



Σχ. έτος 2024-25

- ΚΕΦ.1: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
- ΚΕΦ.2: ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
- ΚΕΦ.3: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
- ΚΕΦ.4: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
- ΚΕΦ.5: ΕΚΘΕΤΙΚΗ & ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**ΚΕΦ.1- ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ****1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ****ΑΣΚΗΣΗ 1.** ΘΕΜΑ 2-14321

Δυο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από τον Βασίλη.

Α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β) Δίνεται επιπλέον ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

**ΑΣΚΗΣΗ 2.** ΘΕΜΑ 2-14234

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$  και  $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$

Α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

Β) Να δείχτεί ότι η ευθεία  $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$  διέρχεται από το Μ

**ΑΣΚΗΣΗ 3.** ΘΕΜΑ 2-14235

Α) Με βάση τα δεδομένα του διπλανού σχήματος να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η) .

Β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε) και (η) .

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** ΘΕΜΑ 2-14281

Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Α) Αν  $\lambda = -3$  να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και στη συνέχεια να βρείτε μία από αυτές.

Β) Αν  $\lambda = 3$  να αποδείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο .

Γ) Αν  $\lambda = 0$  να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** ΘΕΜΑ 2-14285

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 2x + y = 5$ ,  $\varepsilon_2 : -x + 3y = -9$  και  $\varepsilon_3 : 2x + 3y = 7$ .

Α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

Β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_3$ .

Γ) Με τη βοήθεια του α) ερωτήματος να δείξετε ότι το σημείο τομής των  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  ανήκει και στην ευθεία  $\varepsilon_1$

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** ΘΕΜΑ 2-18431

Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$  με αγνώστους  $x, y$  και  $k$  παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν  $k = 2$ .

β) Να λύσετε το σύστημα όταν  $k = 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 7.** ΘΕΜΑ 2-15011

Ο Κώστας κατέθεσε σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και των 50 €. Η συνολική αξία των χρημάτων που κατέθεσε είναι 480 €.

α) Αν  $X$  είναι το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και  $y$  το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 50 €, να επιλέξετε ένα από τα παρακάτω συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του προβλήματος.

$$\text{Α.} \begin{cases} y = 15 - x \\ 50y - 20x = 480 \end{cases} \quad \text{Β.} \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \quad \text{Γ.} \begin{cases} y - x = 15 \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \quad \text{Δ.} \begin{cases} y - x = 15 \\ 50y - 20x = 480 \end{cases}$$

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα, να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και πόσα των 50 € κατέθεσε ο Κώστας.

**ΑΣΚΗΣΗ 8.** ΘΕΜΑ 2-15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν  $x$  το πλήθος των γονιών και  $y$  το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

$$\text{Α.} \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \quad \text{Β.} \begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases} \\ \text{Γ.} \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \quad \text{Δ.} \begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

**ΑΣΚΗΣΗ 9.** ΘΕΜΑ 2-15006

α) Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών  $\varepsilon_1 : 2x - 4y = -2$  και  $\varepsilon_2 : 5x - 10y = 3$ ;

**ΑΣΚΗΣΗ 10.** ΘΕΜΑ 2-15195

α) Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες  $(\varepsilon_1) : 5x - y = -1$  και  $(\varepsilon_2) : 3x + y = 2$  και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

**ΑΣΚΗΣΗ 11.** ΘΕΜΑ 2-15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος  $(0, 4)$  δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.  
 β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.  
 γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$  και  $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 12.** ΘΕΜΑ 4-15117

Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλλει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

| σάντουιτς      | φέτες ζαμπόν | φέτες τυρί | φέτες γαλοπούλα | ψωμί   | κόστος |
|----------------|--------------|------------|-----------------|--------|--------|
| 1 <sup>ο</sup> | 2            | 4          | 0               | 0,3 €  | 3,8 €  |
| 2 <sup>ο</sup> | 1            | 2          | 3               | 0,3 €  | 3,55 € |
| 3 <sup>ο</sup> | 3            | 0          | 3               | 0,3 €  | 4,05 € |
| 4 <sup>ο</sup> | 2            | 2          | 1               | 0,3 €  |        |
|                |              |            |                 | Σύνολο |        |

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.  
 β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.  
 γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους;  
**ΑΣΚΗΣΗ 13.** Να λυθεί η εξίσωση:  $|x-3y+1|+|2x+y-5|=0$

**ΑΣΚΗΣΗ 15.** Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases}$$

- α) Αποδείξτε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ .  
 β) Υπολογίστε τα  $x$  και  $y$ .  
 γ) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η λύση  $(x, y)$  που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση:  $x + y = \frac{11}{3}$

**ΑΣΚΗΣΗ 16.** Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:  $\begin{cases} D_x + D_y = D \\ D_x - D_y = 3D \end{cases}$ . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

**ΑΣΚΗΣΗ 17.** Σε ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει  $D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y$  με  $D \neq 0$  και  $x + y = 6$ . Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $x$  και  $y$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 18.** Να λύσετε τα συστήματα:

a)  $\begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = -1 \\ x + z = 1 \end{cases}$  και  
 b)  $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

**ΑΣΚΗΣΗ 19.**

α) Να λύσετε το σύστημα 
$$\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

- β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες  $(\varepsilon_1): 5x - y = -1$  και  $(\varepsilon_2): 3x + y = 2$  και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

## 1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

**ΑΣΚΗΣΗ 20** ΘΕΜΑ 3-14979

Δίνεται το σύστημα (Σ):  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ .

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ).

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α.

**ΑΣΚΗΣΗ 21** ΘΕΜΑ 4-15118

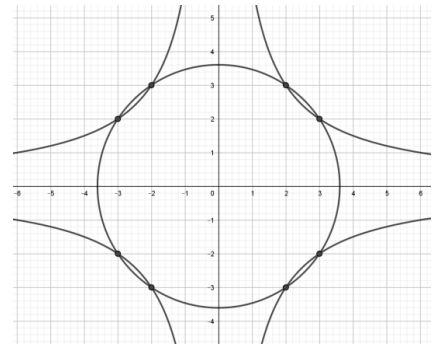
Δίνεται το σύστημα (Σ<sub>1</sub>):  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

α) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ<sub>1</sub>) λύσεις και του συστήματος (Σ<sub>2</sub>):  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ |xy| = 6 \end{cases}$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Η γεωμετρική παράσταση του συστήματος (Σ<sub>2</sub>) φαίνεται από το διπλανό σχήμα. Με βάση το σχήμα:

- i) να βρείτε τις λύσεις του συστήματος (Σ<sub>2</sub>)  
 ii) να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ<sub>1</sub>) και να σημειώσετε τις λύσεις του.



**ΑΣΚΗΣΗ 22** Σε ένα σύστημα δυο Σε σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,y ισχύει:  $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$ .

α) Δείξτε ότι  $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$

β) Να υπολογίσετε τα x και y.

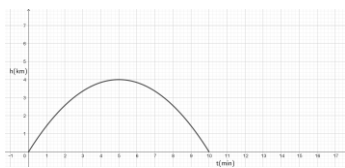
γ) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

**ΑΣΚΗΣΗ 23** Να λύσετε τις εξισώσεις

- i)  $(x^2 - 4x + 6)^2 - 7(x^2 - 4x + 5)^2 + 5 = 0$  και  
 ii)  $6\frac{x}{x^2-1} + 6\frac{x^2-1}{x} - 13 = 0$

**ΚΕΦ.2 - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ****2.1.ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ****ΑΣΚΗΣΗ 24. ΘΕΜΑ 2-15787**

Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α) Να βρείτε:

- Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.
  - Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.
- β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος  $1\text{ km}$ .
- Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.
  - Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ 25. ΘΕΜΑ 2-15437**

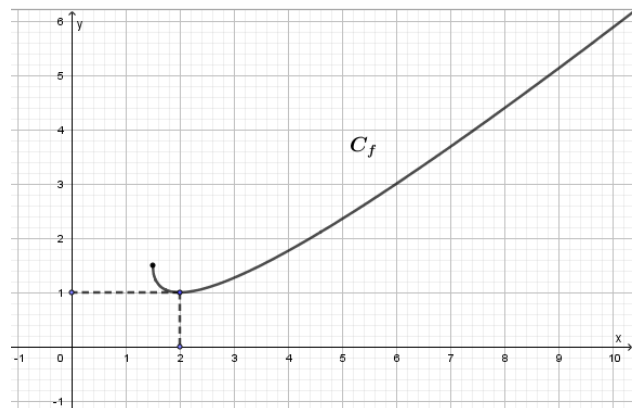
Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$ , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

- Γνησίως φθίνουσα
- Γνησίως αύξουσα

**ΑΣΚΗΣΗ 26. ΘΕΜΑ 2-15645**

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος

$h$  του αντικείμενου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Να βρείτε:

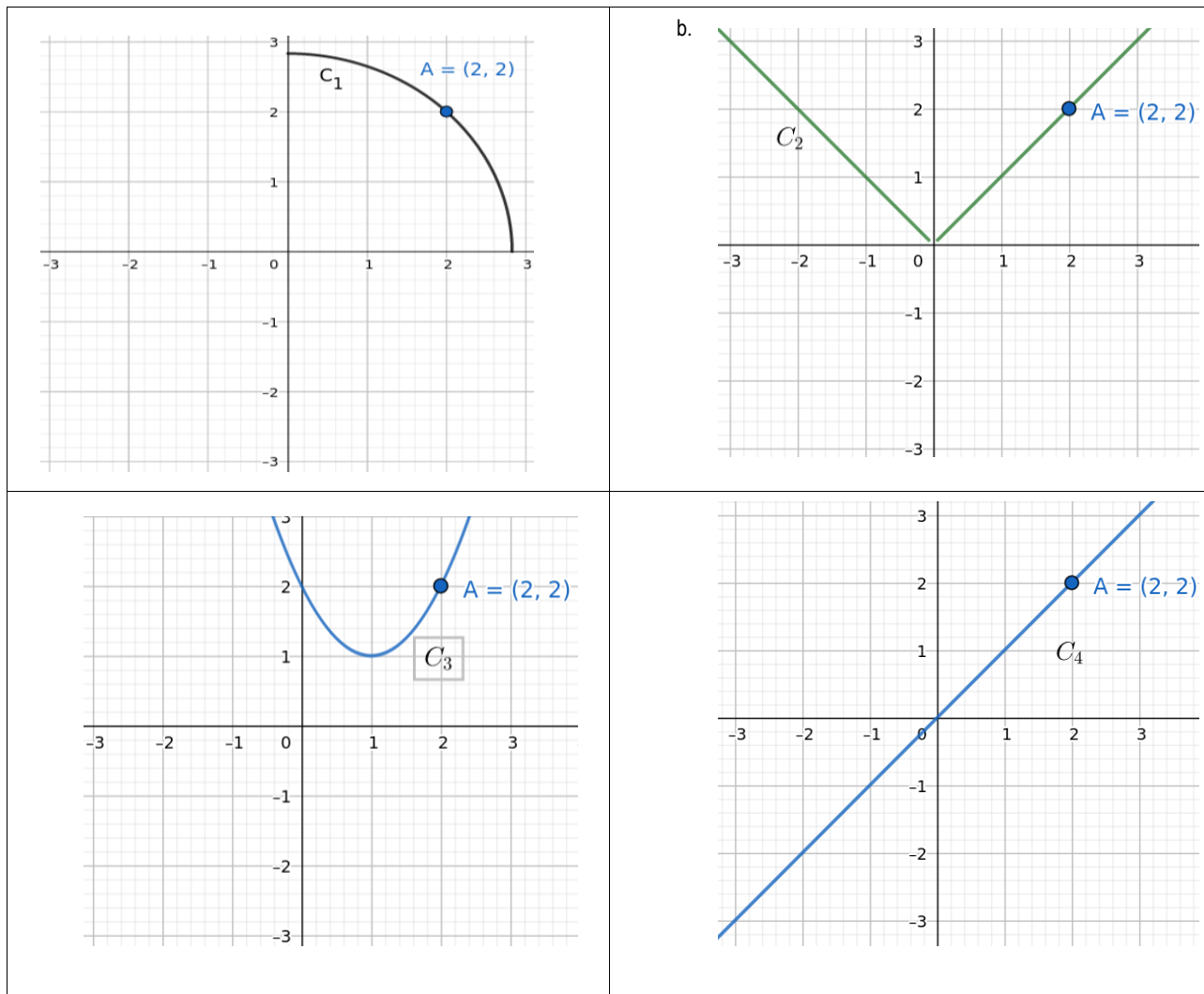
- Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει  $1\text{ m}$  από το έδαφος.
- Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικείμενου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.
- Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.



**ΑΣΚΗΣΗ 27.**

ΘΕΜΑ 2-14976

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις  $C_1, C_2, C_3, C_4$  αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

β) Για τις συναρτήσεις  $C_2, C_4$  να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους  $B(-2, k)$ , αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

**ΑΣΚΗΣΗ 28.**

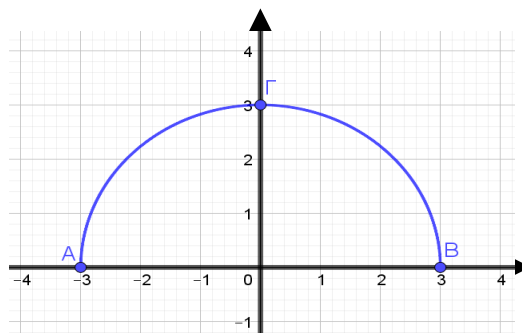
ΘΕΜΑ 2-16129

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της  $f$  και τις θέσεις των ακροτάτων

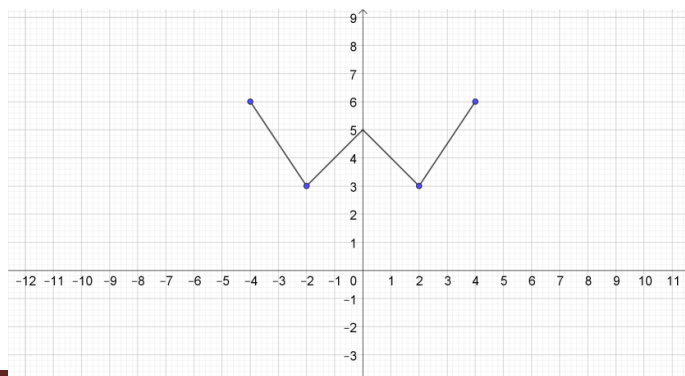
**ΑΣΚΗΣΗ 29.**

ΘΕΜΑ 2-15024

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[-4, 4]$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονotonίας της  $f$ .



γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποιες τιμές του  $x$  τις παρουσιάζει.

**ΑΣΚΗΣΗ 30.** Να βρείτε την μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

i)  $f(x) = x^3 - 3x + 4$

ii)  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

**ΑΣΚΗΣΗ 31.**

.Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(x) = x^3 - \frac{1}{x} + 1$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  καθώς και την μονοτονία της .

B. Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1,1)$  και

λύσετε την ανίσωση  $x^3 + 1 > \frac{1}{x}$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x^2 - 2x) = 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 32.** ΘΕΜΑ 2 -15019 .

Δίνεται μία συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι  $f(-1) = 2$  και  $f(1) = 0$  .Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι άρτια .

β) γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι περιττή.

γ) γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα.

**ΑΣΚΗΣΗ 33.** ΘΕΜΑ 2 -14971

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,1)$  ,  $B(3,3)$  .

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση  $f$  , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B.

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ , η οποία διέρχεται από A,B και είναι περιττή.

**ΑΣΚΗΣΗ 34.** ΘΕΜΑ 2-15115

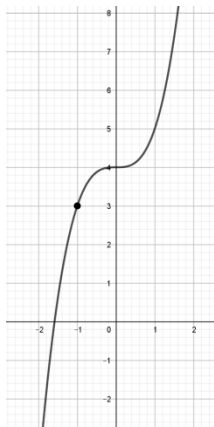
Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η

γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$  .

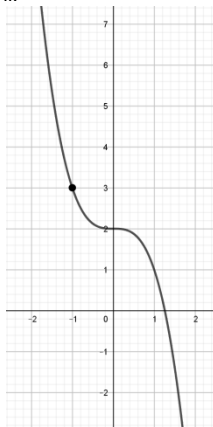
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

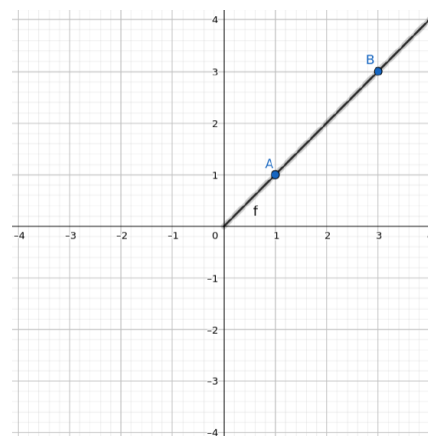
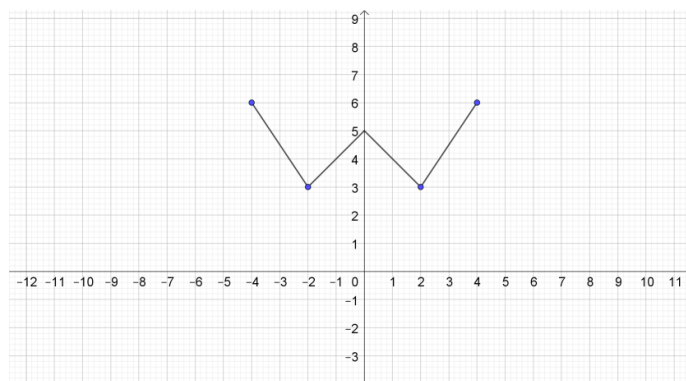
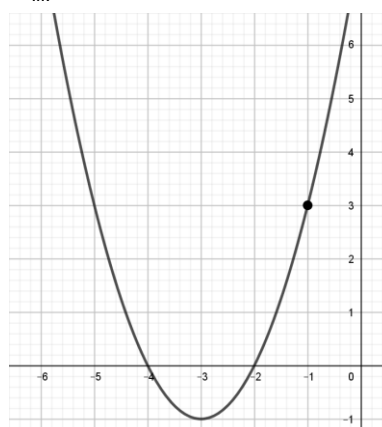
i.



ii.



iii.



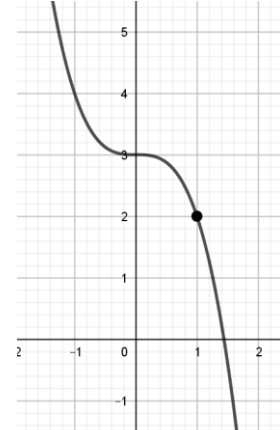
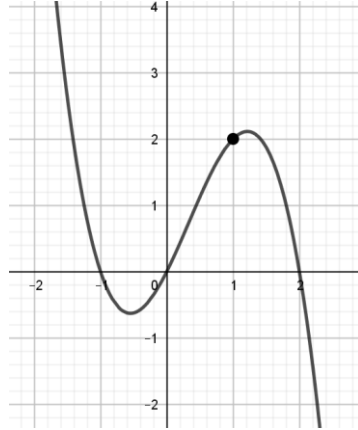
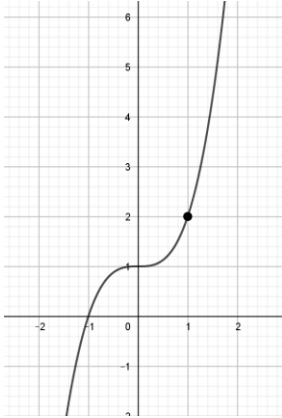
τα

**ΑΣΚΗΣΗ 35.**

ΘΕΜΑ 2-15114

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathfrak{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$ .

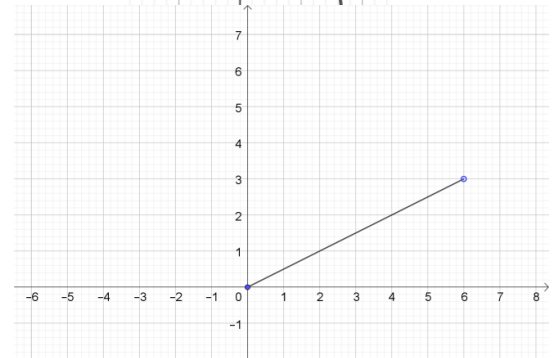
- α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2, 9)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
 β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΑΣΚΗΣΗ 36.**

ΘΕΜΑ 2-15018

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(\alpha, 6)$  είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(4, 2)$ .

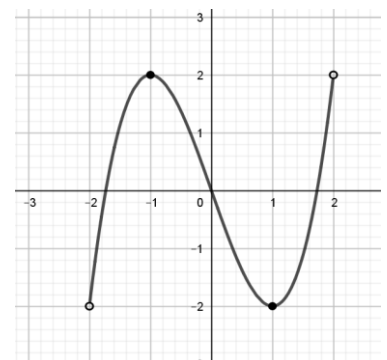
- α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .  
 β) Να βρείτε το  $f(-4)$ .  
 γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 6)$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

**ΑΣΚΗΣΗ 37.**

ΘΕΜΑ 2-15017

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(\alpha, 3)$  είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$  α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

- β) Να βρείτε το  $f(-2)$ .  
 γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 3)$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

**ΑΣΚΗΣΗ 38.**

ΘΕΜΑ 2-15112

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(-2, 2)$ .

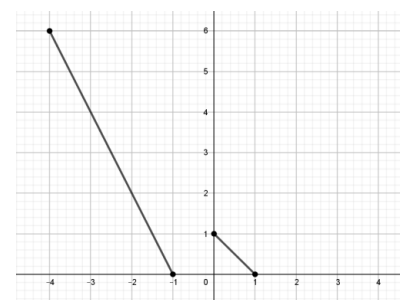
- α) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
 β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.  
 γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

**ΑΣΚΗΣΗ 39.**

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-4, 4]$ .

- α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της  $f$ .  
 β) Να βρείτε  
 i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
 ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.



**ΑΣΚΗΣΗ 40.**

ΘΕΜΑ 4-15022

Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-3, 3]$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-3, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, 3]$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(-1) < f(2)$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης  $f$ . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α.  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$  β.  $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$  γ.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$  δ.  $f(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$

**ΑΣΚΗΣΗ 41.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως μονότονη και περιττή. Αν η γραφική της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 3)$  τότε :

Α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της  $A$ .

Β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2 + 1) < f(2x)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 42.** Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι άρτια σ' ένα διάστημα  $A$ , τότε η συνάρτηση  $-f$  είναι άρτια στο  $A$ .

Β) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι περιττή σ' ένα διάστημα  $A$  και ορίζεται στο  $0$ , τότε  $f(0) = 0$ , δηλαδή η γραφική της περνάει από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 43.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $2f(x) + f(-x) = x^3 - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1).

Α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

Β) Να δείξετε ότι η γραφική της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από την αρχή αξόνων  $O(0, 0)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 44.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι περιττή στο  $\mathbb{R}$  και η γραφική παράστασή της τέμνει τον άξονα  $x'$  στο  $-2$ .

Α) Αν η  $f$  έχει ολικό μέγιστο στο  $x_0 \neq 0$ , να δείξετε ότι έχει και ελάχιστο στο  $-x_0$ .

Β) Να υπολογιστεί η παράσταση:  $\Pi = 3 \cdot f(2) + 5 \cdot f(-2) - 2015 \cdot f(0)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 45.** ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο  $A(-2, 8)$  το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης  $f$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

β) Να βρείτε αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f$  να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)

Γραφική παράσταση (β)

Γραφική παράσταση (γ)

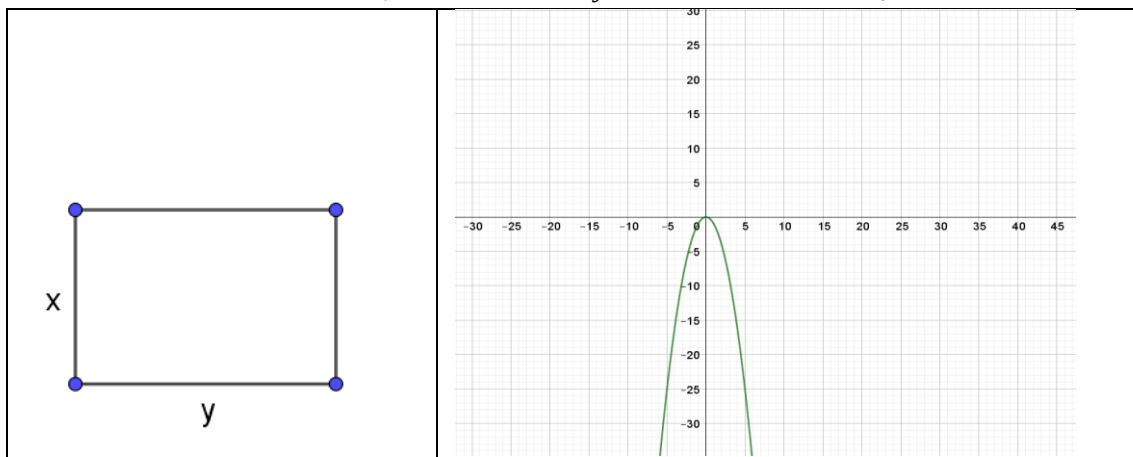
## 2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 46.**

ΘΕΜΑ 4-20715

Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις  $x$  και  $y$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

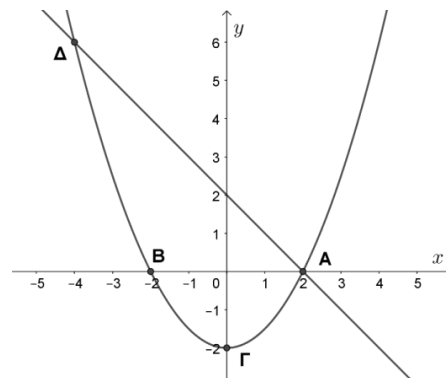
- α) Να εκφράσετε την πλευρά  $y$  ως συνάρτηση της πλευράς  $x$  και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς  $x$ .
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τη συνάρτηση  $E(x) = -(x-5)^2 + 25$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.
- γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -x^2$ . Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $E(x)$  και με βάση αυτή, να βρείτε το  $x$  έτσι ώστε το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.
- δ) Για την τιμή του  $x$  που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά  $y$  και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

**ΑΣΚΗΣΗ 47.**

ΘΕΜΑ 4-14294

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  και της ευθείας  $g(x) = -x + 2$ .

- α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία  $A, B, \Gamma$ , να βρείτε τις τιμές των  $a, b, \gamma$ .
- β) Αν  $a = \frac{1}{2}, b = 0$  και  $\gamma = -2$ , να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.
- γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

**ΑΣΚΗΣΗ 48.**

ΘΕΜΑ 2-14972

Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις  $g(x) = |x - 2|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) = |x - 2| + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις  $g, f$  και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της  $\varphi$ .
- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία δίνεται παρακάτω, να βρείτε:

- i. Τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.
- j. Το ολικό ακρότατο της  $f$  και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

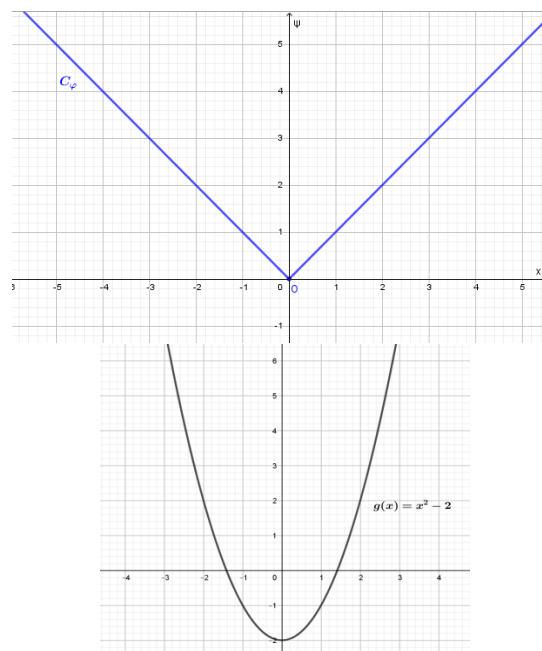
**ΑΣΚΗΣΗ 49.**

ΘΕΜΑ 2-15811

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,
- i. να αιτιολογήσετε γιατί η  $g$  είναι άρτια.
- j. να βρείτε το ελάχιστο της  $g$  και τη θέση αυτού.
- β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f(x) = x^2$  μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της  $g$  που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



**ΑΣΚΗΣΗ 50.**

ΘΕΜΑ 4-14973

Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi(x) = 3x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση  $\varphi$  είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης  $f$ .

j. Το ολικό ακρότατο της  $f$  και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

k. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της  $f$  και της ευθείας με εξίσωση  $y = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 51.** ΘΕΜΑ 2-14983

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$  η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της  $g(x)$  κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της  $f(x)$ .

i.  $f(x) = g(x+3) + 1$ .

