Λ v. Λ vi. Σ vii. Λ viii. Σ
17. Α **18.** Δ **19.** Δ **20.** Γ **21.** Γ **22.** Β
23. Β **24.** Α.4 Β.1 Γ.3
28. $x=2, y=1$
29. i. $x-2$ ii. $\frac{3x-6}{x+1}$ iii. $\frac{3x+2}{3x-2}$ iv. $\frac{x-3}{x-2}$ v. $\frac{x+\lambda}{x+4\lambda}$ vi. $\frac{x+4}{x-2}$
31. i. $[0,2]$ ii. $(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$ iii. $[-2,1]$ iv. $(-\infty,4]\cup[5,+\infty)$ v. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ vi. $(-1,3)$ vii. $[-2,3]$ viii. $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ ix. $\left[-\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$
32. i. $(-\infty,-7]\cup[2,+\infty)$ ii. $\left(\frac{1}{3},2\right)$ iii. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$
33. i. $x\neq\frac{3}{2}$ ii. αδ. iii. $\mathbb{R}$ iv. $x=-2$ v. $x\neq-4$ vi. $\left[\frac{2}{9},2\right]$
34. i. $\mathbb{R}$ ii. $\mathbb{R}$ iii. αδ. iv. αδ. v. αδ. vi. $\mathbb{R}$

35. i. 2, 6 ii. όχι γιατί $x^2-8x-12<0$ στο $[3,5]$
36. i. $A=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$ ii. $A=\mathbb{R}$ iii. $A=\mathbb{R}$ iv. $A=(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$ v. $A=\mathbb{R}-\{1\}$ vi. $A=\{1\}$
37. $(2,5)\cup(9,12)$ **38.** $(-2\sqrt{2},2)$
39. $(-2,-1)\cup(3,4)$ **40.** $(-4,-1)\cup(3,4)$
41. δεν ορίζεται **43.** $\frac{(x-1)(8x+16)}{x^2-3}$ **44.** ±2
45. $(-\infty,-5)\cup(-5,-1)\cup(4,+\infty)$, ii. $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$
46. i. $\left(-\infty,-\frac{16}{5}\right)\cup(1,+\infty)$ ii. $\left(-\frac{16}{5},1\right)$
47. $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$ **52.** $\mu\in(5,6)$ **53.** $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$
54. $\left(-2-\sqrt{2},-1\right)$ **55.** i. $2<\lambda<10$, ii. $2<\lambda<10$
56. $\left(-1-2\sqrt{2},-1\right)$ **58.** $\left(\frac{5}{4},+\infty\right)$ **59.** 4, 8

Σ.Μιχαήλογλου-Ε.Τόλης