

3.1 ΚΥΚΛΟΣ

1. Εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα ρ

ΘΕΩΡΗΜΑ I

Κάθε κύκλος με κέντρο την αρχή αξόνων O και ακτίνα ρ έχει εξίσωση : $(c): x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (1)$

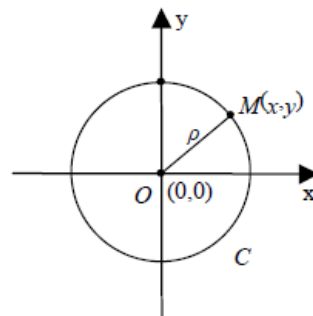
Απόδειξη

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ .

Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C , αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ ,

δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει: $(OM) = \rho$, με $(OM) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

Οπότε $(OM) = \rho \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \rho^2}, \quad (1).$



Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο την αρχή αξόνων $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-3,4)$.

Λύση

Ο κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho = (OA) = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Άρα έχει εξίσωση $(c): x^2 + y^2 = 5^2$

➤ **Μοναδιαίος κύκλος:** λέγεται ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Εξίσωση μοναδιαίου κύκλου: $(c): \boxed{x^2 + y^2 = 1} \quad (1\beta).$

1Α. Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο την αρχή $O(0,0)$ και ακτίνα ρ

ΘΕΩΡΗΜΑ II Η εφαπτομένη κύκλου με κέντρο την αρχή αξόνων O και ακτίνα ρ σε σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση : $(\varepsilon): xx_1 + yy_1 = \rho^2 \quad (1a)$

Απόδειξη

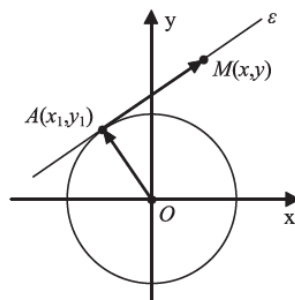
Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$

.Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε , αν και μόνο αν $OA \perp AM$ δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$\boxed{\vec{OA} \cdot \vec{AM} = 0}, \quad (1).$$

Όμως $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ και $\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1)$. Έτσι η (1) γράφεται διαδοχικά

$$\vec{OA} \cdot \vec{AM} = 0 \Rightarrow x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \Rightarrow xx_1 - x_1^2 + yy_1 - y_1^2 = 0 \Rightarrow \boxed{xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2}, \quad (2).$$



Αλλά το σημείο $A(x_1, y_1) \in (c)$, οπότε επαληθεύει την εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \boxed{x_1^2 + y_1^2 = \rho^2}$, (3).

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι η εφαπτομένη του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση (ε): $\underline{xx_1 + yy_1 = \rho^2}$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = 4$ στο σημείο $A(\sqrt{3}, 1)$

Λύση

Καταρχάς το $A(\sqrt{3}, 1)$ ανήκει στον κύκλο αφού τον επαληθεύει γιατί $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$, άρα είναι σημείο επαφής.

Είναι $\rho=2$, οπότε (ε): $\underline{xx_1 + yy_1 = \rho^2} \Rightarrow x\sqrt{3} + y \cdot 1 = 2^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}x + y = 4 \rightarrow (ε)}$

2. Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ

ΘΕΩΡΗΜΑ III

Κάθε κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση :

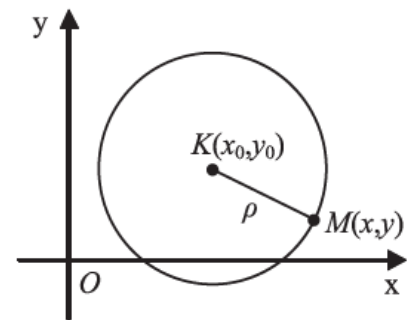
$$(c): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \quad (2)$$

Έστω Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και **C** ο κύκλος με κέντρο το σημείο **$K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ** . Συνεπώς το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του K απόσταση ίση με ρ , δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει: $(KM) = \rho$, με

$$(KM) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Οπότε

$$(KM) = \rho \Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Rightarrow \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2}, \quad (2).$$



Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο $K(1, -3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

Λύση

Ο κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho = (KA) = \sqrt{(1-1)^2 + (0+3)^2} = 3$.

Άρα έχει εξίσωση $\boxed{(c): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9}$.

3. Γενική Εξίσωση κύκλου

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

(3) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (3) παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

➤ Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η εξίσωση, οπότε η εξίσωση (I) παριστάνει μόνο ένα σημείο το

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

➤ Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση (I) είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$ που να την επαληθεύουν.

Απόδειξη

Ορθό: Αν εκτελέσουμε τις πράξεις, η εξίσωση (2) του κύκλου γράφεται

$$(c): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2 \Rightarrow$$

δηλαδή παίρνει τη μορφή $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = -2x_0$, $B = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Αντιστρόφως: (μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνων) Κάθε εξίσωση της μορφής (3) γράφεται διαδοχικά

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow (x^2 + Ax) + (By + y^2) + \Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x^2 + 2\frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + 2\frac{B}{2}y + \frac{B^2}{4}\right) = -\Gamma + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \quad (I)$$

Επομένως:

$$\text{➤ Αν } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \text{ η εξίσωση (I)} \Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}\right)^2,$$

δηλαδή είναι της μορφής (c): $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, άρα παριστάνει κύκλο

$$x_0 = -\frac{A}{2}, y_0 = -\frac{B}{2} \text{ δηλαδή κέντρο } K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

$$\text{➤ Αν } A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0 \text{ η εξίσωση (I)} \Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{A}{2} \text{ και } y = -\frac{B}{2},$$

οπότε η εξίσωση (I) παριστάνει μόνο ένα σημείο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

➤ Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση (I) είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ**, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$ που να την επαληθεύουν.

1. ...ΜΕΡΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΚΛΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΣ ΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΥΚΛΟΥ

I. ΚΥΚΛΟΣ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $K(x_0, y_0)$ ή $O(0,0)$ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $A(\alpha, \beta)$

➤ $\rho = (KA)$ ή $\rho = (OA)$

II. ΚΥΚΛΟΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ A ΚΑΙ B

➤ Το κέντρο K ή O ανήκει στη μεσοκάθετο του AB , άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν

➤ $\rho = (KA)$ ή $\rho = (OA)$

III. ΚΥΚΛΟΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ A, B ΚΑΙ Γ

➤ Το κέντρο K ή O ανήκει στο σημείο τομής των μεσοκαθέτων των AB και $B\Gamma$, άρα λύνω σύστημα με τις μεσοκαθέτους και βρίσκω το κέντρο.

➤ $\rho = (KA)$ ή $\rho = (OA)$

IV. ΚΥΚΛΟΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ A, B ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ (ε)

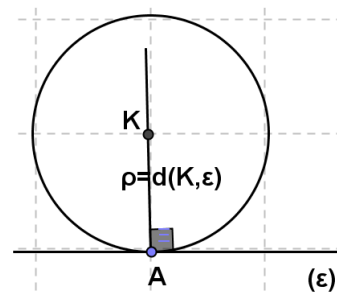
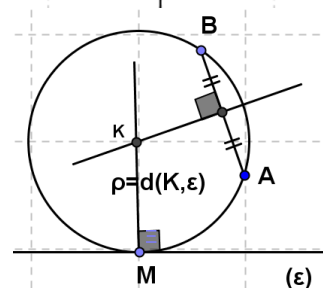
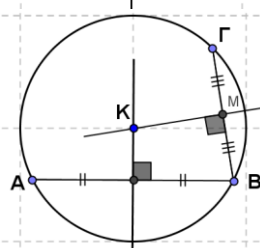
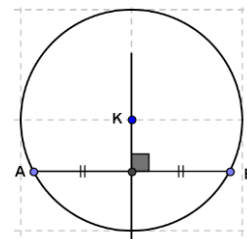
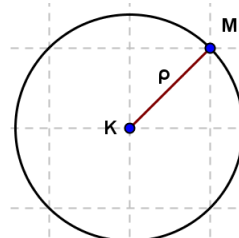
➤ Το κέντρο K ή O ανήκει στο σημείο τομής των μεσοκαθέτων των AB και της καθέτου της (ε) στο σημείο επαφής, άρα λύνω και βρίσκω το κέντρο.

➤ $\rho = d(K, \varepsilon)$ ή $\rho = d(O, \varepsilon)$

V. ΚΥΚΛΟΣ (c) ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ (ε)

➤ Το κέντρο K ή O ανήκει στην κάθετο της (ε) στο σημείο επαφής, άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν

➤ $\rho = d(K, \varepsilon)$ ή $\rho = d(O, \varepsilon)$



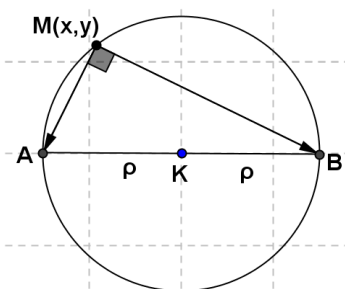
VI. ΚΥΚΛΟΣ (c) ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΔΙΑΜΕΤΡΟ AB

→ δεν βρίσκω κέντρο και ακτίνα

- Υποθέτω σημείο $M(x, y)$ του κύκλου (c) και επειδή η γωνία

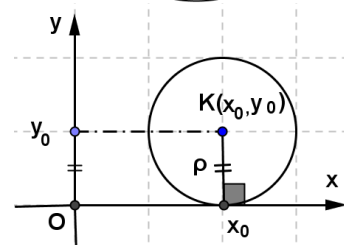
$\hat{AMB} = 90^\circ$ (σαν εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο) θα είναι:

$\vec{MA} \perp \vec{MB} \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \dots$ και βρίσκω απευθείας την εξίσωση του κύκλου (c).



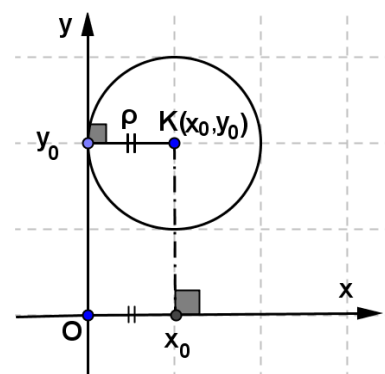
VII. ΚΥΚΛΟΣ (c) ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $K(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ $x'x$

- $\rho = |y_0|$



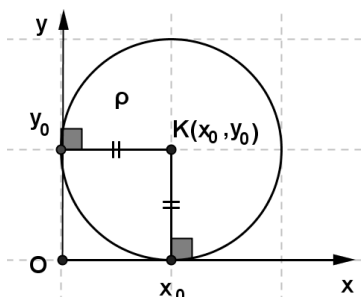
VIII. ΚΥΚΛΟΣ (c) ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $K(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΤΟΝ ΑΞΟΝΑ $y'y$

- $\rho = |x_0|$



IX. ΚΥΚΛΟΣ (c) ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $K(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ $x'x$ και $y'y$

- $\rho = |x_0| = |y_0|$

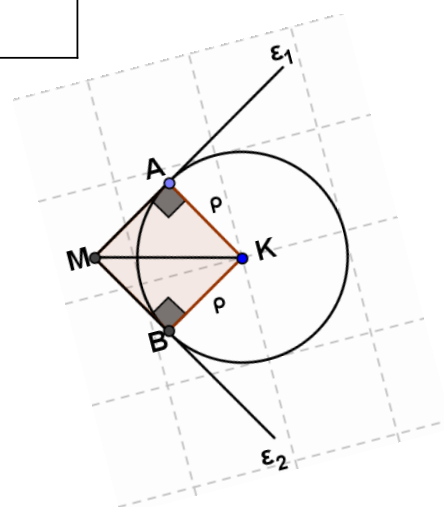


X.