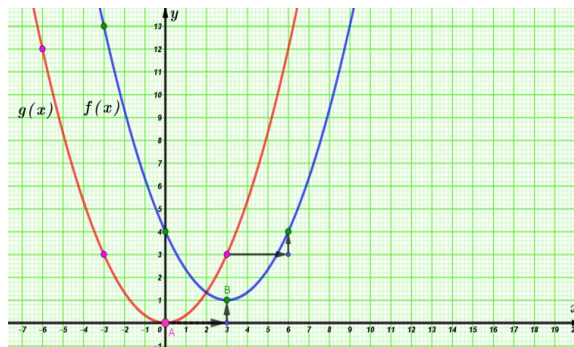
ii.  $f(x) = g(x+3) - 1$ .

iii.  $f(x) = g(x-3) + 1$ .

iv.  $f(x) = g(x-3) - 1$ .

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x)$  και την θέση ελαχίστου.

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνήσιως αύξουσα ή γνήσιως φθίνουσα.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3- ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ****3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ****ΑΣΚΗΣΗ 52.** ΘΕΜΑ 2-18868

α) Να αποδείξετε ότι  $\varepsilon\varphi 500^\circ = \varepsilon\varphi 140^\circ$ .

β) Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού  $\varepsilon\varphi 500^\circ$ .

γ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $A = \varepsilon\varphi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 300^\circ$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 53.** ΘΕΜΑ 2-15191

Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ , με  $\eta\mu\omega = 0,4$ .

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία  $-\hat{\omega}$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το  $\eta\mu(-\omega)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 54.** ΘΕΜΑ 2-15079

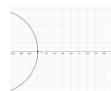
Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega} = \widehat{BOA}$ .

α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$ .

β) Η προέκταση του τμήματος  $AO$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $\Gamma$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

γ) Να εκφράσετε την γωνία  $\hat{\phi} = \widehat{BO\Gamma}$  με την βοήθεια της γωνίας  $\hat{\omega}$ .

Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το  $\sigma\upsilon\nu\phi$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 55.**

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| Γωνία $\omega$ | $0^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $120^\circ$ |
|----------------|-----------|------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|
| ημω            |           |            |             |             |            |            |            |             |
| συνω           |           |            |             |             |            |            |            |             |
| εφω            |           |            |             |             |            |            |            |             |
| σφω            |           |            |             |             |            |            |            |             |

β) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο ( $\rho = 1$ ), να συμπληρώσετε

τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ

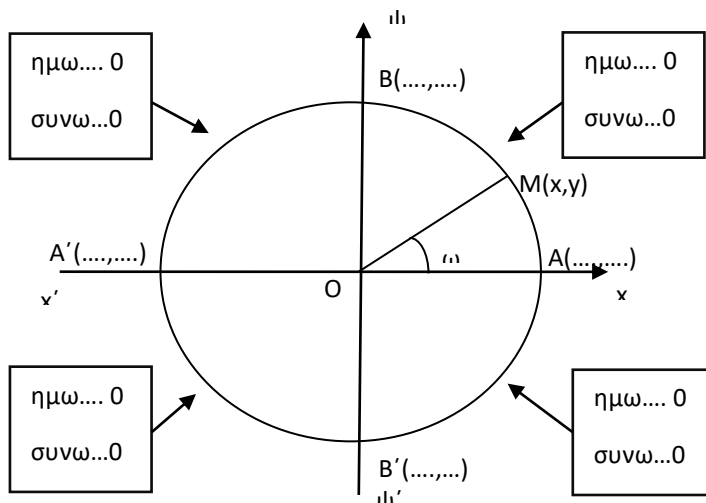
όπως επίσης και τους πίνακες προσήμου

των τριγωνομετρικών αριθμών της

γωνίας  $\omega$  ανάλογα με το

τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται

συμπληρώνοντας τα κενά με  $<$  ή  $>$ .

**3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ****ΑΣΚΗΣΗ 56.** ΘΕΜΑ 2-20817

Δίνεται γωνία  $\omega$ , με  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ , για την οποία ισχύει  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ .

α) Να δείξετε ότι  $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ .

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \epsilon\phi\omega}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 57.** ΘΕΜΑ 2-15814

Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα  $10\text{ cm}$ . Επίσης δίνεται το τόξο

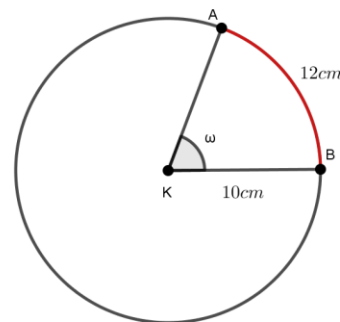
ΑΒ με μήκος  $12\text{ cm}$  και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία  $\omega$ .

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας  $\omega$  είναι  $1,2\text{ rad}$ .

ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία  $\omega$  είναι οξεία.

β) Αν  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$ , να βρείτε το  $\eta\mu\omega$ . (Δίνεται ότι  $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$ ).



**ΑΣΚΗΣΗ 58.** ΘΕΜΑ 2-15192

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ .

α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ .

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i.  $\eta \mu \omega$ .

ii.  $\epsilon \varphi \omega$

**ΑΣΚΗΣΗ 59.** ΘΕΜΑ 2-15429

α) Να αποδείξετε ότι  $\eta \mu 476^\circ = \eta \mu 116^\circ$ .

β) Αν γνωρίζουμε ότι το  $\eta \mu 116^\circ$  είναι περίπου  $\frac{9}{10}$ , να υπολογίσετε το  $\sin 116^\circ$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 60.** ΘΕΜΑ 2-15185

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας  $\omega$  του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ , να βρείτε το  $\eta \mu \omega$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 61.** ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει  $\sin A = -\frac{3}{5}$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Να βρείτε το  $\eta \mu A$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 62.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$  rad όταν

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ και } 2\eta \mu^2 x - 7\eta \mu x + 3 = 0$$

**ΑΣΚΗΣΗ 63.** Να βρεθούν οι τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ώστε:  $\eta \mu \omega = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $\sin \omega = \frac{2-3x}{1+x^2}$  και  $\omega$  γωνία.

**ΑΣΚΗΣΗ 64.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α)  $\eta \mu 2x \cdot \epsilon \varphi x + \sin 2x \cdot \sigma \varphi x + 2\eta \mu x \cdot \sin x = \epsilon \varphi x + \sigma \varphi x$

$$\beta) A = \frac{\sin x}{1 - \epsilon \varphi x} + \frac{\eta \mu x}{1 - \sigma \varphi x} = \eta \mu x + \sin x$$

$$\gamma) A = \frac{\eta \mu^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + 2\eta \mu \alpha \sin \alpha} = \frac{\epsilon \varphi \alpha - 1}{\epsilon \varphi \alpha + 1}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 65.** Δείξτε τις παρακάτω συνεπαιγωγές:

α)  $\eta \mu^2 x + \eta \mu x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \sin^2 x = 1$

$$\beta) \epsilon \varphi = 4\epsilon \varphi \beta \Rightarrow \frac{\epsilon \varphi \alpha + \epsilon \varphi \beta}{1 - \epsilon \varphi \alpha \epsilon \varphi \beta} = \frac{5\eta \mu \beta \sin \beta}{1 - 5\eta \mu^2 \beta}$$

$$\gamma) \frac{\epsilon \varphi^2 x - 1}{\epsilon \varphi^2 x + 1} + \frac{\sigma \varphi^2 x - 1}{\sigma \varphi^2 x + 1} = 0$$

**ΑΣΚΗΣΗ 66.** Δείξτε ότι η παράσταση  $A = \frac{\sin^2 x}{\epsilon \varphi^2 x} - \sigma \varphi^2 x + \sin^2 x$  ανεξάρτητη του  $x$ .

$$\text{ΑΣΚΗΣΗ 67. Δείξτε ότι: } \frac{1 + \epsilon \varphi^{2024} x}{1 + \sigma \varphi^{2024} x} = \left( \frac{1 + \epsilon \varphi x}{1 + \sigma \varphi x} \right)^{2024} = \epsilon \varphi^{2024} x.$$

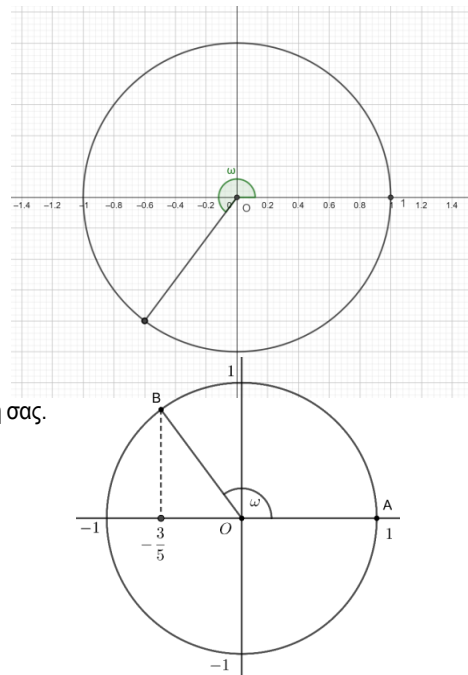
**ΑΣΚΗΣΗ 68.** Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης:  $(1 + \sin \theta)x^2 + (1 + \sin^2 \theta)x + (1 - \sin \theta) \sin \theta = 0$ , να δείξετε ότι  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2 = 1$ .

Θεωρούμε την εξίσωση:  $x^2 - 2x + 1 - \epsilon \varphi^2 \theta = 0$ , (1) με  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

B. Αν  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης (1), να δείξετε:

$$B.1. x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{\sin^2 \theta} \text{ και } B.2. x_1^2 + x_2^2 \geq 2.$$



## 3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1Ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

**ΑΣΚΗΣΗ 69.** ΘΕΜΑ 4-18231

Έστω  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$  φαίνεται διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(-\frac{3}{5}\right)$ ,  $f\left(-\frac{5}{9}\right)$

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}$ ,

να βρείτε τους αριθμούς  $f(\sin 120^\circ)$ ,  $f(\eta\mu 120^\circ)$

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x-2)$ ,  $x \geq 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 70.** ΘΕΜΑ 2-17936

Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία  $\angle A O Z = \theta$ .

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές

πλευρές των γωνιών  $3\pi + \theta$  και  $\frac{\pi}{2} + \theta$ .

β) Να αιτιολογήσετε γιατί  $\sin \theta = 0,4$ .

γ) Με χρήση του β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε

τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:  $\sin(3\pi + \theta)$  και  $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 71.** ΘΕΜΑ 2-17933

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία  $\angle A O Z = \theta$ .

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών  $3\pi + \theta$  και  $4\pi - \theta$ .

β) Να αιτιολογήσετε γιατί  $\eta\mu \theta = 0,4$ .

γ) Με χρήση του β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:  $\eta\mu(3\pi + \theta)$  και  $\eta\mu(4\pi - \theta)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 72.** ΘΕΜΑ 2-15193

Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ , με  $\sin \omega = 0,8$ .

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , των οποίων το συνημίτονο είναι  $-0,8$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία  $\hat{\omega}$ .

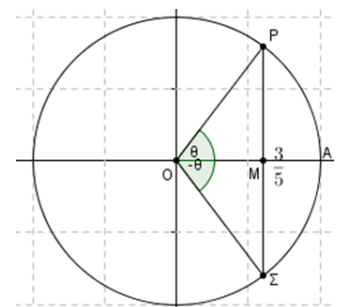
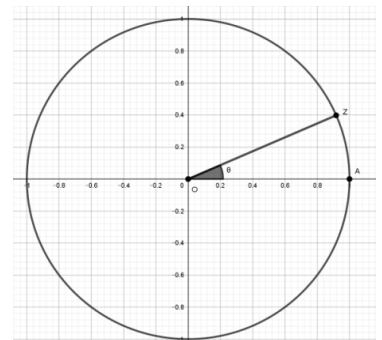
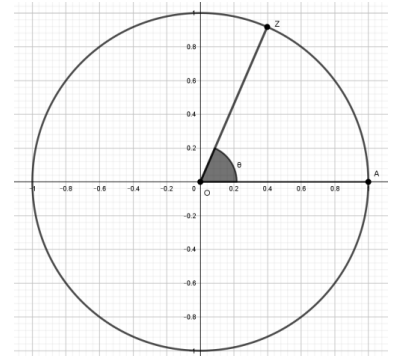
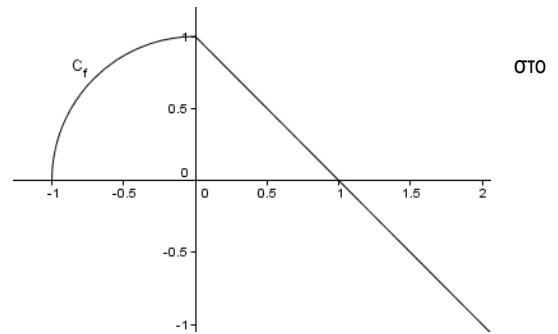
**ΑΣΚΗΣΗ 73.** ΘΕΜΑ 2-15266

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες  $\theta$  και  $-\theta$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ .

β) Να βρείτε το  $\eta\mu \theta$ .

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας  $-\theta$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 74.**

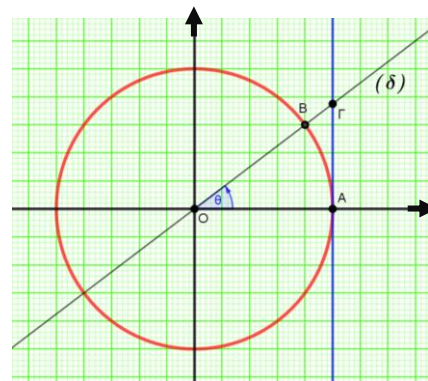
ΘΕΜΑ 2-15092

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Η τελική πλευρά ΟΒ της θετικής γωνίας  $\widehat{AOB} = \hat{\theta}$ , αν προεκταθεί μένεται η ευθεία (δ) στο σημείο Γ.

Γνωρίζουμε ότι  $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ .

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό  $\sigma\upsilon\nu\theta$  και στη συνέχεια τον αριθμό  $\epsilon\varphi\theta$ .

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

**ΑΣΚΗΣΗ 75.**

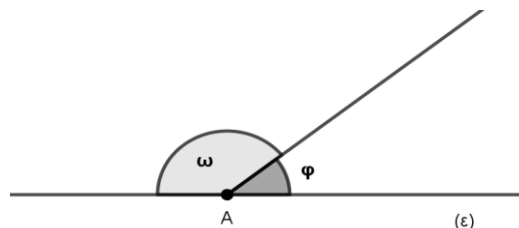
ΘΕΜΑ 2-15652

Δίνεται  $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ , όπου  $\varphi$  η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της

ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας  $\varphi$ .

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας  $\omega$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 76.** Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \frac{\epsilon\varphi(\pi - \theta) \sigma\varphi(\pi + \theta) \epsilon\varphi(-\theta) \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\epsilon\varphi(\pi + \theta) \sigma\varphi(\pi - \theta) \sigma\varphi \cdot \sigma\varphi(2\pi - \theta)} = 1$$

$$\text{ii) } \frac{\eta\mu(\pi - \theta) \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \eta\mu(2\pi - \theta) \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = 1$$

$$\text{i) } \eta\mu(\theta - \pi) + \epsilon\varphi(\theta - \pi) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \epsilon\varphi\theta$$

**ΑΣΚΗΣΗ 77.** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, δείξτε ότι:

$$\text{i) } \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2},$$

$$\text{ii) } \epsilon\varphi \frac{A+B}{2} = \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}$$

$$\text{iii) } \sigma\varphi \frac{A+B}{2} \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = 1,$$

$$\text{iv) } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1 \text{ και}$$

$$\text{v) } \epsilon\varphi(3A+3B) + \epsilon\varphi 3\Gamma = 0$$

**ΑΣΚΗΣΗ 78.** Αν για τη γωνία  $x$  (rad) ισχύει  $27\eta\mu^2x + 2\sigma\upsilon\nu^2x = 18$  και  $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \pi$ , τότε :

$$\alpha. \text{ Να αποδείξετε ότι : } \eta\mu x = -\frac{4}{5}$$

β. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί  $\sigma\upsilon\nu x$ ,  $\epsilon\varphi x$  και  $\sigma\varphi x$ .

γ. Εάν επιπλέον σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} = \hat{x}$ , να υπολογίσετε το  $\sigma\varphi(B + \Gamma)$

## 3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 81.**

ΘΕΜΑ 2-20807

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -2\eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να βρείτε την περίοδο αυτής.

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

| $x$                  | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|----------------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| $f(x) = -2\eta\mu x$ |   |                 |       |                  |        |

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  για  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 82.**

ΘΕΜΑ 2-20660

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2\eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της  $f$ .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της  $f$  για  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 83.**

ΘΕΜΑ 4-18234

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x - 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του  $x$  προκύπτουν αυτές;

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

δ) Αν για κάποιο αριθμό  $\alpha$  με  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύει  $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

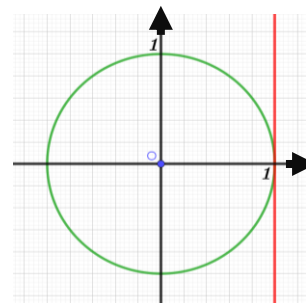
**ΑΣΚΗΣΗ 84.**

ΘΕΜΑ 2-16131

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ ,  $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ .

α) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$  στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το διπλανό σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 85.**

ΘΕΜΑ 3-15391

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \eta\mu x$  και  $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

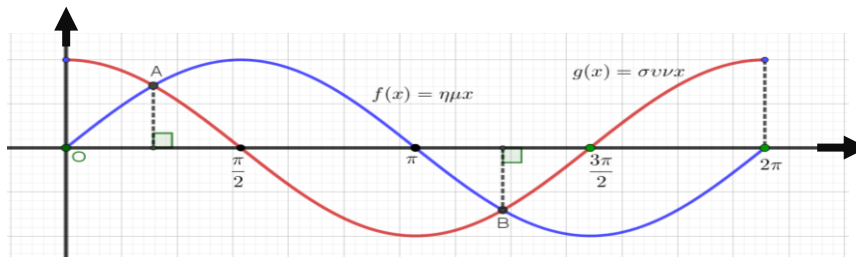
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης  $g(x)$  στο  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  και την μονοτονία της συνάρτησης  $f(x)$  στο  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ .

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i)  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  και  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ .

ii)  $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}\right)$  και  $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 86.**ΘΕΜΑ 2-15172

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι:

α)  $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

ii.  $f(x) = 4\eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 4\eta\mu x$ , όταν  $x \in [0, 2\pi]$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 87.**ΘΕΜΑ 4-15992

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \rho \eta\mu x$ ,  $g(x) = \eta\mu(\omega x)$ , όπου  $\rho, \omega > 0$ .

α) Να βρεθούν οι τιμές των  $\rho, \omega$ , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι  $-2$  και η περίοδος της  $g$  είναι  $\pi$ . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = 2\eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$  και  $g(x) = \eta\mu(2x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

γ) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι

$$2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9}.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 88.**ΘΕΜΑ 2-15810

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ ,  $x \in \square$ .

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της  $g$ .

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $g$  σε διάστημα μίας περιόδου.

| $x$                           | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|-------------------------------|---|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $2x$                          |   |                 |                 |                  |       |
| $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ |   |                 |                 |                  |       |

**ΑΣΚΗΣΗ 89.**ΘΕΜΑ 2-15809

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu 2x$ ,  $x \in \square$ .

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της  $f$ .

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα μίας περιόδου.

**ΑΣΚΗΣΗ 90.**ΘΕΜΑ 3-15789

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$  με

$$x \in [0, \pi].$$

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα

την  $f$  να σχεδιάσετε την συνάρτηση  $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

β) Ποιος είναι ο τύπος της  $g$  και σε ποιο διάστημα ορίζεται;

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

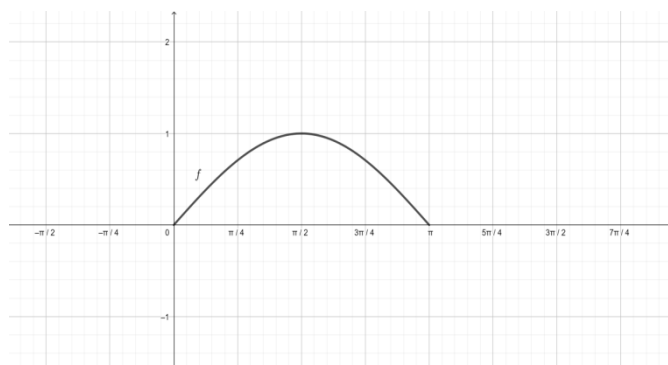
**ΑΣΚΗΣΗ 91.**ΘΕΜΑ 2-15009

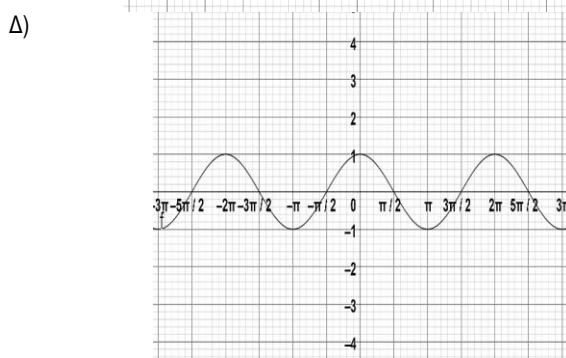
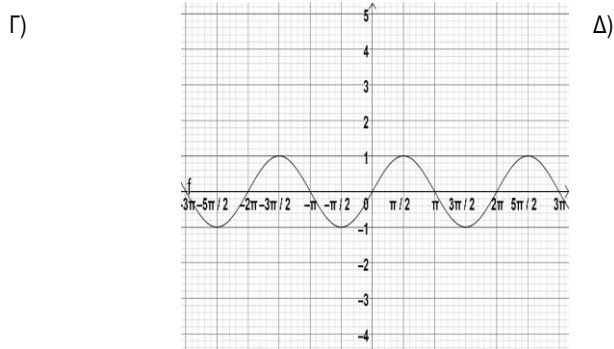
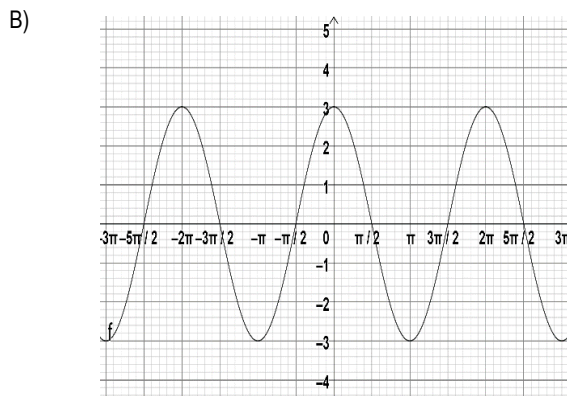
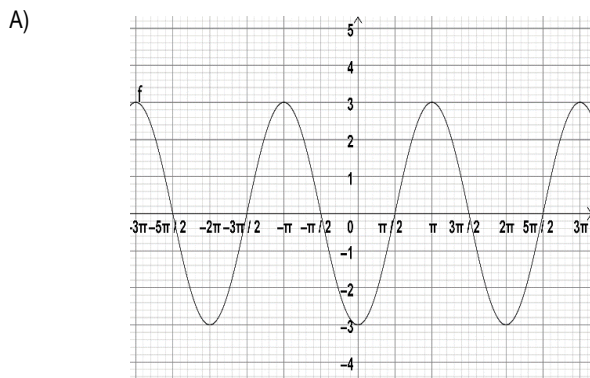
Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της  $f$ , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





**ΑΣΚΗΣΗ 92.**

ΘΕΜΑ 4-15422

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$  με  $a > 0$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$ .

β) Αν η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι 4, να δείξετε ότι  $a = 2$ .

γ) Να βρείτε την περίοδο της  $f$ .

δ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$  σε διάστημα μιας περιόδου.

ε) Αν  $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$ , να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της  $C_f$  με την  $C_g$ , όπου  $C_f, C_g$  οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  αντίστοιχα.

**ΑΣΚΗΣΗ 93.**

ΘΕΜΑ 2-15788

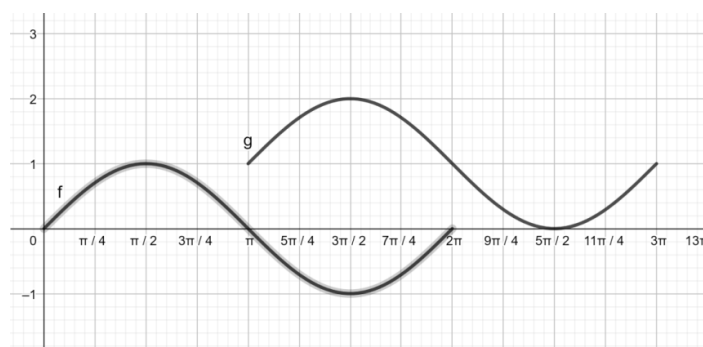
Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και η γραφική παράσταση

της συνάρτησης  $g$  που προέκυψε από την  $f$  με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

β) τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της  $f$  από τις οποίες προέκυψε η  $g$ .

γ) τον τύπο της  $g$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 94.**

ΘΕΜΑ 4-15062

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι της μορφής  $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \rho > 0$

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

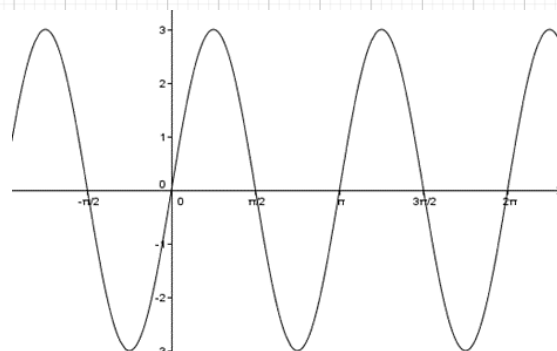
β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\rho$ .

• Έστω  $\rho = 3$  και  $\alpha = 2$ . Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  δεν έχουν κοινό σημείο.

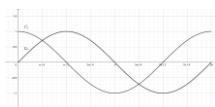


**ΑΣΚΗΣΗ 95.**

ΘΕΜΑ 2-15644

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων

έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις

 $C_1$  και  $C_2$  για  $x \in [0, 2\pi]$ .

α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων  $f(x) = \sin x$  και  $g(x) = \cos x$  για  $x \in [0, 2\pi]$ , ποια από τις  $C_1$ ,  $C_2$  είναι η γραφική παράσταση της  $f(x) = \sin x$  και ποια της  $g(x) = \cos x$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση  $\sin x = \cos x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 96.**

ΘΕΜΑ 4-15025

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία  $\theta = \angle AOM$  με  $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ , της

οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M$  και την ευθεία  $x = 1$  στο σημείο  $K$ .

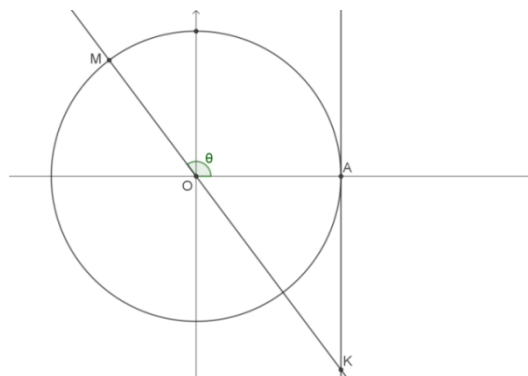
α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$ .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $M$  και  $K$ .

γ) Έστω μια γωνία  $\phi \in [0, 2\pi]$  για την οποία ισχύει  $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$  και  $\sin\phi < 0$ .

i) Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο έχει η γωνία  $\phi$  την τελική πλευρά.

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί  $\theta < \phi$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 96.**

ΘΕΜΑ 2-15091

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

β) Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της.