ΚΥΚΛΟΣ (c) ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ $K(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ Μ ΕΚΤΟΣ ΑΥΤΟΥ

$MA \perp MB \Leftrightarrow MAKB$ τετράγωνο $\Leftrightarrow$

- $\rho = (MA) \Leftrightarrow (KM) = \rho\sqrt{2}$



Άσκηση-1 (Α1 σχολ. βιβλίου –σελ. 87)

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$
- ii. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$
- iii. Όταν εφάπτεται της ευθείας $x - y = 2$
- iv. Όταν εφάπτεται της ευθείας $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2$

Λύση

- i. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής :
 $(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(1, \sqrt{3})$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C): x^2 + y^2 = \rho^2 \stackrel{x=1, y=\sqrt{3}}{\Leftrightarrow} 1^2 + \sqrt{3}^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Leftrightarrow \rho = 2. \text{ Άρα } (C): x^2 + y^2 = 4.$$

- ii. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής :
 $(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C): x^2 + y^2 = \rho^2 \stackrel{x=\alpha-\beta, y=\alpha+\beta}{\Leftrightarrow} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \rho^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 = \rho^2. \text{ Άρα } (C): x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2.$$

- iii. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής :
 $(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία

$$(\varepsilon): x - y - 2 = 0 \text{ άρα } \rho = d(O, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \text{ Άρα } (C): x^2 + y^2 = 2.$$

- iv. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής :
 $(C): x^2 + y^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) εφάπτεται στην ευθεία

$$(\varepsilon): \alpha x + \beta y - \alpha^2 - \beta^2 = 0 \text{ άρα } \rho = d(O, \varepsilon) = \frac{|\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 - \alpha^2 - \beta^2|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{Άρα } (C): x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Άσκηση-2(Α5 σχολ.βιβλίου-σελ.87)

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. Όταν έχει κέντρο $K(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3},0)$
- ii. Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(-1,2)$ και $B(7,8)$
- iii. Όταν έχει ακτίνα $\rho = 5$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(7,0)$
- iv. Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$
- v. Όταν τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,\mu)$.
- vi. Όταν εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $B(1,2)$.
- vii. Όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + 4y = 12$ στο σημείο $A(0,3)$.

Λύση

- i. Αφού ο κύκλος έχει κέντρο $K(0,1)$ θα έχει εξίσωση της μορφής :
 $(C) : (x-0)^2 + (y-1)^2 = \rho^2$ όπου ρ η ακτίνα του. Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3},0)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του

$$\text{δηλ. } (C) : x^2 + (y-1)^2 = \rho^2 \stackrel{x=\sqrt{3}}{y=0} \Leftrightarrow 3+1 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho = 2. \text{ Άρα } (C) : x^2 + (y-1)^2 = 4$$

- ii. Το κέντρο K του κύκλου είναι το μέσον του AB άρα $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$ και

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \quad \text{άρα} \quad K(3,5). \quad \text{Η ακτίνα του κύκλου είναι}$$

$$\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(7+1)^2 + (8-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5. \quad \text{Άρα :}$$

$$(C) : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

- iii. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$, επίσης έχει ακτίνα $\rho = 5$ άρα θα έχει εξίσωση : $(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 25$.

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 25 \stackrel{x=1}{y=0} \Leftrightarrow (1-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = 25 \Leftrightarrow (1-x_0)^2 + y_0^2 = 25 \quad (1)$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $B(7,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 25 \stackrel{x=7}{y=0} \Leftrightarrow (7-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = 25 \Leftrightarrow (7-x_0)^2 + y_0^2 = 25 \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχω $\begin{cases} (1-x_0)^2 + y_0^2 = 25 \\ (7-x_0)^2 + y_0^2 = 25 \end{cases}$ αφαιρώ κατά μέλη και έχω :

$$(1-x_0)^2 - (7-x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow 1-2x_0+x_0^2-49+14x_0-x_0^2 = 0 \Leftrightarrow 12x_0 = 48 \Leftrightarrow x_0 = 4$$

Στην (1) για $x_0 = 4$ έχω : $(1-x_0)^2 + y_0^2 = 25 \stackrel{x_0=4}{\Leftrightarrow} 9 + y_0^2 = 25 \Leftrightarrow y_0 = 4 \text{ ή } y_0 = -4.$

• Άρα αν $x_0 = 4, y_0 = 4$ τότε $(C_1) : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$

• Άρα αν $x_0 = 4, y_0 = -4$ τότε $(C_2) : (x-4)^2 + (y+4)^2 = 25$

- iv. Αφού ο κύκλος διέρχεται από δυο γνωστά σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $(\zeta) : y = x$ τότε το κέντρο του κύκλου θα είναι το σημείο τομής της μεσοκαθετου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος AB και της ευθείας (ζ) . Έστω M το μέσο του AB τότε $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$ και $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ άρα $M(6,0)$.

Επίσης $(\varepsilon) \perp (AB) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1$, όμως $\lambda_{AB} = \frac{0-0}{8-4} = 0$ άρα $\lambda_\varepsilon = \text{δεν ορίζεται}$ άρα

η (ε) κατακόρυφη δηλ. $(\varepsilon) : x = x_0 \Leftrightarrow x = 6$

$$\begin{cases} (\varepsilon) : x = 6 \\ (\zeta) : y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \text{ άρα το κέντρο του κύκλου είναι } K(6,6) \text{ και η ακτίνα είναι}$$

$$\rho = (KA) = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(4-6)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{Άρα } (C) : (x-6)^2 + (y-6)^2 = 40$$

- v. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$, επίσης έχει ακτίνα ρ άρα θα έχει εξίσωση :

$$(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2.$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \stackrel{x=4, y=0}{\Leftrightarrow} (4-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \quad (1)$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $B(8,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \stackrel{x=8, y=0}{\Leftrightarrow} (8-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (8-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \quad (2)$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,-2)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 \stackrel{x=0, y=-2}{\Leftrightarrow} (0-x_0)^2 + (-2-y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x_0^2 + (2+y_0)^2 = \rho^2 \quad (3)$$

Από (1) και (2) έχω $\begin{cases} (4-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \\ (8-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \end{cases}$ αφαιρώ κατά μέλη και έχω :

$$(4-x_0)^2 - (8-x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow 16 - 8x_0 + x_0^2 - 64 + 16x_0 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow 8x_0 = 48 \Leftrightarrow x_0 = 6 \quad \text{άρα}$$

στην (1) : $(4-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \stackrel{x_0=6}{\Leftrightarrow} (4-6)^2 + y_0^2 = \rho^2 \Leftrightarrow 4 + y_0^2 = \rho^2$ και άρα στην (3) :

$$x_0^2 + (2+y_0)^2 = \rho^2 \stackrel{x_0=6}{\Leftrightarrow} 36 + (2+y_0)^2 = 4 + y_0^2 \Leftrightarrow 36 + 4 + 4y_0 + y_0^2 = 4 + y_0^2 \Leftrightarrow 4y_0 = -36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_0 = -9. \quad \text{Άρα } K(6,-9) \text{ και τέλος στην (1) :}$$

$$(4-x_0)^2 + y_0^2 = \rho^2 \stackrel{x_0=6, y_0=-9}{\Leftrightarrow} (4-6)^2 + (-9)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 85 \quad \text{δηλ. } \rho = \sqrt{85} \text{ και}$$

$$(C) : (x-6)^2 + (y+9)^2 = 85$$

vi. Έστω ότι ο κύκλος έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$, επίσης έχει ακτίνα ρ άρα θα έχει εξίσωση :

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

Αφού ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x'x$ ισχύει : $\rho = |y_0|$ άρα

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = |y_0|^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(3,0)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2 \xrightarrow{x=3, y=0} (3 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 = y_0^2 \Leftrightarrow (3 - x_0)^2 + y_0^2 = y_0^2 \quad (1)$$

Όμως ο κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $B(1,2)$ άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση του δηλ.

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2 \xrightarrow{x=1, y=2} (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = y_0^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω $\begin{cases} (3 - x_0)^2 + y_0^2 = y_0^2 \\ (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = y_0^2 \end{cases}$ αφαιρώ κατά μέλη και έχω :

$$(3 - x_0)^2 + y_0^2 - (1 - x_0)^2 - (2 - y_0)^2 = 0 \Leftrightarrow 9 - 6x_0 + x_0^2 + y_0^2 - 1 + 2x_0 - x_0^2 - 4 + 4y_0 - y_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4y_0 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0 + 1. \text{ Άρα στην (1) : } (3 - x_0)^2 + y_0^2 = y_0^2 \xrightarrow{x_0=y_0+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3 - y_0 - 1)^2 + y_0^2 = y_0^2 \Leftrightarrow (2 - y_0)^2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2 \text{ και άρα } x_0 = y_0 + 1 \xrightarrow{y_0=2} x_0 = 3 \text{ άρα :}$$

$$(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = y_0^2 \xrightarrow{x_0=3, y_0=2} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

vii. Το κέντρο $K(x_0, y_0)$ του κύκλου θα είναι σημείο τομής της μεσοκαθετου (η) του ευθυγράμμου τμήματος AO και της καθετου (ζ) στην ευθεία $(\varepsilon) : 3x + 4y - 12 = 0$ στο

σημείο επαφής $A(0,3)$. Έστω M το μέσο του AO τότε $x_M = \frac{x_A + x_O}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ και

$$y_M = \frac{y_A + y_O}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \text{ άρα } M\left(0, \frac{3}{2}\right). \text{ Επίσης } \lambda_{AO} = \frac{0-3}{0-0} = \text{δεν ορίζεται} \text{ άρα η}$$

μεσοκαθετος (η) του AO θα έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda_\eta = 0$ άρα : $(\eta) : y = \frac{3}{2}$.