γ) Να υπολογίσετε τον αριθμό  $f(2025\pi)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 97.**

Χαρακτηρίστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

|    |                                                                                                                                         |   |   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| A  | Η περίοδος της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu 4x$ είναι $4\pi$                                                                              | Σ | Λ |
| B  | Το μικρότερο πλάτος διαστήματος στο οποίο θα σχεδιάσουμε τη γραφική της $f(x) = 3\sin 2x$ ώστε να έχουμε όλες τις τιμές της είναι $\pi$ | Σ | Λ |
| Γ  | Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2\pi, 3\pi]$                                                           | Σ | Λ |
| Δ. | Η συνάρτηση $f(x) = -\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \pi]$                                                              | Σ | Λ |
| E  | Το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = 3 - 2\eta\mu 4x$ είναι το 1 και μέγιστο το 5                                                         | Σ | Λ |
| Z  | Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$                                                                     | Σ | Λ |
| H  | Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιπτή στο διάστημα $[0, 2\pi]$                                                                   | Σ | Λ |
| Θ  | Αν για μία συνάρτηση $f$ ισχύει : $f(x + T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $T > 0$ , τότε θα ισχύει $f(x + 2T) = f(x)$         | Σ | Λ |

**ΑΣΚΗΣΗ 98.** Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις με τις περιόδους τους .

|   |                                                         |   |                       |
|---|---------------------------------------------------------|---|-----------------------|
| 1 | $f(x) = \sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2}$                 | A | $T = \frac{8\pi}{3}$  |
| 2 | $f(x) = \sigma\upsilon\nu \left( -\frac{2x}{3} \right)$ | B | $T = 6\pi$            |
| 3 | $f(x) = 2\eta\mu \frac{x}{3}$                           | Γ | $T = 3\pi$            |
| 4 | $f(x) = -5\eta\mu \frac{3x}{4}$                         | Δ | $T = -\frac{8\pi}{3}$ |
| 5 | $f(x) = \eta\mu \frac{\sqrt{8} \cdot x}{2}$             | E | $T = \pi\sqrt{2}$     |
| 6 | $f(x) = 2\varepsilon\phi(-4x)$                          | Z | $T = \frac{4\pi}{3}$  |
| 7 | $f(x) = \varepsilon\phi \frac{3x}{2}$                   | H | $T = -\pi/4$          |
| 8 |                                                         | Θ | $T = \pi/4$           |
|   |                                                         | I | $T = 2\pi/3$          |
|   |                                                         | K | $T = -8\pi$           |
|   |                                                         |   | $T = -4\pi$           |

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |

**ΑΣΚΗΣΗ 99.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 1 + 2\eta\mu \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$ .

- Να βρεθεί η περίοδος της  $f$ .
- Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποιες τιμές του  $x$  παρουσιάζονται.
- Να γίνει γραφική παράσταση της  $f$ .
- Γράψτε τα διαστήματα όπου η γραφική παράσταση της  $f$  είναι "πάνω" από την ευθεία  $y=1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 100.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \alpha\eta\mu \frac{x}{5} + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται απ' τα σημεία  $B(10\pi, 6)$  και  $\Gamma \left( -\frac{5\pi}{6}, 1 \right)$ .

B. Για τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  που βρήκατε από το προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τα ακρότατα και τη περίοδο της συνάρτησης.

Γ. Ποια είναι η μονοτονία της στο διάστημα  $[0, 10\pi]$ ;

**ΑΣΚΗΣΗ 101.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \alpha\eta\mu(kx) + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\alpha < 0$ .

A. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  και  $k$  αν η  $f$  έχει περίοδο  $T=2$  και  $f_{\min} = -2$ ,  $f_{\max} = 6$

B. Για τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  που βρήκατε από το προηγούμενο ερώτημα, να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της  $f$ .

### 3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

| ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ                                                                                                                   | ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΗΣ                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 1. <b>ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ</b> ως προς $\eta\mu\chi$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi$ ή $\varepsilon\phi\chi$ ή $\sigma\phi\chi$ .               | Θέτω $\psi = \eta\mu\chi$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi$ ή $\varepsilon\phi\chi$ ή $\sigma\phi\chi$ και λύνω την πολυωνυμική ως προς $\psi$ .<br><b>⚡ΠΡΟΣΟΧΗ!!</b> Για $\psi = \eta\mu\chi$ ή $\sigma\upsilon\nu\chi$ δεχόμαστε μόνο τις λύσεις για $-1 \leq \psi \leq 1$                                                 |
| 2. <b>ΟΜΟΓΕΝΗΣ</b> : $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 0$           | Διαιρώ με $\sigma\upsilon\nu^2\chi \neq 0$ (αν $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ έχουμε άτοπο) και προκύπτει 2-βάθμια ως προς $\varepsilon\phi\chi$ .                                                                                                                                                                      |
| 3. <b>ΨΕΥΔΟΟΜΟΓΕΝΗΣ</b> : $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \delta$ | Έχουμε: $\alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \delta = 0 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu^2\chi + \beta\sigma\upsilon\nu^2\chi + \gamma\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \delta(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = 0$ και προκύπτει ομογενής εξίσωση. |
| 4. <b>ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ</b> ως προς $\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi$                                                                | Θέτουμε $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \omega \Leftrightarrow (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = \omega^2 \Leftrightarrow \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\omega^2 - 1}{2}$<br>και ξέρουμε το άθροισμα και το γινόμενο τους....                                                              |
| 5. <b>ΓΡΑΜΜΙΚΗ</b> : $\alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu\chi = \gamma$<br>[παρακάτω στην §3.9]                           | θέτουμε $\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi$ συναρτήσει της $\varepsilon\phi \frac{\chi}{2}$ και έχουμε 2-βάθμια εξίσωση.                                                                                                                                                                                            |

**ΑΣΚΗΣΗ 102.**

ΘΕΜΑ 2-15036

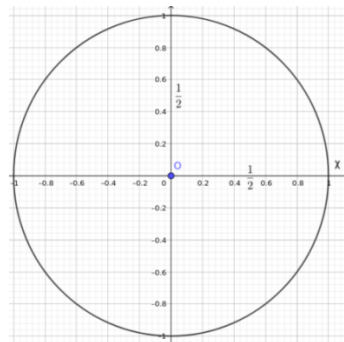
Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ .α) i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .ii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -3$  στο  $\mathfrak{R}$ .**ΑΣΚΗΣΗ 103.**

ΘΕΜΑ 2-15969

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$ .α) Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$ .β) Να δείξετε ότι  $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$ .γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -2$ .**ΑΣΚΗΣΗ 104.**

ΘΕΜΑ 2-14977

α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ , με αρχική πλευρά την ημιευθεία  $Ox$ , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με  $\frac{1}{2}$  και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με  $\frac{1}{2}$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu x = \frac{1}{2}$  για  $x \in \mathfrak{R}$ .**ΑΣΚΗΣΗ 105.**

ΘΕΜΑ 4-14975

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας  $m$  και ισορροπεί στη θέση  $O$  (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβokaτεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση  $O$ , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$ , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με  $2y_0$ .

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα),

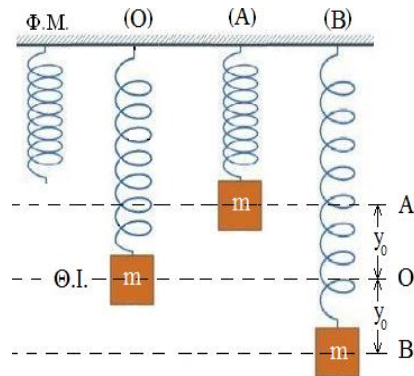
$$\text{είναι: } y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το  $y_0$  και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$  της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $t \in [0, 4]$ .

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για  $t \in [0, 2]$ .

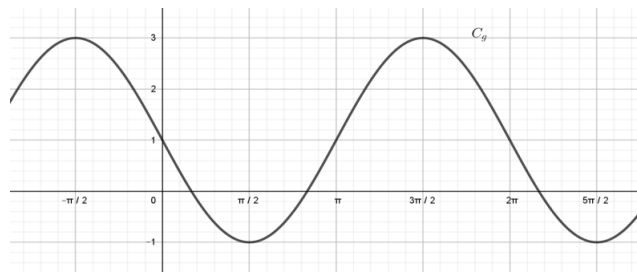
**ΑΣΚΗΣΗ 106.**

ΘΕΜΑ 4-15288

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ .

α) Να βρείτε την περίοδο  $T$ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$ , με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ,  $\beta > 0$  και πεδίο ορισμού το  $\mathfrak{R}$ . Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) Για  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$  και  $\gamma = 1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο διάστημα  $[0, \pi)$

**ΑΣΚΗΣΗ 107.**

/ΘΕΜΑ 4-15095

Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:  $x = 0$ ,  $y = x^2 - \pi x$ ,

$y = \frac{1}{2} + \eta\mu x$  και  $x = 3$ . Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

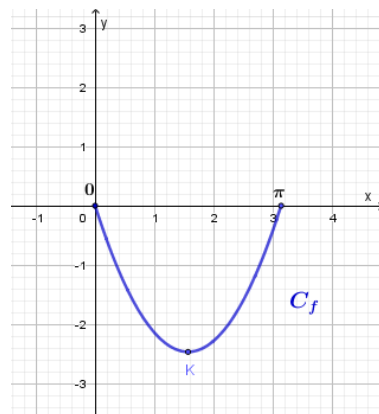
α) Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - \pi x$ ,  $x \in [0, \pi]$  είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο  $K(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4})$ .

Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$  στο ίδιο σύστημα αξόνων.

β) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονotonίας τους.

γ) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

δ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.



**ΑΣΚΗΣΗ 108.**

ΘΕΜΑ 4-15289

Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) i. Αν  $\lambda = -1$ , να λύσετε το σύστημα.

ii. Αν  $(x_0, y_0)$  είναι η λύση του συστήματος για  $\lambda = -1$ , να βρείτε γωνία  $\theta \in [0, 2\pi)$  τέτοια ώστε  $x_0 = \sigmaυν\theta$  και  $y_0 = \etaμ\theta$ .

β) Αν  $\lambda = 1$  και  $(x_1, y_1)$  είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία  $\omega$ , τέτοια ώστε  $x_1 = \sigmaυν\omega$  και  $y_1 = \etaμ\omega$ .

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα  $(\Sigma)$  έχει μοναδική λύση την  $(x_2, y_2)$  με  $x_2 = \sigmaυν\varphi$  και  $y_2 = \etaμ\varphi$ ,  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

i. Να δείξετε ότι  $\sigmaυν\varphi = \frac{3}{5}$  και  $\etaμ\varphi = \frac{4}{5}$ .

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda \in \square$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 109.**

ΘΕΜΑ 4-15287

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η ευθεία  $y = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η γραφική

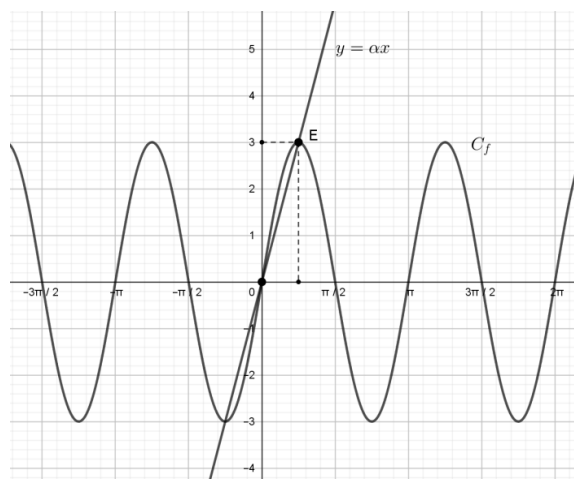
παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho\etaμ(\omega x)$ , όπου  $\omega > 0$

και  $x \in \square$ . Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι  $\rho = 3$  και  $\omega = 2$ .

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $3\etaμ(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 110.**

ΘΕΜΑ 4-15347

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigmaυν^2(\pi - x) - 3\etaμ(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$ , με  $\alpha \in \square$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\sigmaυν^2x - 3\sigmaυνx + \alpha$ .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να βρείτε το  $\alpha$  αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(\frac{\pi}{3}, 1)$ .

δ) Για  $\alpha = 2$  και  $g(x) = 2\etaμ^2x + 9\sigmaυνx - 9$ , να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 111.**

ΘΕΜΑ 2-16298/

Δίνεται γωνία  $\omega$ , με  $0 \leq \omega < 2\pi$  που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $\sigmaυν\omega = -\frac{1}{2}$  και  $\etaμ\omega > 0$ .

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega$  πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες  $\varphi$  με  $\varphi \in \mathbb{R}$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\sigmaυν\varphi = -\frac{1}{2}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 112.**

ΘΕΜΑ 4-15003

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \etaμ\alpha x \cdot \left[\sigmaυν\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2\right] - \sigmaυν\alpha x \cdot \sigmaυν(\pi - \alpha x) - 1$ , με  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2 \cdot \etaμ\alpha x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

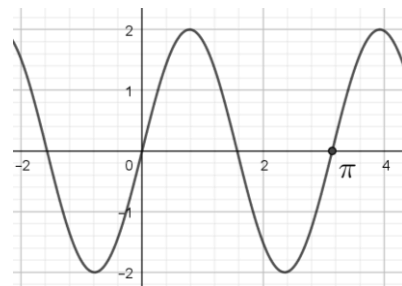
β) Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία  $\varepsilon: y = 1$  για  $x \in [0, \pi]$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 113.**

ΘΕΜΑ 4-15049

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \etaμ\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \etaμ(\pi + x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$



α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sin x - \eta\mu x$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $-2 \leq f(x) \leq 2$ . Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .

ii. Δυο σημεία τομής της  $C_f$  με τον  $x'x$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 114.** ΘΕΜΑ 4-15026

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 115.** ΘΕΜΑ 4-15014

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$ , με  $\alpha, \beta$  ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

β) Αν  $\alpha = 2$ , να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του  $\beta$  για την οποία είναι  $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$  είναι  $\beta = 8$ .

γ) Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = 8$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$  στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 116.** ΘΕΜΑ 4-15050

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την ευθεία  $y = 1$ .

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  και  $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 117.** Θέμα Γ (2022)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3\sin 2x$

Γ1. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και την περίοδο αυτής

Γ2. Να γίνει γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα μιας περιόδου

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 3$  στο διάστημα  $[0, \pi]$

**ΑΣΚΗΣΗ 118.** Να λύσετε τις εξισώσεις: i)  $2\eta\mu^2 x + 1 = 3\eta\mu x$  ii)  $6\eta\mu^2 x = 5 - \sin x$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 119.** Να λυθεί η εξίσωση  $2\eta\mu^2 x - 3 = 3\sin x$  με  $90^\circ < x < 270^\circ$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 120.** Να λύσετε τις εξισώσεις: i)  $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu\frac{\pi}{2} = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  ii)  $|\sin x| = |\eta\mu x|$  iii)  $\sin(\eta\mu x) = 1$

**ΑΣΚΗΣΗ 121.** Να λυθεί η εξίσωση:  $2\eta\mu \frac{(2x-1)\pi}{2} = x + \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 122.**

A. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις της εξίσωσης:  $\eta\mu^2 x - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$ .

B. Να βρεθούν οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα  $(0, 3\pi)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 123.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \eta \mu \frac{x}{2} + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  αν η γραφική της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $B(10\pi, 6), \Gamma\left(-\frac{5\pi}{6}, 2\right)$ .

B. Για τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  που βρήκατε από το ερώτημα A, να βρείτε τα ακρότατα και τη περίοδο της  $f$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(2x) = 2$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 124.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \eta \mu x + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  αν η γραφική της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A\left(\frac{\pi}{2}, 2\right), B\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ .

B. Για  $\alpha=1$  και  $\beta=1$ , να βρείτε τα ακρότατα και τη περίοδο της  $f$ .

Γ. Να λύσετε την εξίσωση  $4f\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ .

## ΚΕΦ.4- ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

### 4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

**ΑΣΚΗΣΗ 125.** ΘΕΜΑ 2-20640

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Έστω  $Q(x)$  πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $R_1(x) = P(x) + Q(x)$  δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $R_2(x) = P(x) \cdot Q(x)$  έχει ρίζα τον αριθμό 1.

**ΑΣΚΗΣΗ 126.** ΘΕΜΑ 2-15113

Δίνονται τα πολυώνυμα:  $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$  και  $Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Είναι το πολυώνυμο  $P(x)$  3<sup>ου</sup> βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα.

### 4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

**ΑΣΚΗΣΗ 127.** ΘΕΜΑ 2-15096

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Να κάνετε τη διαίρεση του  $P(x)$ :  $(x^2 + x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 128.** ΘΕΜΑ 2-14981

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x + 6$ .

α) Να υπολογίσετε το  $P(-2)$ .

β) Να αποδείξετε ότι το  $x + 2$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

γ) Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 129.** ΘΕΜΑ 2-15642

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$ .

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x-1$ .

β) Να υπολογίσετε την τιμή  $P(0)$ .

γ) Είναι το  $x$  παράγοντας του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΑΣΚΗΣΗ 130.** ΘΕΜΑ 2-15012

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x-3$  έχει πηλίκο  $x^2 + 2$  και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β) Να δείξετε ότι  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ .

γ) Είναι το  $x = 3$  ρίζα του πολυωνύμου  $P(x)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## 4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 131.** ΘΕΜΑ 2-20856

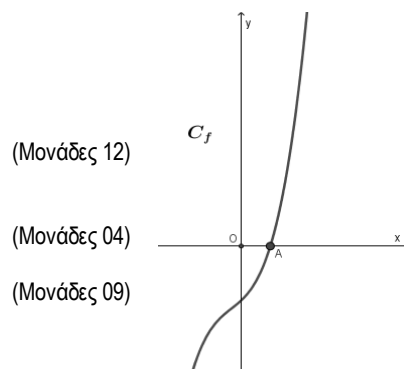
Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει ακέραιες ρίζες.

β) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

i. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία ρίζα.

ii. Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα  $(0,1)$ .



(Μονάδες 12)

(Μονάδες 04)

(Μονάδες 09)

**ΑΣΚΗΣΗ 132.** ΘΕΜΑ 4-18221

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή  $y = 3 - x^2$  και τα σημεία της  $\Gamma, \Delta$ . Δίνεται ακόμα

ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ .

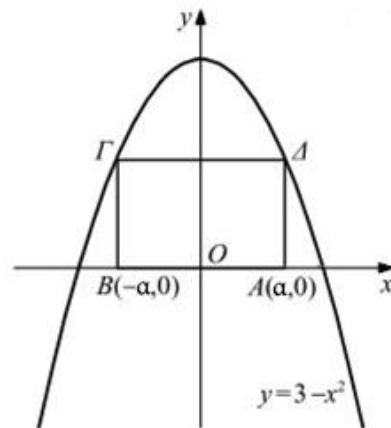
α) Αν  $E$  είναι το εμβαδό του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ , τότε:

να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in (0, \sqrt{3})$  είναι  $E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$  τετραγωνικές μονάδες.

να βρεθεί το εμβαδό  $E$  στη θέση  $\alpha = 1$ .

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό  $E$  δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να βρεθεί η θέση του  $\alpha$ , ώστε το εμβαδό  $E$  να πάρει τη μέγιστη τιμή του.



(Μονάδες 08)

(Μονάδες 02)

(Μονάδες 12)

(Μονάδες 03)

**ΑΣΚΗΣΗ 133.** ΘΕΜΑ 2-18230

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το  $(x - 2)$ .

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο.

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 134.** ΘΕΜΑ 2-15176

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι το  $x - 1$  είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Αν  $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)$ , να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  είναι  $P(x) > 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 135.** ΘΕΜΑ 4-15174

Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$  και  $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$ . Το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $\delta(x)$ , είναι το πολυώνυμο  $v(x) = 24x - 24$ .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

β) Για  $\alpha = 2$ ,

i) να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x - 1$ .

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα  $x'x$  με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$ .

(Μονάδες 8)

iii) να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ .

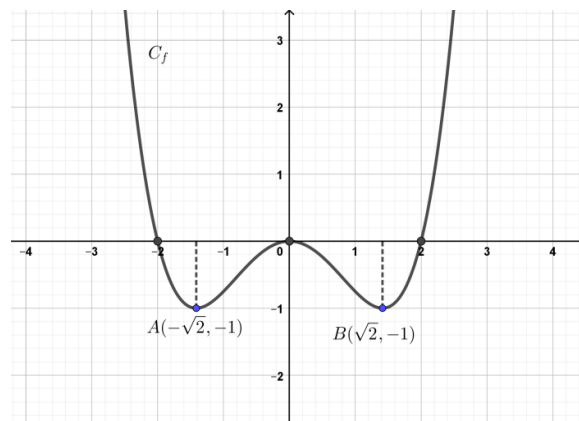
**ΑΣΚΗΣΗ 136.** ΘΕΜΑ 2-15349

Δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία  $A(-\sqrt{2}, -1)$  και  $B(\sqrt{2}, -1)$  ανήκουν στη γραφική παράσταση της  $f$  να βρείτε τα διαστήματα μονotonίας της συνάρτησης  $f$ .

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση  $f(x) = 0$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 137.** ΘΕΜΑ 4-17943

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό  $E = 60\text{cm}^2$ , του οποίου η υποτεινούσα είναι κατά  $2\text{cm}$  μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε  $x$  το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και  $y$  το μήκος της άλλης κάθετης (σε  $\text{cm}$ ), τότε:

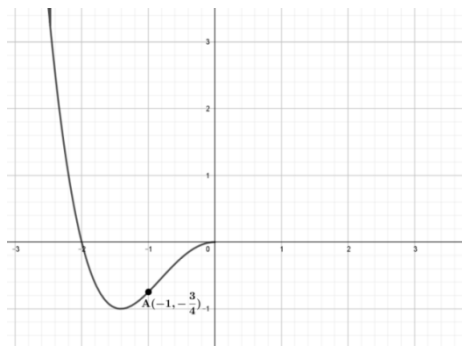
- Να δείξετε ότι ο αριθμός  $x$  ικανοποιεί την εξίσωση:  $x^3 + x^2 - 3600 = 0$ .
- Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς  $x$  είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του  $x$  καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
- Να βρείτε το πλήθος των ορθογώνιων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΑΣΚΗΣΗ 138.** ΘΕΜΑ 4-17925

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ και το σημείο } A\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \text{ αυτής.}$$

- Να δείξετε ότι  $\alpha = -1$ .
  - Για  $\alpha = -1$ , να αποδείξετε ότι  $f(-x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  για  $x > 0$ .



για

- Αφού επιβεβαιώσετε ότι  $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$ , με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο

τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας  $y = -\frac{3}{4}$  με την γραφική παράσταση της  $f$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 139.** ΘΕΜΑ 4-15677

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ , αν είναι γνωστό ότι το  $P(x)$  διαιρείται με το πολυώνυμο  $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ .
  - Για  $\alpha = 4, \beta = -2$
- Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 + 5)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
  - Αν  $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$  να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 14(x + 2)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 140.** ΘΕΜΑ 2-15653

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ .

- Να κάνετε τη διαίρεση του  $P(x)$  με το  $(x + 1)$ .
- Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x + 1)$ .
- Αν  $P(x) = (x + 1)(x^2 + 2)$ , να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 141.** ΘΕΜΑ 2-15247

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ .

- Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .
- Αν  $P(x) = (2x - 1)(x^2 + 1)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .

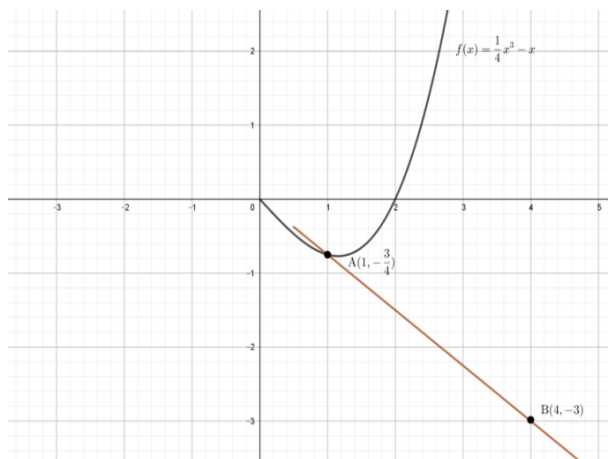
**ΑΣΚΗΣΗ 142.** ΘΕΜΑ 4-17919

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία}$$

$$A\left(1, -\frac{3}{4}\right) \text{ και } B(4, -3).$$

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AB$ .
- Να αποδείξετε ότι  $f(-x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  για  $x < 0$ .
- Αν η ευθεία  $AB$  έχει εξίσωση  $y = -\frac{3}{4}x$ , με χρήση του β) ερωτήματος ή με



όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της  $f$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 143.** ΘΕΜΑ 4-15790

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$  και  $g(x) = -x^2 + 4$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι  $f(-x) = f(x)$  και  $g(-x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i) την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ . (Μονάδες 6)

ii) την ανίσωση  $f(x) < g(x)$ . (Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ 144.** ΘΕΜΑ 4-15436

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο  $B$  σε απόσταση  $2 \text{ km}$  από το κοντινότερο σημείο  $A$  μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο  $K$  της ακτής, το οποίο απέχει  $4 \text{ km}$  από το  $A$ . Η διαδρομή που κάνει είναι η  $BM$  κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα  $3 \text{ km/h}$  και η  $MK$  τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα  $5 \text{ km/h}$ .

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος  $s$  που διανύεται, της ταχύτητας  $v$  και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης  $t$ , είναι  $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ .

Αν το σημείο  $M$  απέχει από το  $A$  απόσταση  $x \text{ km}$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $BM = \sqrt{4 + x^2}$ .

(Μονάδες 5)

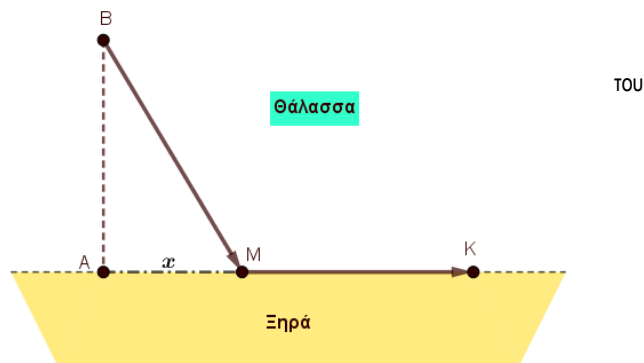
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης  $t$  (σε  $h$ ) κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση  $x$  (σε  $km$ ) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$  της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι  $\frac{4}{3}$  ώρες.

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 145.** ΘΕΜΑ 2-15175

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι  $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 146.** ΘΕΜΑ 4-15094

Το διάστημα  $S(t)$  σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή  $t$  σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση:  $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές  $t = 0$  και  $t = 2$ .

(Μονάδες 03)

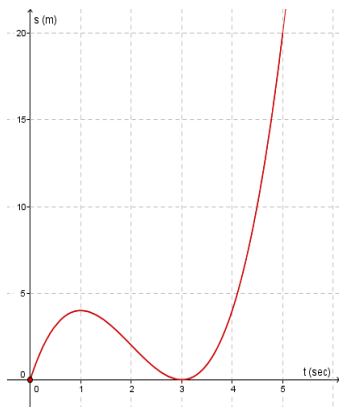
β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

(Μονάδες 10)

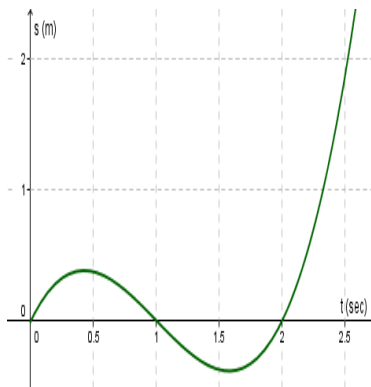
γ) Επειδή το  $S(t)$  εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

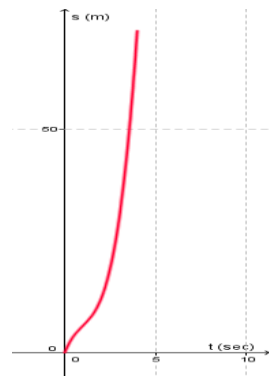
δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων  $S(t)$ . Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα  $S(t)$  της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 04)



(I)



(II)



(III)

**ΑΣΚΗΣΗ 147.** ΘΕΜΑ 2-17241Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x + 2$ .

α)

- i) Να αποδείξετε ότι το
- $P(x)$
- έχει παράγοντα το
- $(x + 1)$
- .

(Μονάδες 7)

- ii) Να κάνετε τη διαίρεση
- $P(x) : (x + 1)$
- .

(Μονάδες 10)

β) Αν  $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$ , να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ 148.** ΘΕΜΑ 4-15960Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + κx - 1$ , με  $κ ∈ ℝ$ .

- α) Να βρείτε την τιμή του
- $κ ∈ ℝ$
- για την οποία
- $f(-x) = f(x)$
- , για κάθε
- $x ∈ ℝ$
- .