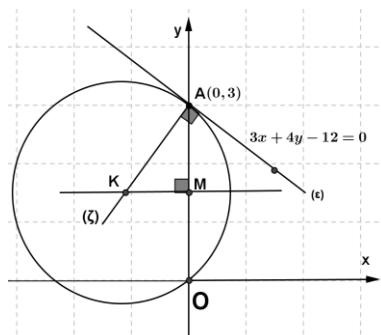
Επίσης : $(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$ όμως $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$ άρα $\lambda_\zeta = \frac{4}{3}$ και η (ζ) διέρχεται από

το $A(0,3)$ άρα : $(\zeta) : y - 3 = \frac{4}{3}(x - 0) \Leftrightarrow 3y - 9 = 4x \Leftrightarrow 4x - 3y + 9 = 0 : (\zeta)$. Άρα τελικά :

$$\begin{cases} (\eta) : y = \frac{3}{2} \\ (\zeta) : 4x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{8} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ άρα } K\left(-\frac{9}{8}, \frac{3}{2}\right). \text{ Και η ακτίνα του κύκλου είναι :}$$

$$\rho = (OK) = \sqrt{\left(-\frac{9}{8} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \frac{15}{8} \text{ άρα η εξίσωση του κύκλου είναι :}$$

$$(C) : \left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2.$$



2. ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ

2Α. Εφαπτομένη (ε) με γνωστό το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$ κύκλου και εφαπτομένης

ΜΕΘΟΔΟΣ:

1. Για τη μορφή $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$:

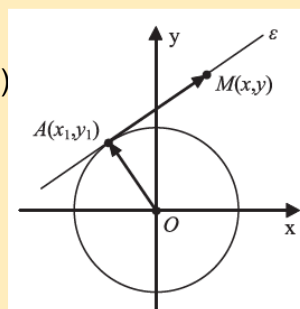
1ος τρόπος → αντικαθιστούμε τα x_1, y_1 στον τύπο $(\varepsilon): xx_1 + yy_1 = \rho^2$

2ος τρόπος → Θεωρούμε και ένα τυχαίο σημείο της (ε) $M(x, y)$, άρα $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$...και προκύπτει η εξίσωση εφαπτομένης. (ε) με x και y.

2. Για τις μορφές $(c): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και $(c): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

Μέθοδος → Θεωρούμε και ένα τυχαίο σημείο της (ε) $M(x, y)$,

άρα $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$...και προκύπτει η εξίσωση εφαπτομένης. (ε) με x και y.

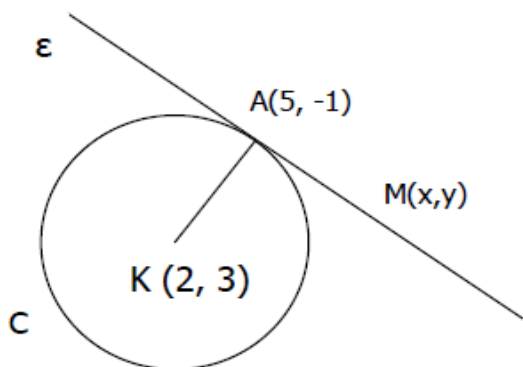


Άσκηση-3

Δίνεται κύκλος C: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ και το σημείο του $A(5, -1)$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο A.

Λύση

Είναι $A=-4$, $B=-6$ και $\Gamma=-12$, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2, 3)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 1$



Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο επαφής (σ.ε.) $A(5, -1)$ και έστω ένα τυχαίο σημείο $M(x, y)$ που ανήκει στην (ε). Τότε ισχύει: $\overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ (1)

Όμως $\overrightarrow{KA} = (5 - 2, -1 - 3) = (3, -4)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - 5, y + 1)$ άρα η (1) γίνεται:

$$\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 3(x - 5) + (-4)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 19 = 0 \text{ (ε)}. \text{ Δηλαδή η εφαπτομένη είναι η ευθεία (ε)}$$

2.B. Εφαπτομένη (ε) κύκλου (c): $x^2 + y^2 = \rho^2$ → με άγνωστο σημείο επαφής

Μέθοδος:

Βήμα 1: Υποθέτουμε το σημείο επαφής έστω $A(x_1, y_1)$, Γράφουμε την εξίσωση

εφαπτομένης (ε): $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ → με αγνώστους τα x_1, y_1

Βήμα 2:

Βρίσκουμε τα x_1, y_1 ως εξής:

(1) → $A(x_1, y_1) \in (c)$, οπότε επαληθεύει την εξίσωσή του

(2) → η εφαπτομένη ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος

Άσκηση-4(Εφαρμογή 1^η σχολικού-σελ. 85-86)

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C : x^2 + y^2 = 5$ που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, και να αποδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

ΛΥΣΗ

Εστω ε_1 μια εφαπτομένη του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο A . Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η ε_1 θα έχει εξίσωση

$$xx_1 + yy_1 = 5 \quad (1)$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$, θα ισχύει

$$3x_1 + y_1 = 5. \quad (2)$$

Ομως, το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο C . Άρα, θα ισχύει

$$x_1^2 + y_1^2 = 5. \quad (3)$$

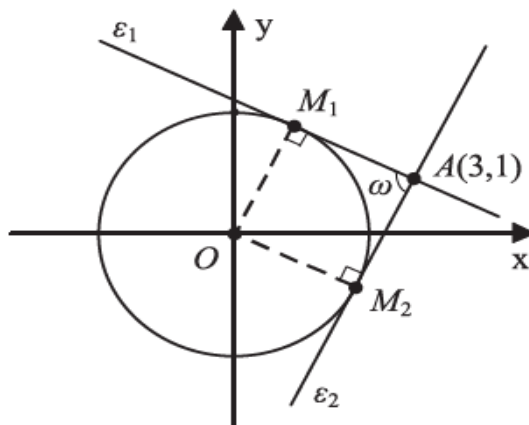
Επομένως, οι συντεταγμένες (x_1, y_1) του M_1 είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων (2) και (3). Λύνουμε το σύστημα αυτό και βρίσκουμε δύο λύσεις:

$$(x_1, y_1) = (1, 2) \quad \text{ή} \quad (x_1, y_1) = (2, -1) \quad (4)$$

Άρα, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του C που διέρχονται από το σημείο $A(3,1)$, οι οποίες, λόγω των (1) και (4), έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : x + 2y = 5, \quad \varepsilon_2 : 2x - y = 5.$$

Επειδή οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2 είναι $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = 2$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.



2Γ. Αν η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από γνωστό σημείο $M(x_M, y_M)$ → όχι σημείο επαφής

Μέθοδος

Βήμα 1: Ελέγχουμε αν για την κατακόρυφη ευθεία $x = x_M$ αν ισχύει $d(K, \varepsilon) = \rho$, οπότε θα είναι μία από τις ζητούμενες εφαπτομένες.

Βήμα 2: Γράφουμε την εξίσωση εφαπτομένης (ε): $y - y_M = \lambda(x - x_M)$ → με άγνωστο μόνο το λ.

1ος τρόπος:

Απαιτούμε $d(K, \varepsilon) = \rho$... και βρίσκουμε το λ και το αντικαθιστούμε στην παραπάνω (ε).

2ος τρόπος:

Απαιτούμε το σύστημα $\begin{cases} (\varepsilon): y - y_M = \lambda(x - x_M) \\ (c): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} (\varepsilon): y - y_M = \lambda(x - x_M) \\ (c): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \end{cases}$... να έχει μία

μόνο λύση → ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ 2-ΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ $\Rightarrow \Delta = 0$ και βρίσκουμε το λ και το αντικαθιστούμε στην παραπάνω (ε).

2.Δ. Αν η εφαπτομένη (ε) έχει γνωστό λ → όχι σημείο επαφής

Μέθοδος

Βήμα 1: Γράφουμε εξίσωση εφαπτομένης (ε): $y = \lambda x + \beta$ → με άγνωστο μόνο β

Βήμα 2:

1ος τρόπος:

- Απαιτούμε $d(K, \varepsilon) = \rho$
- Η εφαπτομένη ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος ... και βρίσκουμε τα λ, β και το αντικαθιστούμε στην παραπάνω (ε).
- Αν $\varepsilon // \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} \dots$
- $\varepsilon \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1 \dots$
- Αν η εφαπτομένη διέρχεται από ένα σημείο τότε οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωσή της και δημιουργούμε εξισώσεις για να βρούμε τους αγνώστους.

2ος τρόπος:

Απαιτούμε το σύστημα $\begin{cases} (\varepsilon): y = \lambda x + \beta \\ (c): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} (\varepsilon): y = \lambda x + \beta \\ (c): x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \end{cases}$... να έχει μία

μόνο λύση → ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ 2-ΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ $\Rightarrow \Delta = 0$ και βρίσκουμε το β και το αντικαθιστούμε στην παραπάνω (ε).

→ ... και πολλές άλλες γεωμετρικές.

Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = 5$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$.

ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

iii) Όταν διέρχεται από το σημείο A(5,0)

Λύση

i.) Στον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ είναι : κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση : $(\varepsilon) \parallel (\zeta) : y = 2x + 3 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 2$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής : $(\varepsilon) : y = 2x + \beta \Leftrightarrow 2x - y + \beta = 0$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα, δηλ.

$$d(0, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + \beta|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \text{ ή } \beta = -5, \text{ άρα :}$$

- Αν $\beta = 5$ τότε : $(\varepsilon_1) : 2x - y + 5 = 0$
- Αν $\beta = -5$ τότε : $(\varepsilon_2) : 2x - y - 5 = 0$

ii.) Στον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ είναι : κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση : $(\varepsilon) \perp (\zeta) : y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1$, όμως

$\lambda_\zeta = \frac{1}{2}$ άρα $\lambda_\varepsilon = -2$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής :

$(\varepsilon) : y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$. Η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα, δηλ.

$$d(0, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-\beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = 5 \text{ ή } \beta = -5, \text{ άρα :}$$

- Αν $\beta = 5$ τότε : $(\varepsilon_1) : 2x + y - 5 = 0$
- Αν $\beta = -5$ τότε : $(\varepsilon_2) : 2x + y + 5 = 0$

iii) Στον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ είναι : κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του κύκλου, τότε από εκφώνηση : η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$. Από το σημείο $A(5,0)$ διέρχονται :

• η κατακόρυφη $(\varepsilon) : x = 5 \Leftrightarrow x - 5 = 0$, για να εφάπτεται η (ε) στον κύκλο πρέπει :

$$d(0, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{5} \text{ αδύνατο.}$$

• Όλες οι ευθείες της μορφής $(\varepsilon) : y - 0 = \lambda(x - 5) \Leftrightarrow \lambda x - y - 5\lambda = 0$. Όμως πρέπει :

$$d(0, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-5\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5|\lambda| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 5(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 5\lambda^2 + 5 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{2} \text{ έχω : } (\varepsilon_1) : \frac{1}{2}x - y - 5\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$$

$$\text{Για } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ έχω : } (\varepsilon_2) : -\frac{1}{2}x - y + 5\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -x - 2y + 5 = 0$$

2. Ε. Κοινές εφαπτομένες 2 κύκλων $(c_1) : (K_1, \rho_1)$ και $(c_2) : (K_2, \rho_2)$

1. Αν εφάπτονται: λύνουμε το σύστημα, βρίσκουμε το σημείο επαφής $M(x_0, y_0)$ και εργαζόμαστε

ως εξής:

- Εξετάζουμε την κατακόρυφη $x = x_0$ αν είναι εφαπτομένη των κύκλων και την δεχόμαστε ή την απορρίπτουμε αναλόγως.
- Χρησιμοποιούμε μία από τις τέσσερις (4) παραπάνω μεθόδους.

2. Αν τέμνονται:

- Θεωρούμε κοινή εφαπτομένη $(\varepsilon) : y = \lambda x + \kappa \rightarrow$ με αγνώστους λ, κ . Πρέπει : $d(K_1, \varepsilon) = \rho_1$, (1) και $d(K_2, \varepsilon) = \rho_2$, (2).

- Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2), βρίσκουμε τα κ, λ και τα αντικαθιστούμε στην (ε) .

⌘ **ΠΡΟΣΟΧΗ!** Με το να βρούμε κοινά σημεία κωνικών τομών – δηλαδή σύστημα και μετά κλασσικά τις εφαπτομένες θα είναι λανθασμένες – εκτός αν τα σημεία είναι επαφής.

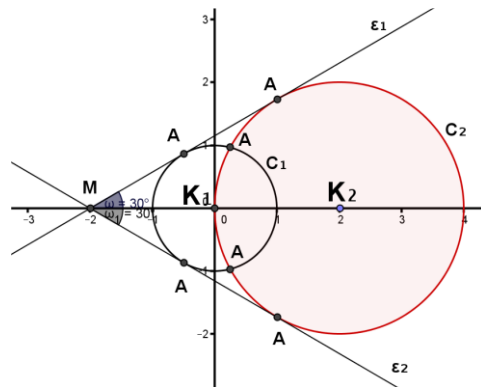
2. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

- (i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;
- (ii) Για ποιες τιμές των λ και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;
- (iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60° .

Λύση

(i) Ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ έχει κέντρο το $K_1(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$, ενώ ο κύκλος $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ έχει κέντρο το $K_2(2,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2$. Επομένως, αν ε είναι η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} d(K_1, \varepsilon) &= \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \\ d(K_2, \varepsilon) &= \frac{|\lambda \cdot 2 - 0 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|2\lambda + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \end{aligned} \quad (1)$$



(ii) Για να εφάπτεται η ε και στους δύο κύκλους πρέπει να αρκεί

$$d(K_1, \varepsilon) = \rho_1 \quad \text{και} \quad d(K_2, \varepsilon) = \rho_2$$

Όμως:

$$\begin{aligned} \begin{cases} d(K_1, \varepsilon) = \rho_1 \\ d(K_2, \varepsilon) = \rho_2 \end{cases} &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{|\beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \\ \frac{|2\lambda + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\beta| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ |2\lambda + \beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |\beta| = \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ |2\lambda + \beta| = |2\beta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 = \lambda^2 + 1 \\ 2\lambda + \beta = 2\beta \quad \text{ή} \quad 2\lambda + \beta = -2\beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 = \lambda^2 + 1 \\ \beta = 2\lambda \quad \text{ή} \quad \beta = -\frac{2\lambda}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = \frac{1}{3} \\ \beta = 2\lambda \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \frac{4\lambda^2}{9} = \lambda^2 + 1 \quad (\text{αδύνατη}) \\ \beta = -\frac{2\lambda}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \beta = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχουν δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 οι:

$$\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(iii) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$. Άρα τέμνονται πάνω στον $x'x$ και, επειδή η ε_1 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 30° (αφού

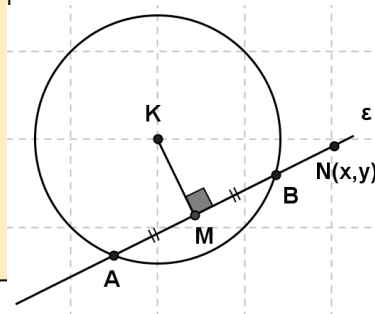
$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$), οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σχηματίζουν γωνία 60° .

3. ΕΥΡΕΣΗ ΧΟΡΔΗΣ ΚΥΚΛΟΥ (c) ΚΕΝΤΡΟΥ K(x₀, y₀)

Μέθοδος

Βήμα 1: Έστω M το μέσο της χορδής AB του κύκλου (c) και N(x, y) τυχαίο σημείο της.

Βήμα 2: Από Γεωμετρία $\overline{KM} \perp \overline{MN} \Rightarrow \overline{KM} \perp \overline{MN} \Leftrightarrow \overline{KM} \cdot \overline{MN} = 0$
 $\overline{MA} \perp \overline{MB} \Rightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$...και βρίσκω απευθείας την εξίσωση της χορδής $AB \equiv (\varepsilon)$.



Άσκηση-7(άσκηση 4-Α'ΟΜΑΔΑΣ σχολ. βιβλίου σελ. 87)

Να βρείτε την εξίσωση χορδής του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = 4$, η οποία έχει μέσο το σημείο M(1, -1).

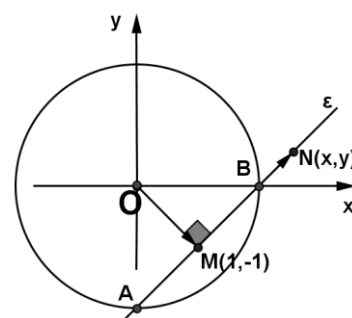
Λύση

Έστω η χορδή AB του κύκλου (c): $x^2 + y^2 = 4$ με κέντρο O και ακτίνα $\rho=2$ και M(1, -1) το μέσο της. Αν N(x, y) τυχαίο σημείο της ευθείας (ε) της AB, τότε:

$$\overrightarrow{OM} = (1, -1), \overrightarrow{MN} = (x-1, y+1) \text{ και}$$

$$\overline{OM} \perp \overline{MN} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Rightarrow$$

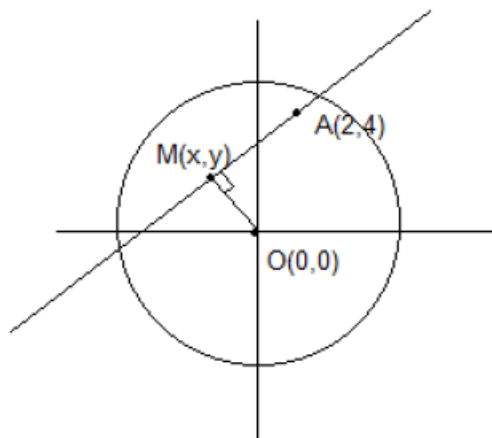
$$(1, -1) \cdot (x-1, y+1) = 0 \Rightarrow x-1-y-1=0 \Rightarrow \boxed{x-y-2=0} \rightarrow (\varepsilon)$$



Άσκηση-8(άσκηση 10-Β'ΟΜΑΔΑΣ σχολ. βιβλίου σελ. 89)

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο A(2, 4).

Λύση :



Έστω M(x, y) ανήκει στον γεωμετρικό τόπο που ψάχνω δηλαδή είναι μέσο χορδής κύκλου που διέρχεται από το σημείο A, τότε θα ισχύει : $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

(1) Όμως $\overrightarrow{OM} = (x-0, y-0) = (x, y)$ και $\overrightarrow{MA} = (2-x, 4-y)$ άρα η (1) γίνεται :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Leftrightarrow x(2-x) + y(4-y) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 + 4y - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K(1, 2)$

$$\text{και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4+16}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

4. ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ(Γ.Τ.)

Άσκηση-9

Να βρείτε τον γ.τ. των μέσων $M(x,y)$ των χορδών του κύκλου $(c): x^2+y^2=16$, που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{u}=(1,2)$

Λύση

Έστω $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τα άκρα της χορδής AB του κύκλου $(c): x^2+y^2=16$ με κέντρο O και ακτίνα $\rho=4$. Είναι:

$$\Rightarrow AB \perp \vec{u}(1,2) \Rightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{\vec{u}} = 2 \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2 \quad (1)$$

$$M \text{ μέσο της } AB \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x_1 + x_2 \\ 2y = y_1 + y_2 \end{cases} \quad (2)$$

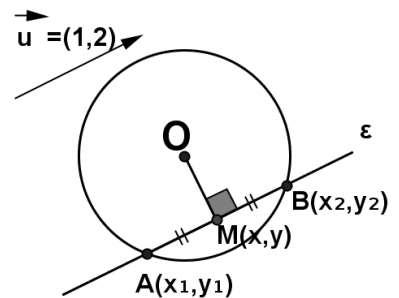
$$\Rightarrow A(x_1,y_1) \in (c) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 16 \quad (3)$$

$$\Rightarrow B(x_2,y_2) \in (c) \Leftrightarrow x_2^2 + y_2^2 = 16 \quad (4)$$

➤ Αφαιρώ κατά μέλη (3)-(4) και έχω:

$$(x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 - y_2^2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} 2 = \frac{2x}{2y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x} \rightarrow \text{Ο γ.τ. είναι ευθεία}$$



5. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ -

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΥΚΛΩΝ: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

Άσκηση-10

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + 1 = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου και στη συνέχεια να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
- ii. Για τις παραπάνω τιμές του λ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου του κύκλου.
- iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το κέντρο του παραπάνω κύκλου ανήκει στην ευθεία $(\zeta): 2x - 4y + 1 = 0$

Λύση

i. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + 1 = 0$ έχει: $A = \lambda, B = \lambda + 2, \Gamma = 1$

$$\text{Είναι } A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + (\lambda + 2)^2 - 4 = \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 4 = 2\lambda^2 + 4\lambda$$

Πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 4\lambda > 0$, έχω

$$2\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2, \text{ άρα:}$$

λ	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$2\lambda^2 + 4\lambda$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα για κάθε $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \rightarrow K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda+2}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda}}{2}$$

ii. Έστω $K(x, y)$ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του κέντρου του παραπάνω κύκλου, τότε

$$\text{θα ισχύει: } \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda+2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x, (1) \\ \lambda + 2 = -2y, (2) \end{cases} \text{ η (2) λόγω της (1) γίνεται}$$

$$-2x + 2 = -2y \Leftrightarrow -x + 1 = -y \Leftrightarrow x - y - 1 = 0. \text{ Άρα τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν στην ευθεία } (\varepsilon): x - y - 1 = 0.$$

iii. Το κέντρο $K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda+2}{2}\right)$ ανήκει στην ευθεία $(\zeta): 2x - 4y + 1 = 0$, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της δηλ.

$$(\zeta): 2\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - 4\left(-\frac{\lambda+2}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 2(\lambda + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 2\lambda + 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5.$$

6. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ**➤ (ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΣΗΜΕΙΟ ΜΕ ΚΥΚΛΟ)**

Έστω ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ τότε :

- Ένα σημείο A ανήκει στον κύκλο αν-ν $(KA)=\rho$
- Ένα σημείο B είναι εσωτερικό του κύκλου αν-ν $(KB)<\rho$
- Ένα σημείο Γ είναι εξωτερικό του κύκλου αν-ν $(K\Gamma)>\rho$

➤ (ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ)

Έστω ένας κύκλος με κέντρο K και ακτίνα ρ και (ε) μια ευθεία τότε :

- Η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο αν-ν $d(K, \varepsilon) > \rho$
- Η ευθεία ε έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο (εφάπτεται στον κύκλο) αν-ν $d(K, \varepsilon) = \rho$
- Η ευθεία έχει δυο διαφορετικά κοινά σημεία με τον κύκλο (τον τέμνει) αν-ν $d(K, \varepsilon) < \rho$.