(Μονάδες 6)

β) Για  $κ = 0$ ,

- i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση
- $f$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα
- $(-∞, 0]$
- ,

(Μονάδες 6)

- ii) Να δείξετε ότι
- $f(x) ≥ -1$
- για κάθε
- $x ∈ ℝ$
- ,

(Μονάδες 6)

- iii) να βρείτε τα
- $x ∈ ℝ$
- για τα οποία η γραφική παράσταση της
- $f$
- βρίσκεται κάτω από τον άξονα
- $x'x$
- .

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ 149.** ΘΕΜΑ 2-15674Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$ .

- α) Να κάνετε τη διαίρεση
- $P(x) : (x - 1)$
- και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν  $P(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 3$ .

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ 150.** ΘΕΜΑ 4-15431α) Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + αx^2 + βx - 5$ , με  $x ∈ ℝ$ .Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το  $(x - 1)$  και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με  $(x - 2)$  είναι  $-1$ , να δείξετε ότι: 
$$\begin{cases} 2α + β = -6 \\ \text{και} \\ α + β = 3 \end{cases}$$

(Μονάδες 6)

- β) Να δείξετε ότι
- $α = -9$
- και
- $β = 12$
- .

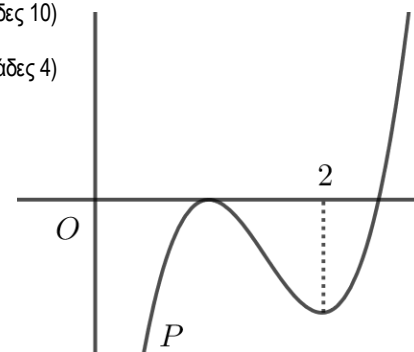
(Μονάδες 5)

- γ) Να βρείτε τις τιμές του
- $x ∈ ℝ$
- , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης
- $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
- είναι κάτω από τον άξονα
- $x'x$
- .

(Μονάδες 10)

- δ) Αν η γραφική παράσταση της
- $P(x)$
- είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονotonίας της.

(Μονάδες 4)

**ΑΣΚΗΣΗ 151.** ΘΕΜΑ 4-15005Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ .

- α) Να αποδείξετε ότι
- $f$
- είναι άρτια.

- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
- $f$
- με τον άξονα
- $x'x$
- .

(Μονάδες 5)

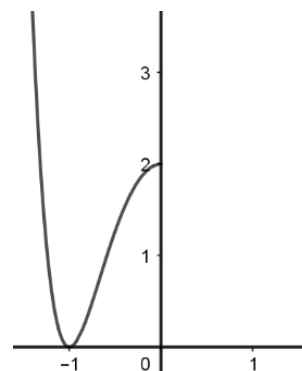
- γ) Να συμπληρώσετε στο παρακάτω σχήμα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
- $f$
- για
- $x > 0$
- .

(Μονάδες 10)

- δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
- $f$
- , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η
- $f$
- είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η
- $f$
- είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 4)

(Μονάδες 6)



**ΑΣΚΗΣΗ 152.** ΘΕΜΑ 2-15246

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

α) Να παραγοντοποιήσετε το  $P(x)$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν  $P(x) = (x+1)^2(x-1)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \geq 0$ .

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ 153.** ΘΕΜΑ 2-15695

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x+1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) + 6 = 0$ .

(Μονάδες 12)

**ΑΣΚΗΣΗ 154.** ΘΕΜΑ 2-15654

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 7x + 6$ .

α) Να δείξετε ότι το  $x - 2$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ 155.** ΘΕΜΑ 2-15618

α) Να γράψετε το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$  ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ 156.** ΘΕΜΑ 2-15248

Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το πολυώνυμο  $2x-1$  δίνει πηλίκο  $x^2 - 2$  και υπόλοιπο 1.

**ΑΣΚΗΣΗ 157.** α) Να βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$ .

(Μονάδες 12)

β) Αν  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$  να αποδείξετε ότι το  $P(x)$  έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x-1)$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ 158.** ΘΕΜΑ 2-15047

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

**ΑΣΚΗΣΗ 159.** ΘΕΜΑ 2-15040

Δίνεται η εξίσωση  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της.

(Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης  $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$  και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 160.** ΘΕΜΑ 4-14955

Η μέση θερμοκρασία  $T$  (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από  $x$  εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι  $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ .

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν  $^{\circ}\text{C}$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  ώστε να ισχύει  $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία  $T$  είναι συνεχώς κάτω από μηδέν  $^{\circ}\text{C}$ . Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 161.** ΘΕΜΑ 4-15250

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$  το οποίο διαιρούμενο με το  $x^2 - 4$  δίνει υπόλοιπο  $4x + 1$ .

α) Να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 4)$ .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω  $\alpha = 4$  και  $\beta = 5$ . Αν το πηλίκο της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - 4)$  είναι το  $\pi(x) = x^3 - 1$ , τότε:

i) να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης  $P(x) : (x^2 - 4)$ .

(Μονάδες 4)

ii) να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 4x + 1$ .

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ 162.** ΘΕΜΑ 4-15066

Θεωρούμε το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

(Μονάδες 3)

ii) Αν ο αριθμός  $\rho$  είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός  $\frac{1}{\rho}$  είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ .

(Μονάδες 4)

**ΑΣΚΗΣΗ 163.** ΘΕΜΑ 4-20647

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον  $P(1) = 0$ , τότε:

β) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -3$  και  $\beta = \frac{21}{2}$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(\sin x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ 164.** Θεωρούμε το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 3x - 2$ .

A. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε το  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x^2 - x - 2$

B. Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$

**ΑΣΚΗΣΗ 165.** Δίνεται πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 - \alpha x + 3$ 

A. Αν  $P(-2) = -21$  και  $P(3) = 24$  να βρεθούν τα  $\alpha, \beta$ .

B. Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = 3$  να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου.

Γ. Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) > 3$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 166.** Το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $(x^2 - 9)$  είναι  $u = 4x + 1$ . Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων  $P(x) : (x - 3)$  και  $P(x) : (x + 3)$ .**ΑΣΚΗΣΗ 167.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$ .

α. Αν  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$  και  $P(-1) = 23$ , να αποδείξετε ότι  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ .

β. Να γίνει η διαίρεση του  $P(x)$ , για  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ , με το πολυώνυμο  $2x + 1$  και να γραφεί το  $P(x)$  με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.

γ. Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) > 7$  για  $k = -6$  και  $\lambda = -5$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 168.** Να δείχθει ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x) : (x - \alpha) \cdot (x - \beta)$  είναι:  $u(x) = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}$ **ΑΣΚΗΣΗ 169.** Να δείχτει ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης  $f(x)$  δια του πολυωνύμου  $g(x) = (x - \alpha)^2$  είναι το  $u(x) = x\pi(\alpha) + f(\alpha) - \alpha\pi(\alpha)$  με  $\pi(x)$  πολυώνυμο 1ου βαθμού.

**ΑΣΚΗΣΗ 170.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x)=x^3-\lambda x^2+kx+2$ .

Α. Να βρεθούν οι αριθμοί  $k, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων  $P(x): (x-2)$  και  $P(x): (x-3)$  να είναι 8 και -52 αντίστοιχα.

Β. Να λύσετε την εξίσωση  $P(x)=0$

**ΑΣΚΗΣΗ 171.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να κάνετε την διαίρεση του  $P(x)$  δια του  $x^2-1$  και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ. Για  $\alpha=3$ , να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $P(x)=0$  καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 172.** Να προσδιορισθούν τα  $\alpha, \beta$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$  να έχει παράγοντα το  $x-2$  και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x): (x-1)$  να είναι  $u=8$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 173.** Έστω  $f(x)=(2\alpha+1)x^2+(3\alpha+2)x+\alpha-3$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

α) Να δείχτεί ότι η γραφική της  $f$  διέρχεται από δυο σταθερά σημεία  $A(x_1, \psi_1), B(x_2, \psi_2)$ .

β) Αν  $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x-4$ , να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το  $P(x)$  να έχει παράγοντα το  $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$  με  $x_1, x_2$  τετμημένες των  $A, B$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 174.** Αν  $P(x)$  διαιρούμενο με το  $x-v$  δίνει πηλίκο  $\pi_1(x)$  και διαιρούμενο με το  $x-v-1$  δίνει πηλίκο  $\pi_2(x)$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , να δείχτεί ότι  $\pi_1(v+1)=\pi_2(v)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 175.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

α. Να υπολογιστούν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε το  $P(x)$  να έχει παράγοντα το πολυώνυμο  $Q(x) = x^2 - 4x + 4$ .

β. Αν  $\alpha = -4$  και  $\beta = 12$  να λυθεί η ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

γ. Να λύσετε την εξίσωση  $P(\eta\mu x)=0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 176.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α. Να κάνετε την διαίρεση του  $P(x)$  δια του  $x^2-1$  και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ. Για  $\alpha=3$ , να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $P(x)=0$  καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  είναι κάτω από τον άξονα  $x'$ . (ΠΑΝΕΛ\_2004)

**ΑΣΚΗΣΗ 177.** Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x)$ , βαθμού  $V \geq 2$ , για το οποίο ισχύει:  $8(x-1) \cdot P(x) - x \cdot P(2x+3) = -52x^3 - 8x^2 - 6x - 16$ , για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ . Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το  $x-1$  είναι 2:

1. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x^2 - 6x + 5$ .

2. Αν το πηλίκο της διαίρεσης του  $P(x)$  με το πολυώνυμο  $x^2 - 6x + 5$  είναι το  $\Pi(x) = x + 4$ :

α) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $P(x)$ :

i) με τον άξονα  $y'y$ .

ii) με την ευθεία  $y=2$

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(x)$  είναι πάνω από την ευθεία  $y=2$ .

#### 4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

**ΑΣΚΗΣΗ 177.** ΘΕΜΑ 4-20647

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον  $P(1) = 0$ , τότε:

β) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -3$  και  $\beta = \frac{21}{2}$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) \leq 0$ .

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση  $P(\sin x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

**ΑΣΚΗΣΗ 178.** ΘΕΜΑ 4-17941

Δίνεται η εξίσωση  $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για  $a = 0$ .

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$  είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

- i) Για  $a = 2\sqrt{2}$  η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.  
 ii) Για  $a \neq 2\sqrt{2}$  αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό  $\rho \in [-2, 2]$ , τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό  $-\rho$ .  
 (Μονάδες 10)

**ΑΣΚΗΣΗ 179.** ΘΕΜΑ 4-15377

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος  $x$  μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

- α) Να βρείτε τη διαφορά  $\Delta(x)$  των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του  $x$ .  
 (Μονάδες 4)

- β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:  
 Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β.

(Μονάδες 9)

Τη διαφορά των όγκων  $\Delta(x)$ .

(Μονάδες 4)

- γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $x$  ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

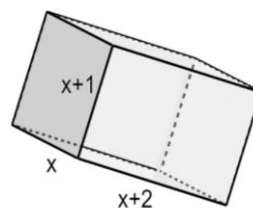
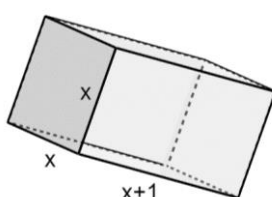
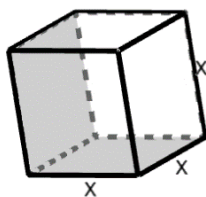
(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

Δεξαμενή Α

Δεξαμενή Β

Δεξαμενή Γ

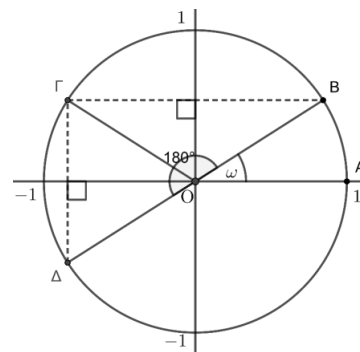
**ΑΣΚΗΣΗ 180.** ΘΕΜΑ 4-15187

Για τη γωνία  $\omega$  του παρακάτω σχήματος ισχύει  $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ .

- β) Να βρείτε:

την τιμή του  $\sigma\upsilon\nu\omega$ , τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ, το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών  $\angle A\hat{O}B$ ,  $\angle A\hat{O}\Gamma$  και  $\angle A\hat{O}\Delta$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 181.** ΘΕΜΑ 4-15037

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \sqrt{x+3}$  και  $g(x) = 3x - 1$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονotonία των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$ .

(Μονάδες 4)

- β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

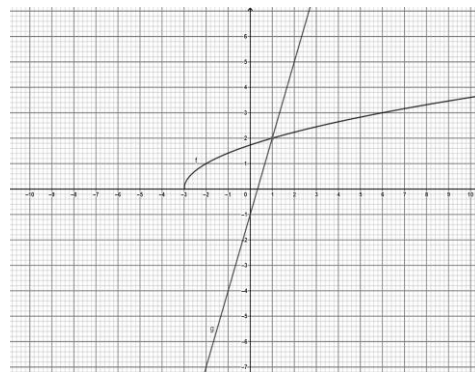
(Μονάδες 6)

- γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση  $f(x) < g(x)$ .

(Μονάδες 7)

- δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του γ) ερωτήματος.

(Μονάδες 8)

**ΑΣΚΗΣΗ 182.** ΘΕΜΑ 4-15270

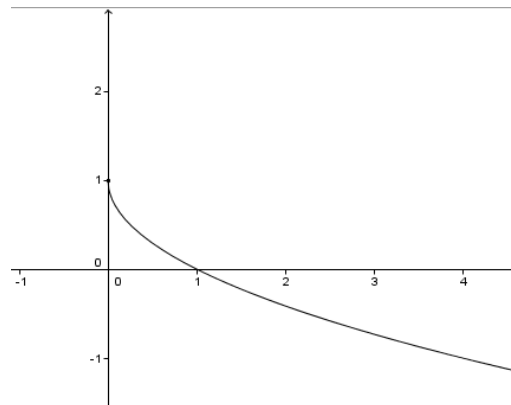
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε την μονotonία της και την μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

- β) Αν  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ , και  $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$ , να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

- γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ . Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία  $y = 2x$ . (Μονάδες 9)



**ΑΣΚΗΣΗ 183.** Να λύσετε τις εξισώσεις: α)  $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$  β)  $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-11\left(x+\frac{1}{x}\right)+19=0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 184.** Όμοια οι εξισώσεις: α)  $x^3+\frac{1}{x^3}=x+\frac{1}{x}$  β)  $x^3+\frac{1}{x^3}=6\left(x+\frac{1}{x}\right)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 185.** Να λυθεί η εξίσωση:  $(1-x)\cdot(1+x)^3=x^2$  (1), [Υπόδ: θέτουμε  $1+x=\omega \Rightarrow 1-x=2-\omega \dots$ ].

A) Να βρείτε τα  $x$  για τα οποία ορίζεται η εξίσωση:  $\sqrt{x-2}+\frac{x-2}{2\sqrt{x-2}}=3$

B) Να λύσετε την εξίσωση του ερωτήματος A.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5-ΕΚΘΕΤΙΚΗ & ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### 5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**ΑΣΚΗΣΗ 186.** ΘΕΜΑ 2-21091

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{R}$ .

- i) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$ .

| $x$    | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------|----|---|---|---|---|
| $f(x)$ |    |   |   |   |   |

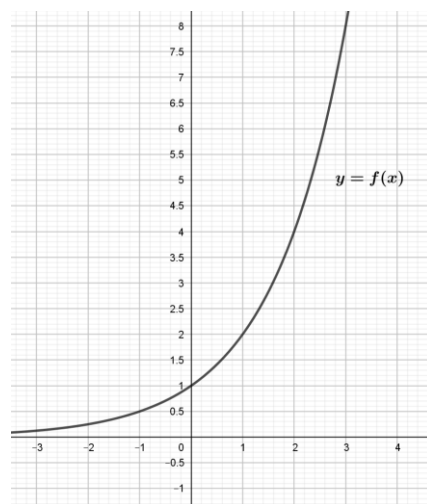
(Μονάδες 10)

- ii) Να βρείτε τον τύπο της εκθετικής συνάρτησης  $f$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x)=32$ .

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 8)



**ΑΣΚΗΣΗ 187.** ΘΕΜΑ 4-20689

α) Να λυθεί η ανίσωση  $\frac{x-2}{x+1} > 0$ .

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

- i) Να βρεθούν οι τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

- ii) Για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

- iii) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

**ΑΣΚΗΣΗ 188.** ΘΕΜΑ 2-18866

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 2^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να λύσετε την εξίσωση  $2^x - 1 = 0$ .

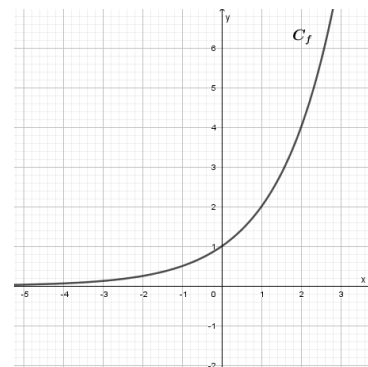
(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = 2^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $g$  με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 05)



**ΑΣΚΗΣΗ 189.**

ΘΕΜΑ 4-21444

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους  $f(x) = 4^x$  και  $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο  $A$ , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της  $g$ , με εξαίρεση το σημείο  $A$ . (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  στο ίδιο σύστημα αξόνων. (Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ 190.**

ΘΕΜΑ 4-21471

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 3)$  και  $B(2, 13)$ .

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 7)

Αν  $\alpha = 5$  και  $\beta = -7$ ,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) > 4^x - 3$ .

(Μονάδες 7)

**ΑΣΚΗΣΗ 191.**

ΘΕΜΑ 2-21451

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 3^x$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(x) = 3^x + 1$  και  $h(x) = 3^x - 1$ , μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$ ;

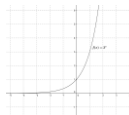
ποια

(Μονάδες 13)

**ΑΣΚΗΣΗ 192.**

ΘΕΜΑ 4-21448

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του  $f(t)$  (σε mg) να



μειώνεται μετά από  $t$  ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση  $f(t) = q_0 \cdot \alpha^t$ ,  $t \geq 0$ , όπου οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $q_0$  είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά  $q_0$  στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει  $0 < \alpha < 1$ . (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης  $f$ , εκφράζοντας τις τιμές  $f(t)$  ως συνάρτηση της αρχικής τιμής  $q_0$ . (Μονάδες 4)

| $t$    | 0     | 1               | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|-------|-----------------|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $q_0$ | $\frac{q_0}{2}$ |   |   |   |   |   |

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι  $\alpha = \frac{1}{2}$  και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

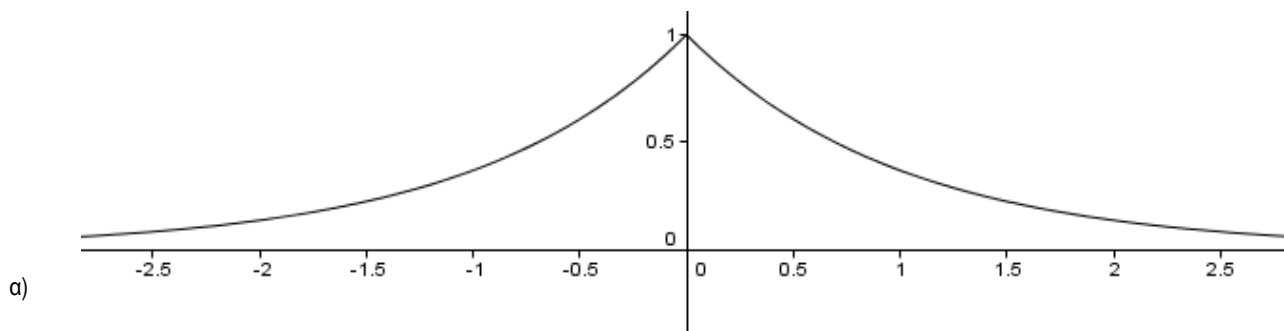
i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 6]$ . (Μονάδες 5)

**ΑΣΚΗΣΗ 193.**

ΘΕΜΑ 4-15269

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  διπλού τύπου.



Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης  $f$ .

A.  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$       B.  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$ , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την ευθεία  $y = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την παραβολή  $y = x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι το σημείο  $(0, 1)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 194.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρείτε τις τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και  $f(2) = 4$ , να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .

γ. Για  $a = 2$  να λύσετε την ανίσωση  $f(x+1) < 8$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 195.**

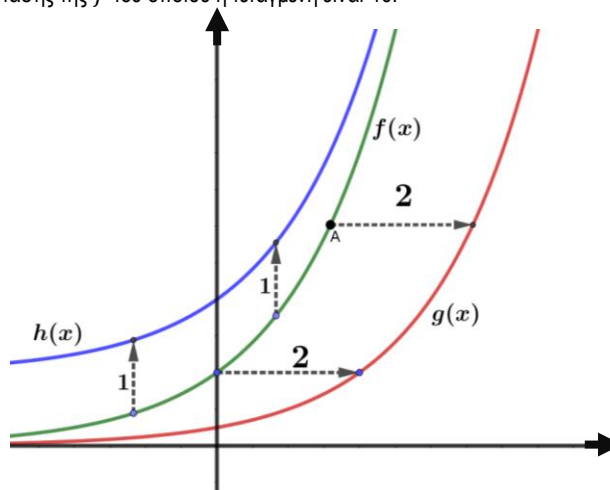
ΘΕΜΑ 2/15393

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = 2^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και δύο άλλων συναρτήσεων  $g(x)$  και  $h(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της  $f(x)$ .

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των  $g(x)$  και  $h(x)$  από την γραφική παράσταση της  $f(x)$ .

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων  $g(x)$  και  $h(x)$ .

γ) Να βρείτε την τεταγμένη του σημείου  $A$  της γραφικής παράστασης της  $f$  του οποίου η τεταγμένη είναι 16.



## 5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

**ΑΣΚΗΣΗ 196.** ΘΕΜΑ 4-20847

Αν  $I$  είναι η ένταση του ήχου (σε  $W/m^2$  - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη  $D$  (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:  
 $D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$ . Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

| Όριο ακοής                                         | 0 ντεσιμπέλ   |
|----------------------------------------------------|---------------|
| Θρόισμα φύλλων                                     | 10 ντεσιμπέλ  |
| Συνήθης ψίθυρος                                    | 20 ντεσιμπέλ  |
| Αθόρυβο αυτοκίνητο                                 | 50 ντεσιμπέλ  |
| Συνήθης ομιλία                                     | 65 ντεσιμπέλ  |
| Κυκλοφοριακή κίνηση                                | 80 ντεσιμπέλ  |
| Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ)<br>σε απόσταση 3 μέτρων | 90 ντεσιμπέλ  |
| Όριο πόνου                                         | 120 ντεσιμπέλ |
| Αεριωθούμενο                                       | 140 ντεσιμπέλ |

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι  $1 W/m^2$  να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι  $\log 2 \approx 0,3$ ).

**ΑΣΚΗΣΗ 197.** ΘΕΜΑ 2-20663

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = (\log_2 8)x^3 + (4\log_2 \sqrt{2})x^2 - (4\log_2 1)x + 1990$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$ .

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης  $P(x) : (x - 2)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 198.** ΘΕΜΑ 4-18863

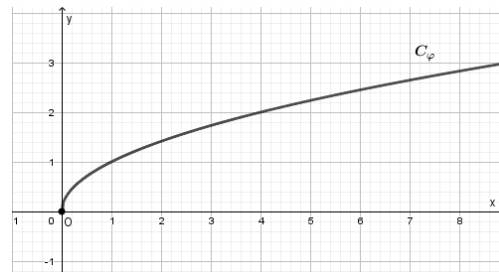
Δίνονται οι συναρτήσεις:  $\varphi(x) = \sqrt{x}$ , με  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \sqrt{x-1}$ , με  $x \geq 1$  και  $g(x) = \frac{x+1}{3}$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .  
 (Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\varphi$ .

i) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

ii) Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .



γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της  $g$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 199.** ΘΕΜΑ 4-18429

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο ( $1 W/m^2$ ). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι  $10^{-12} W/m^2$ . Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση  $D = 10 \cdot \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$  όπου  $I_0$  η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και  $I$  η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι  $100 W/m^2$ .

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

**ΑΣΚΗΣΗ 200.** ΘΕΜΑ 2-15817

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \ln 2$  και  $\beta = \ln 3$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί  $0 < \alpha < \beta$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $\beta - \alpha < 1$ . (Δίνεται  $e \approx 2.71$ )

**ΑΣΚΗΣΗ 201.** ΘΕΜΑ 4-18110

α) Να λύσετε την εξίσωση  $x(e^x - 1) = 0$

β) Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  το πρόσημο του γινομένου  $x(e^x - 1)$

γ) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ .

- i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .  
 ii) Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(0)$ ,  $f(\ln 2)$  και  $f(-\ln 2)$ .

iii) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: «η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$  είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΑΣΚΗΣΗ 202.** ΘΕΜΑ 3-15392

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = 2^x$  και  $g(x) = 5^{1-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $H(0, \frac{1}{5})$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.  
 β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.  
 γ) Αν είναι  $x_B, x_\Sigma$  οι τετμημένες των σημείων Β, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $x_B - x_\Sigma = \log 20$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 203.** ΘΕΜΑ 4-15822

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  και  $\alpha \neq 0$ , το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

- α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του  $P(x)$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 0$ .  
 γ) Με  $\alpha = -1$  και  $\beta = 0$ ,  
 i) Να λύσετε την ανίσωση  $P(x) > 0$ .  
 ii) Να αποδείξετε ότι  $P(\log \sqrt{10}) > 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 204.** ΘΕΜΑ 4-15474

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση  $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$

- α) Να δείξετε ότι  $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  με την ευθεία  $\varepsilon: y = ex + 4$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του  $x$  που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $P(x)$  είναι πάνω από την ευθεία  $\varepsilon: y = ex + 4$

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:  $P(e) - e^2 - 4$

**ΑΣΚΗΣΗ 205.** ΘΕΜΑ 4-15251

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$  το οποίο έχει παράγοντα το  $x - 1$ .

- α) Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ .  
 β) Για  $\alpha = 15$  να κάνετε τη διαίρεση  $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$  και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.  
 γ) Αν  $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$  να λύσετε την ανίσωση  $P(x) < 0$ . (Μονάδες 7)  
 δ) Να αποδείξετε ότι  $P(\ln 2) < 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 206.** ΘΕΜΑ 4-15823

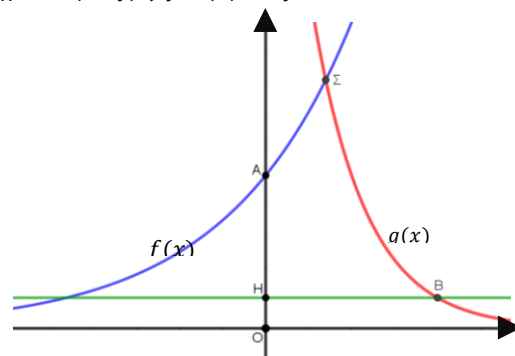
Ένα πολυώνυμο  $P(x)$  διαιρούμενο με το πολυώνυμο  $4x^2 - 1$  δίνει πηλίκο  $3x - 2$  και υπόλοιπο 1.

- α) Να αποδείξετε ότι  $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 3x + 3$  και να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 1$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι  $P(\log 5) \neq 1$ .  
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $P(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(-1, 0)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 207.** ΘΕΜΑ 2-15816

Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \ln 2$ ,  $\beta = \ln 4$ ,  $\gamma = \ln 8$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $2\beta = \alpha + \gamma$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι  $\beta + \gamma = 5\alpha$ .



**ΑΣΚΗΣΗ 208.** ΘΕΜΑ 2-15687

Δίνεται η παράσταση  $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι  $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$

β) Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $3\alpha = 16\beta$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 209.** ΘΕΜΑ 4-15021

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το  $O(0, 0)$ .

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση  $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$ .

δ) Να αποδείξετε ότι  $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$ , για κάθε  $\theta \in \mathbb{R}$  με  $\eta\mu\theta \neq 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 210.**

Αν  $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$ , τότε:

α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 3$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x$ .

**5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**

**ΑΣΚΗΣΗ 211.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2) - \ln(e^x - 1)$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -\ln 2$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 212.** (Τ.Θ.2022)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + x = 3 \ln 2$ .

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) + x \geq 3 \ln 2$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 213.** (Τ.Θ.2022)

B1. Να λύσετε την εξίσωση:  $\ln(x+1) = \ln(2x)$ .

B2. Να λύσετε την ανίσωση:  $\ln(x+1) > \ln(2x)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 214.** ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - 2)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + x = 3 \ln 2$ .

γ) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) + x \geq 3 \ln 2$ .