➤ (ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ)

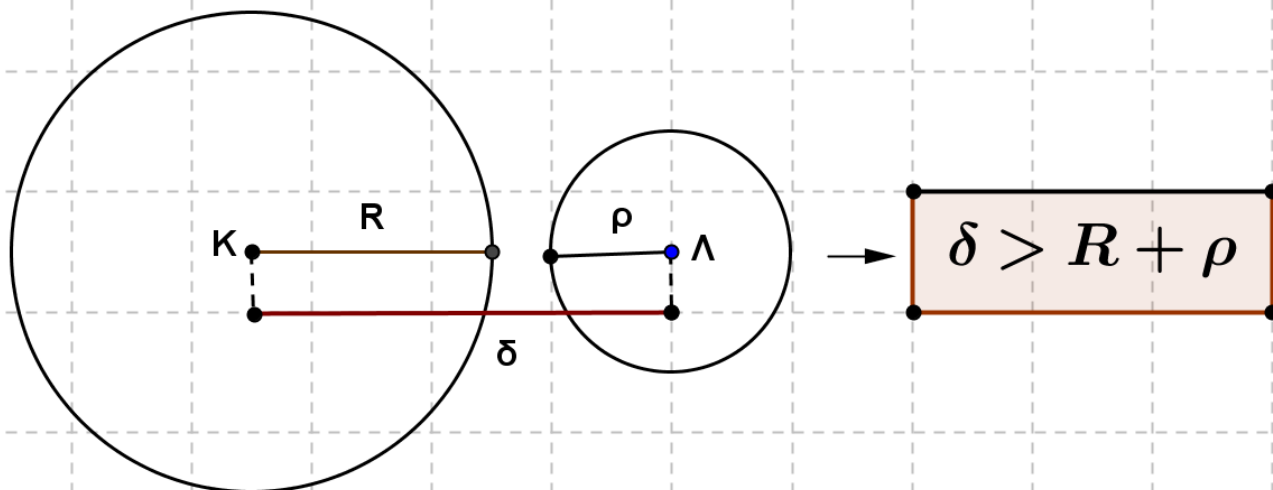
Έστω C_1 και C_2 δυο κύκλοι με κέντρα K, Λ και ακτίνες ρ_1, ρ_2 αντίστοιχα.

- Οι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά, αν-ν $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2$
- Οι C_1 και C_2 εφάπτονται εσωτερικά, αν-ν $(K\Lambda) = |\rho_1 - \rho_2|$
- Οι C_1 και C_2 τέμνονται αν-ν $|\rho_1 - \rho_2| < (K\Lambda) < \rho_1 + \rho_2$
- Ο ένας από τους κύκλους είναι εξωτερικός του άλλου, αν-ν $(K\Lambda) > \rho_1 + \rho_2$
- Ο ένας από τους κύκλους είναι εσωτερικός του άλλου, αν-ν $(K\Lambda) < |\rho_1 - \rho_2|$

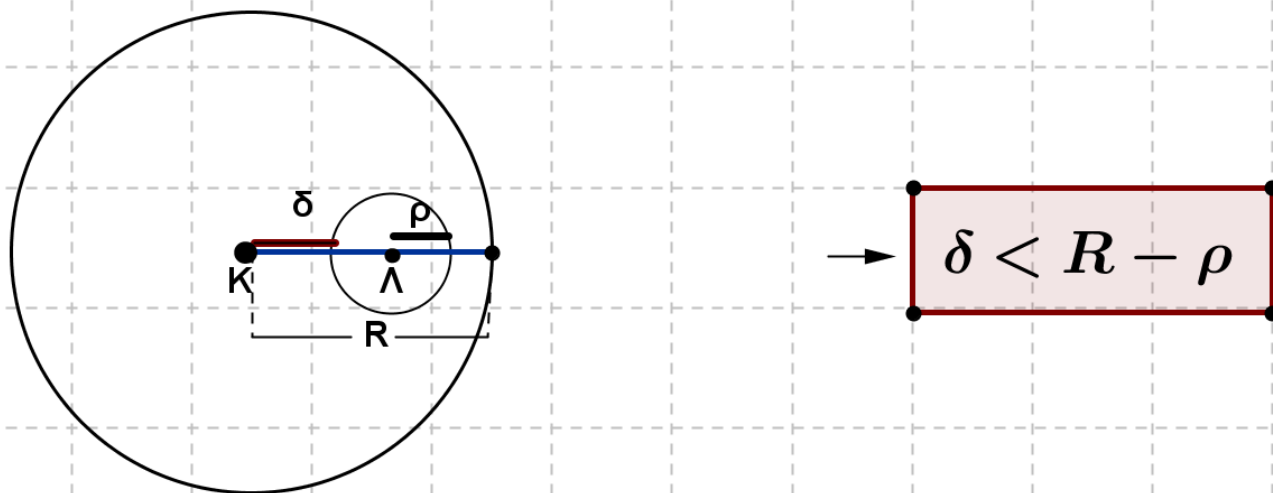
Έστω δύο κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) και $\delta = K\Lambda = \text{διάκεντρος}$, τότε:

1. ΚΥΚΛΟΙ ΧΩΡΙΣ ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ

1Α. Ο ΕΝΑΣ ΚΥΚΛΟΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΣ ΤΟΥ ΑΛΛΟΥ

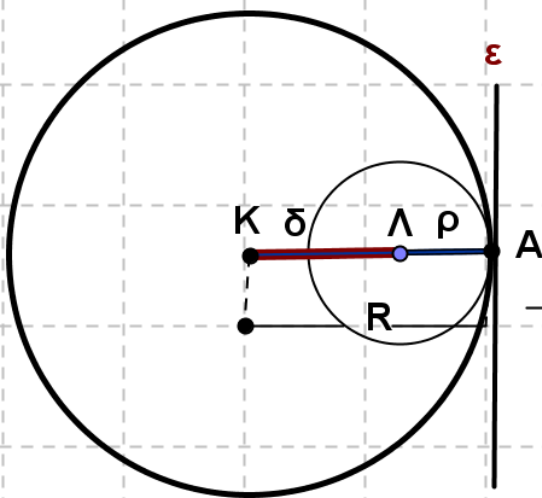


1Β. Ο ΕΝΑΣ ΚΥΚΛΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΣ ΤΟΥ ΑΛΛΟΥ



2. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΙ ΚΥΚΛΟΙ (1 ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ)

2Α. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ



1)

Σημείο επαφής
= το κοινό σημείο Α
των δύο εφαπτόμενων κύκλων

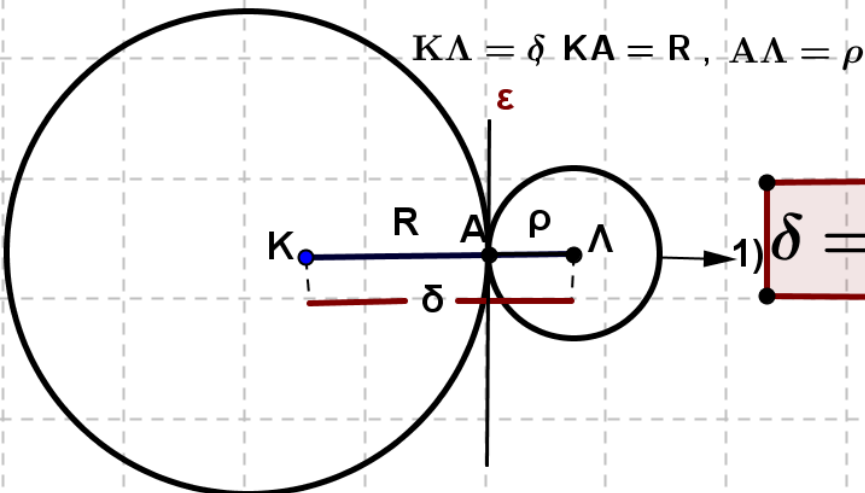
2)

$$\delta = R - \rho$$

3)

Η κοινή τους
εφαπτομένη $\varepsilon \perp KA$

2Β. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΑ



$$K\Lambda = \delta, KA = R, A\Lambda = \rho$$

1) $\delta = R + \rho$

2)

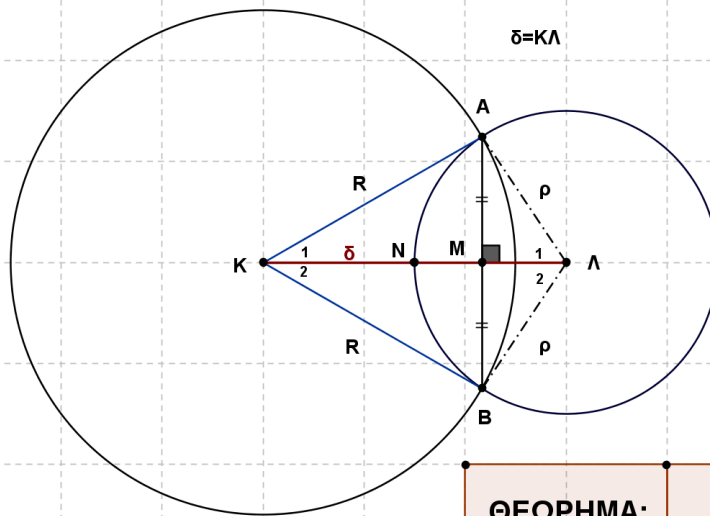
Σημείο επαφής = το κοινό σημείο Α
των δύο εφαπτόμενων κύκλων

3)

Η κοινή τους εφαπτομένη $\varepsilon \perp KA$

3.

ΤΕΜΝΟΜΕΝΟΙ ΚΥΚΛΟΙ (2 ΚΟΙΝΑ ΣΗΜΕΙΑ)



1)

2 κοινά σημεία τα A και B με
AB=κοινή χορδή

2)

$$R - \rho < \delta < R + \rho$$

3)

- Η διάκεντρος δ διχοτομεί το τόξο AB,
δηλαδή τοξ.NA=τοξ.NB
- Η διάκεντρος δ διχοτομεί τη γωνία K
- Η διάκεντρος δ διχοτομεί τη γωνία Λ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Η διάκεντρος δ δύο τεμνόμενων κύκλων
είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

(ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

7. Μέγιστες και ελάχιστες αποστάσεις

1. ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ

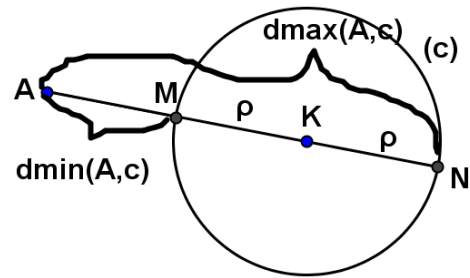
Έστω σημείο A εκτός κυκλού $(c): (K, \rho)$ τότε:

- Ελάχιστη απόσταση του A από τον κύκλο:

$$d_{\min}(A, c) = (AM) = |(AK) - (MK)| = |(AK) - \rho|.$$

- Μέγιστη απόσταση του A από τον κύκλο:

$$d_{\max}(A, c) = (AN) = (AK) + (KN) = (AK) + \rho.$$



2. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ

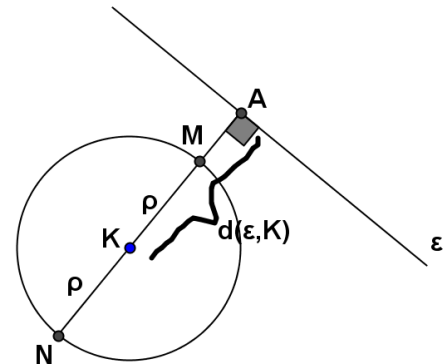
Έστω ευθεία (ε) και κύκλος $(c): (K, \rho)$ τότε:

- Ελάχιστη απόσταση της ευθείας (ε) από τον κύκλο:

$$d_{\min}(\varepsilon, c) = (AM) = |d(\varepsilon, K) - (KM)| = |d(\varepsilon, K) - \rho|.$$

- Μέγιστη απόσταση της ευθείας (ε) από τον κύκλο:

$$d_{\max}(\varepsilon, c) = (AN) = d(\varepsilon, K) + (KN) = d(\varepsilon, K) + \rho.$$



3. ΔΥΟ ΚΥΚΛΟΙ

Έστω δύο κύκλοι $(c_1) (K, \rho_1)$ και $(c_2) (\Lambda, \rho_2)$ ο ένας εξωτερικός του άλλου τότε:

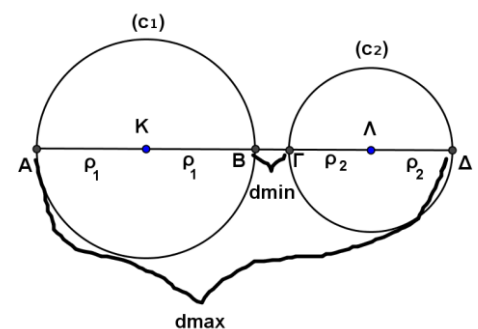
- Ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του (c_1) από ένα σημείο του (c_2) :

$$d_{\min}(c_1, c_2) = (B\Gamma) = (K\Lambda) - (KB) - (\Lambda\Gamma) = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2.$$

- Μέγιστη απόσταση ενός σημείου του (c_1) από ένα σημείο του (c_2) :

$$d_{\max}(c_1, c_2) = (A\Delta) = (K\Lambda) + (KA) + (\Lambda\Delta) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2.$$

- Όμοια και για τις άλλες σχετικές θέσεις των δύο κύκλων.



...ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ1/ ΘΕΜΑ 4-22069

Τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(6, 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο K του οποίου διέρχεται η ευθεία $\epsilon: y = 2x - 7$. Να βρείτε:

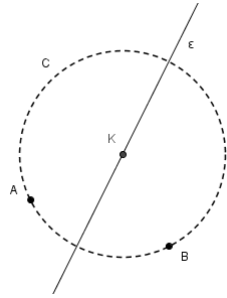
α) τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου C .

(Μονάδες 12)

β) την ακτίνα R του κύκλου C .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση του κύκλου C .



ΑΣΚΗΣΗ2/ ΘΕΜΑ 4-22066

Θεωρούμε το σημείο $A = (\cos\theta, \sin\theta)$ και το σημείο $B = (\sin\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sin\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

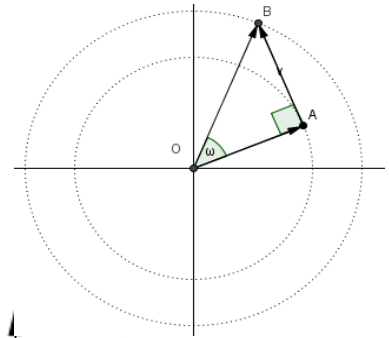
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι: $\vec{OA} \perp \vec{AB}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ3/ ΘΕΜΑ 4-22061

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος πλευράς a ($a > 0$) και κορυφές $A(0, a)$, $B(0,0)$, $\Gamma(a, 0)$ και $\Delta(a, a)$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ και το τμήμα BN είναι κάθετο στο τμήμα AM , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. AM

ii. BN

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N .

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο N ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με a . Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.

ΑΣΚΗΣΗ4/ ΘΕΜΑ 4-22062

Δίνεται η οικογένεια κύκλων $C_\lambda: (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$, με $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου C_λ , $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ , $\lambda \neq 0$. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$.

(Μονάδες 5)

δ) Έστω $a \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = a$ εφάπτεται σε ένα, και μόνο ένα, από τους κύκλους C_λ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = a$.

(Μονάδες 5)

ε) Έστω $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $ax + \beta y = 1$ εφάπτεται σε δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ .

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ5/ ΘΕΜΑ 4-21696

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, (1) και η ευθεία $\epsilon: x - 2y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ϵ έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C .

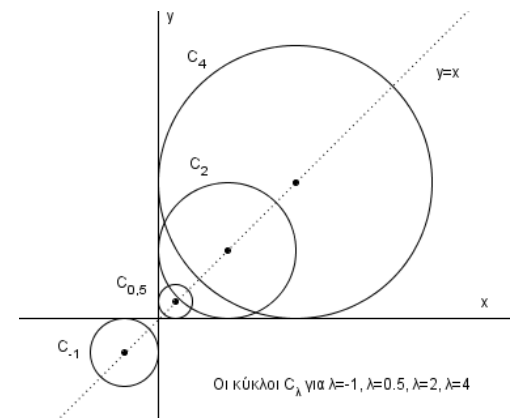
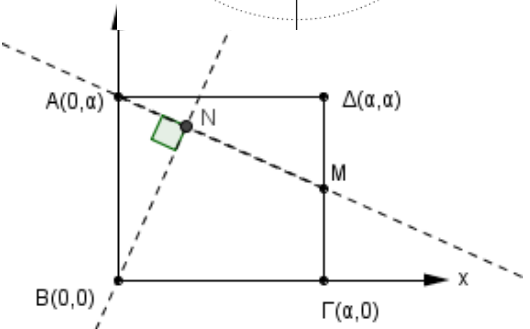
(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ϵ .

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $d(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

(Μονάδες 8)



Οι κύκλοι C_λ για $\lambda = -1, \lambda = 0.5, \lambda = 2, \lambda = 4$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1, y_1)$, $0 < x_1 < 2$ ανάμεσα στα A, B.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο M και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της K, Λ με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος ΚΛ είναι $d = \frac{8}{x_1 y_1}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το μήκος d_0 του τμήματος ΚΛ όταν $x_1 = \sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το M κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d \geq d_0$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ7/ ΘΕΜΑ 4-20863

Δίνονται τα σημεία A(1,0) και B(3,0).

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 07)

β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B, συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο A(1,0).

(Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ8/ ΘΕΜΑ 4-20700

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4)$, $M_1(4,0)$, $M_2(0,4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C.

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ9/ ΘΕΜΑ 4-22508

Οι κορυφές A, Γ ενός τετραγώνου ABΓΔ είναι τα σημεία (1, 4) και (3, 0) αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκάθετου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ γράφεται στη μορφή $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B, Δ του τετραγώνου.

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ10/ ΘΕΜΑ 2-18749

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο ABΓ ώστε A(5, 6), B(1, 2), Γ(12, 2) και το ύψος του ΑΔ, όπου Δ σημείο της ΒΓ, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΑΔ.

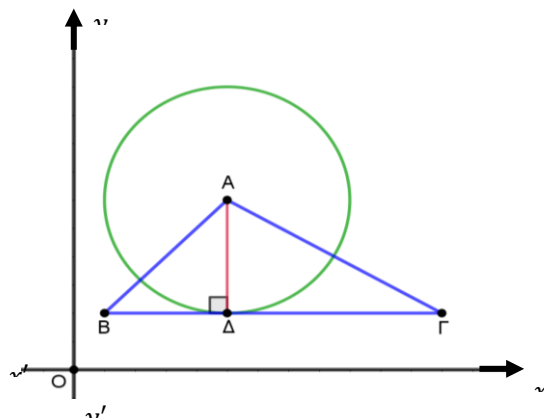
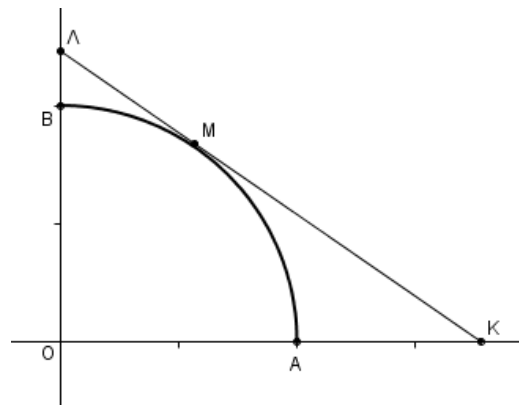
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A, ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ΒΓ στο σημείο Δ.

(Μονάδες 10)



ΑΣΚΗΣΗ11/ ΘΕΜΑ 4-22239

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy η εξίσωση $3x+4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

- α)
- i) Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού; (Μονάδες 04)
 - ii) Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)
 - iii) Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 08)
- β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ12/ ΘΕΜΑ 4-22223

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.

Να υπολογίσετε το λ . (Μονάδες 0 ΘΕΜΑ 4-22214)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

I. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 08)

II. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ (Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ13/ ΘΕΜΑ 2-22172

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A . (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 07)

ΑΣΚΗΣΗ14/ ΘΕΜΑ 4-22280

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (Μονάδες 08)

γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N . (Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ15/ ΘΕΜΑ 2-22279

Δίνεται η εξίσωση $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R) . (Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία (ε): $x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R) .

ΑΣΚΗΣΗ16/ ΘΕΜΑ 4 -22264

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ17/ ΘΕΜΑ 4-22159

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB , για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB , για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ18/ ΘΕΜΑ 2-22147

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)
 β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ είναι σημείο του κύκλου (K, R) . (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K, R) στο A . (Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ19/ ΘΕΜΑ 2-21962

Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(1,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε το μέσο K της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ . (Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ20/ ΘΕΜΑ 4-21349

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ϵ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

- α)
 i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) . (Μονάδες 5)
 ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ϵ) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)
 iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) . (Μονάδες 5)

β) Αν είναι $A(1,2)$ και $B(4,-2)$, τότε:

- i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. (Μονάδες 5)
 ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O . (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ21/ ΘΕΜΑ 4-21276

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-1,3)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 . (Μονάδες 10)
 β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)
 γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 . (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ22/ ΘΕΜΑ 4-18416

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4)$ (1).

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. (Μονάδες 6)
 β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.
 i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)
 ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB . (Μονάδες 9)
 γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ23/ ΘΕΜΑ 4-21154

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4ay = 0$ (1) όπου a είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
- β) Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του a . (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του a του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του a ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x' .

(Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ24/ ΘΕΜΑ 2-20890

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3,-3)$, $B(2,-8)$ και $\Gamma(7,-3)$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 10)
- β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ25/ ΘΕΜΑ 4-20091

Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K . Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M .

- α) Να βρείτε:
- i) Τις συντεταγμένες του σημείου M . (Μονάδες 04)
- ii) Την εξίσωση της ευθείας KM . (Μονάδες 08)
- β) Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ) : $x+y = -12$, τότε:
- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K . (Μονάδες 07)
- ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 06)

ΑΣΚΗΣΗ26/ ΘΕΜΑ 4-15189

Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB . (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y+1)^2 = 5$. (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$. (Μονάδες 7)
- δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C . (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ27/ ΘΕΜΑ 4-20229

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)
- δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ28/ ΘΕΜΑ 4-18415

Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2 + (y+2\lambda)^2 = 1$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε . (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε . (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

ΑΣΚΗΣΗ29/ ΘΕΜΑ 4-18237

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

- α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 7)
- γ) Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$. Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη που ισαπέχει από τα A, B . (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ30/ ΘΕΜΑ 2-19039

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3) + (y+1)(y-3) = -4$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R=2$.

(Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 .

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ31/ ΘΕΜΑ 4-18569

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$. Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες OX και OX' αντίστοιχα, τότε:

α) i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι A(1,0) και A'(-1,0).

(Μονάδες 05)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 150° .

(Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B, να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία A' και B.

(Μονάδες 06)

ΑΣΚΗΣΗ32/ ΘΕΜΑ 2-18239

Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x-3y+5=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ33/ ΘΕΜΑ 4-15082

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$ και $C_2: (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (KL), όπου K, L τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολουθώντας να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας KL.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας KL με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

(Μονάδες 8)

ΑΣΚΗΣΗ34/ ΘΕΜΑ 4-15826

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda+1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ.

(Μονάδες 7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;

(Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ .

Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

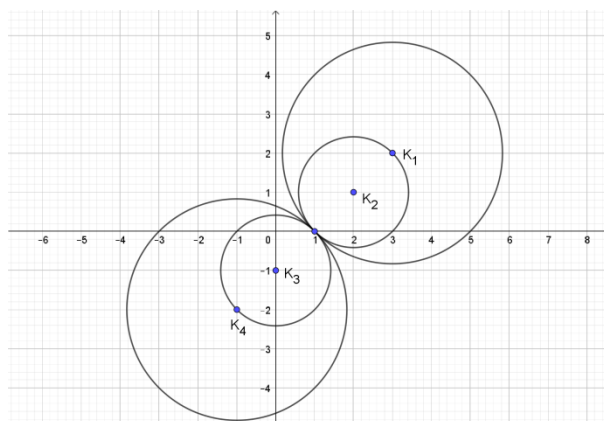
(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ35/ ΘΕΜΑ 2-17317

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}$.

(Μονάδες 13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ36/ ΘΕΜΑ 4-15993

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ37/ ΘΕΜΑ 4 -15646

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $\hat{xOy}$ του συστήματος συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2} \tau.μ.$

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ38/ ΘΕΜΑ 4-15080

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2).

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου $(K\Lambda)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ39/ ΘΕΜΑ2-15680

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ40/ ΘΕΜΑ 4-14954

Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

(Μονάδες 9)

α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

(Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο A .

(Μονάδες 09)

ii) Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 08)

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

(Μονάδες 8)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0(I)$, όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 8)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0 (1)$ με $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

δ) Για $k = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

(Μονάδες 8)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

(Μονάδες 12)

Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.

(Μονάδες 6)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0, -5)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

Μονάδες 12

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ48/ ΘΕΜΑ2-22508. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο που διέρχεται από το σημείο και έχει κέντρο το Κ (4,8) .

α) Να αποδείξετε ότι $C : (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Ο και Κ .

Μονάδες 13

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2-22533. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(x, y), Β(3, 2) και Γ(1, 0) . Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτεινούσα τη ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το Α κινείται στον κύκλο $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι και ισοσκελές.

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ49/ ΘΕΜΑ 2-22534. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Κ(2, - 1) και Α(-6, 5) .

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Κ που διέρχεται από το Α, έχει εξίσωση $C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο Α και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C.

Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ50/ 2.22536

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(1, 0), Β(3, - 2) και την ευθεία

ε : $x + y + 1 = 0$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος ΑΒ.

Μονάδες 10

β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και έχει το κέντρο του στην ευθεία

Μονάδες 15

ΑΣΚΗΣΗ51/ 4.22557. Έστω η εξίσωση: $(x-\lambda+6)^2 + (y-2\lambda)^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda = 2$ και τι όταν $\lambda = 6$;

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy παριστάνει κύκλο

Μονάδες 8

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6) , να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του.

Μονάδες 9

ΑΣΚΗΣΗ52/ 4.22558. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του ΑΒ με

$A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$;

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν(κ,λ) για τα οποία ισχύει $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = 5$ είναι ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = 9$

Μονάδες 12

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Μονάδες 8

ΑΣΚΗΣΗ53/ 4.22581. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x'x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 7

γ) Το σημείο Μ(2, - 1) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία Α, Β ώστε η χορδή ΑΒ του κύκλου να έχει μέσο το Μ.

Μονάδες 10

ΑΣΚΗΣΗ54/ 4.22584. Δίνονται οι εξισώσεις $(x+y-1)(x+y+1) = 2xy$ (1) και $(\lambda-1)x + (2\lambda+3)y + 2\lambda-5 = 0$ (2) $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

γ) Έστω Α και Β τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία ΑΒ να προκύπτει από την εξίσωση (2).

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ55/ 4.22586. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α , ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Μονάδες 10
- β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο A διαφορετικό από το O .
- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του A συναρτήσει του λ . Μονάδες 10
- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το O . Μονάδες 5

ΑΣΚΗΣΗ56/ 4.22587. Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-25, 0)$ και $B(-1, 0)$ για τα οποία ισχύει $|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}|$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 25$. Μονάδες 10
- β) Θεωρούμε το σημείο $\Sigma(7, 1)$.
- i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C . Μονάδες 5
- ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες. Μονάδες 10

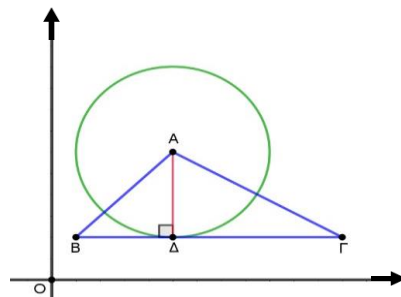
ΑΣΚΗΣΗ57/ 4.22589. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$ ώστε να ισχύει

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 3\overline{AM} \cdot \overline{BM}$$

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 20$ Μονάδες 10
- β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$
- i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O , είναι συνευθειακά. Μονάδες 10
- ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta}$ όταν το M κινείται στον κύκλο. Μονάδες 5

ΑΣΚΗΣΗ58/ 4.22590. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ , με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$. Μονάδες 12
- β) Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.
- i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά. Μονάδες 6
- ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων. Μονάδες 7



ΑΣΚΗΣΗ59/ 4-18521. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ και $\Gamma(3, 1)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ .
- γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 60. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ και $C_2: 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

- A. Δείξτε ότι έχουν το ίδιο εμβαδόν
 B. Δείξτε ότι τέμνονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους χορδής
 Γ. Βρείτε το μήκος της κοινής τους χορδής
 Δ. Βρείτε την γωνία των εφαπτομένων των δύο κύκλων στα σημεία τομής.

ΑΣΚΗΣΗ 61. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

- A. Δείξτε ότι τέμνονται
 B. Δείξτε ότι η εξίσωση $(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4) + \lambda(x^2 + y^2 - 6x + 5) = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq -1$, που διέρχεται από δυο σταθερά σημεία. Τι παριστάνει η (1) για $\lambda = -1$;
 Γ. Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων της (1).

ΑΣΚΗΣΗ 62. Δίνονται οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 με εξισώσεις $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$ αντιστοίχως και οι προτάσεις:

- (I) το σημείο A (2, 3) είναι εξωτερικό του C_1
 (II) το σημείο A (2, 3) είναι εξωτερικό του C_2
 (III) το σημείο A (2, 3) είναι εσωτερικό του C_3 , τότε αληθεύουν:
 Α. I και II Β. II και III Γ. I και III Δ. II Ε. καμία.

ΑΣΚΗΣΗ 63. Θεωρούμε τις εξισώσεις $c_1 : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ και $c_2 : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

- Α. Να βρείτε τα κέντρα, τις ακτίνες και τις σχετικές θέσεις των δύο κύκλων.
 Β. Αν $M \in c_1$ και $N \in c_2$, να βρεθεί το $|MN|_{\min}$ και το $|MN|_{\max}$.
 Γ. Αν $P \in (c_1) : x - y + 5 = 0$ και $M \in c_1$, να βρεθεί το $|MP|_{\min}$
 Δ. Αν $K(x_1, y_1) \in (c_1)$ και $L(x_2, y_2) \in (c_2)$, Να δείχτεί ότι $-1 \leq \frac{y_1 y_2 - x_1 x_2 + 1}{9} \leq 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 64. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 5 + \lambda(2x - y - 5) = 0$ (1), να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ με $\lambda \neq -2$ και να βρεθεί τι παριστάνει η (1) για $\lambda = -2$.
 β) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια σταθερή ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.
 γ) Οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο Α το οποίο να βρεθεί.
 δ) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης των κύκλων της (1) στο σταθερό σημείο Α του γ.ερωτήματος.
 ε) Έστω (C_0) ο κύκλος που προκύπτει για $\lambda=0$ από την εξίσωση (1). Να βρείτε τον γ.τ. των

μέσων των χορδών του (C_0) που είναι κάθετες στο διάνυσμα $\vec{u} = (-2, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 65. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.
 Β. Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του λ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$.
 Γ. Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι ο κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες x' και y' σε σημεία Α και Β αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή Ο, ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να είναι ισοσκελές.
 Δ. Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1).

ΑΣΚΗΣΗ 66. Δίνεται η γραμμή $C_\mu : x^2 + y^2 + \mu x - \mu y - 2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$

- Α. Δείξτε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ η C_μ παριστάνει κύκλο
 Β. Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η χορδή που ορίζει η ευθεία (ε): $\psi = x+1$ στον κύκλο C_μ να φαίνεται από την αρχή των αξόνων με ορθή γωνία.
 Γ. Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων;

ΑΣΚΗΣΗ 67. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2(\lambda+2)y + 4\lambda + 4 = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \neq 0$, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο. Τι συμβαίνει αν $\lambda=0$;
 Β. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του λ το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων.
 Γ. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α το οποίο και να προσδιορίσετε.
 Δ. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των παραπάνω κύκλων στο σημείο Α.

ΑΣΚΗΣΗ 68. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + \lambda^2 - 16 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, και να βρεθεί το κέντρο του Κ και η ακτίνα του ρ.
 Β. Να βρείτε το γ. τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Γ. Έστω (C_1) ο κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (1) για $\lambda=0$.
 Γ.1. Να αποδείξετε ότι ο (C_1) εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου $(C_2) : (x+2)^2 + y^2 = 4$.
 Γ.2. Βρείτε το σημείο επαφής Α καθώς και την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.
 Γ.3. Αν $B(\alpha, \beta)$ τυχαίο σημείο του κύκλου (C_1) διαφορετικό του Α, να δείξετε ότι ο κύκλος (C_2) διχοτομεί την χορδή ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΗ 69. Δίνεται η εξίσωση (c): $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4y + 2\lambda = 0$, (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η εξίσωση ευθείας

$$(\varepsilon): y = x - 2 - \lambda \quad (2), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (c) παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ και να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K καθώς και την ακτίνα του ρ σε συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

B. Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ε) ως προς το κύκλο (c).

Γ. Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία A και B και ισχύει $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{3}$, να βρείτε τη τιμή του λ .

Δ. Για $\lambda=1$ να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων $O(0,0)$ από τον παραπάνω κύκλο (c).

ΑΣΚΗΣΗ 70. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Αν για $\lambda=1$ προκύπτει από την (1) ο κύκλος C_1 και για $\lambda=2$ προκύπτει ο κύκλος C_2 , να βρείτε τα κοινά σημεία των κύκλων C_1 και C_2 .

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία

δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής όλων των κύκλων C_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 71. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 = 2\lambda(3x - y)$, (1) με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ του οποίου να βρείτε το κέντρο K και ακτίνα ρ .

B. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) εφάπτεται της ευθείας (ε): $y = 3x$.

Δ. Αν το ευθύγραμμο τμήμα OA είναι διάμετρος του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1) με μήκος $2\sqrt{10}$ και $\lambda > 0$ να υπολογίσετε την τιμή του λ και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A.

3.2. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Δραστηριότητα:

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από την ευθεία $(\delta): y = -1$ και το σημείο $E(0,1)$

Λύση

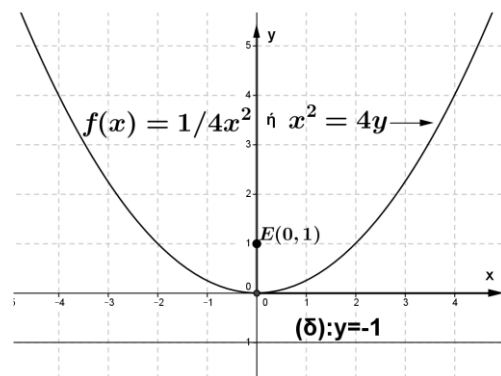
Είναι $(\delta): y = -1 \Leftrightarrow (\delta): 0x + y + 1 = 0, M(x,y)$ και $E(0,1)$.

$$d(M, \delta) = (ME) \Leftrightarrow \frac{|0x + y + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x^2} \rightarrow \text{ο γ.τ. είναι}$$

παραβολή με :

- **κορυφή** την αρχή αξόνων $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- **Εστία:** το σταθερό σημείο $E(0,1)$ ΚΑΙ
- **διευθετούσα** την ευθεία $(\delta): y = -1$



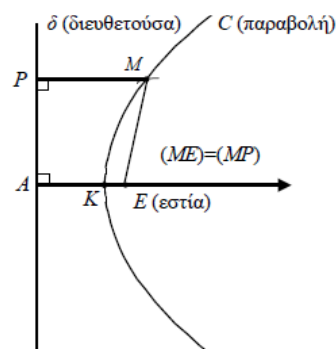
Ορισμός

Παραβολή με εστία ένα σταθερό σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ονομάζεται γεωμετρικός τόπος C των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την E και τη δ (Σχήμα). Δηλαδή $d(M, \delta) = (ME)$.

Αν A είναι η προβολή της εστίας E στη διευθετούσα δ , τότε το μέσο K του EA είναι προφανώς σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.

Παρατήρηση:

Εμείς θα ασχοληθούμε με παραβολές που θα έχουν **κορυφή** την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

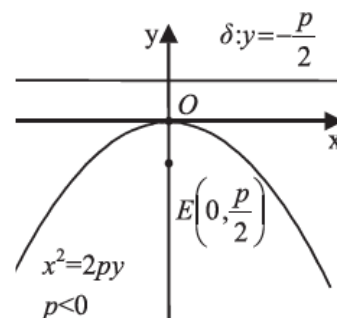
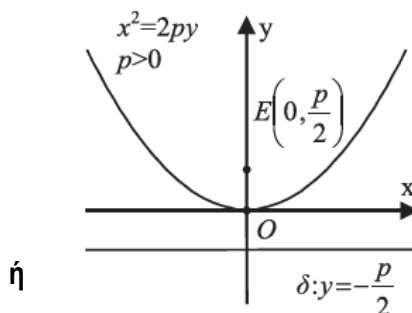


1^η ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΚΟΡΥΦΗ $O(0,0)$ και εστία E πάνω στον $y'y$:

Α. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

$C: \boxed{x^2 = 2py}$ (1), με p και y είναι ομόσημοι και $y \neq 0$

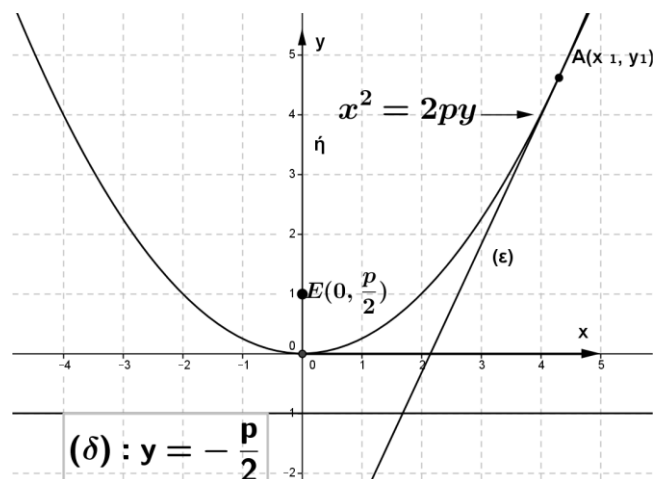
- **Κορυφή** $\rightarrow O(0,0)$
- **Εστία** $\rightarrow E\left(0, \frac{p}{2}\right)$
- **p** : παράμετρος της παραβολής και εκφράζει την απόσταση $p = d(E, \delta)$
- **Διευθετούσα** $\rightarrow (\delta): y = -\frac{p}{2}$



Β. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

$$(\varepsilon): \boxed{xx_1 = p(y + y_1)} \quad (1\varepsilon), \text{ (άγνωστοι } x_1, y_1, p)$$

με $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

**2η ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΚΟΡΥΦΗ $O(0,0)$ και εστία E πάνω στον $x'x$:****Α. ΠΑΡΑΒΟΛΗ**

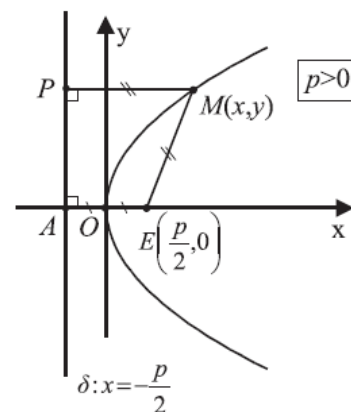
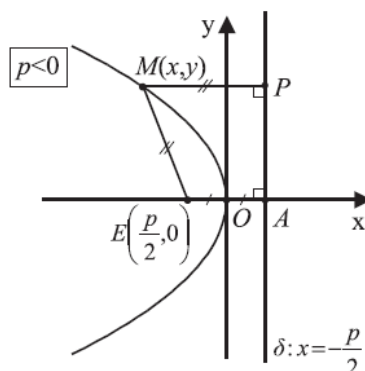
$$C: \boxed{y^2 = 2px} \quad (2), \text{ με } p \text{ και } x \text{ είναι ομόσημοι και } x \neq 0$$

➤ **Κορυφή** → $O(0,0)$

➤ **Εστία** → $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

ή

➤ **Διευθετούσα** → $x = -\frac{p}{2}$

**ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ**

$$(\varepsilon): \boxed{yy_1 = p(x + x_1)} \quad (2\varepsilon), \text{ με } A(x_1, y_1) \text{ το σημείο επαφής.}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Έστω μια παραβολή $C: \boxed{y^2 = 2px} \quad (1)$.

1. Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα p και x (με $x \neq 0$) είναι ομόσημα.

Άρα, κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E .

Όμοια και για την $C: \boxed{x^2 = 2py}$

2. Αν το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν $y_1^2 = 2px_1$

τότε και το σημείο $M'(x_1, -y_1)$ θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού $(-y_1)^2 = 2px_1$. Άρα: → άξονας $x'x$

είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $C: \boxed{y^2 = 2px}$, αντίστοιχα για την $C: \boxed{x^2 = 2py}$ είναι ο άξονας $y'y$.

Όμοια και για την $C: \boxed{x^2 = 2py}$

3. Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

Μια σπουδαία ιδιότητα της παραβολής, γνωστή ως ανακλαστική ιδιότητα είναι η εξής:

Η κάθετη ημιευθεία $M\eta$ στην εφαπτομένη ε μιας παραβολής στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία ME και η ημιευθεία Mt , που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.

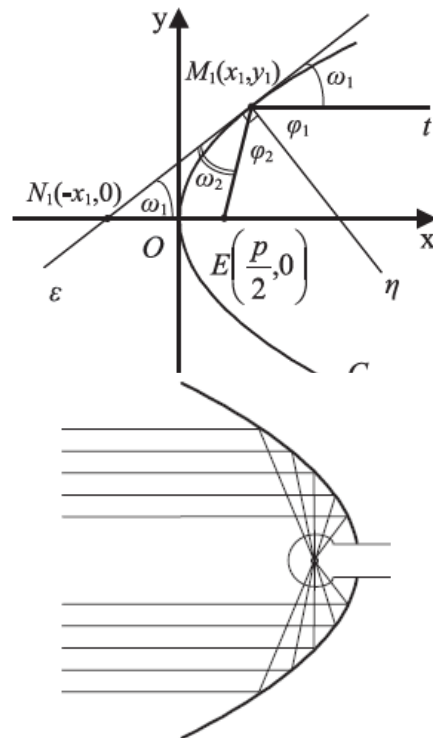
(χωρίς απόδειξη)

Χρήση της παραπάνω ιδιότητας

- A. Η γίνεται στα παραβολικά τηλεσκόπια,
- B. στα ραντάρ,
- Γ. στα φανάρια των αυτοκινήτων,
- Δ. στους προβολείς των οδοντιάτρων κτλ.

Συγκεκριμένα:

- Όλες οι ακτίνες φωτός που προσπίπτουν στο παραβολικό κάτοπτρο παράλληλα προς τον άξονά του, ανακλώμενες, συγκεντρώνονται στην εστία.
- Στα φανάρια των αυτοκινήτων που έχουν παραβολικά κάτοπτρα οι λαμπτήρες βρίσκονται στην εστία τους. Έτσι, οι φωτεινές ακτίνες, ανακλώμενες στο κάτοπτρο, εξέρχονται παράλληλα προς τον άξονά του.



ΕΥΡΕΣΗ ΕΙΣΩΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

A. Εφαπτομένη (ε) με γνωστό το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$

ΜΕΘΟΔΟΣ: Αντικαθιστούμε στους τύπους

$$(\varepsilon): \boxed{xx_1 = p(y + y_1)} \quad \text{για την } C: \boxed{x^2 = 2py} \quad \text{ή}$$

$$(\varepsilon): \boxed{yy_1 = p(x + x_1)}, \quad \text{για την } C: \boxed{y^2 = 2px}$$

B. Εφαπτομένη (ε) με άγνωστο το σημείο επαφής

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Υποθέτουμε το σημείο επαφής έστω $A(x_1, y_1)$, Γράφουμε την εξίσωση εφαπτομένης (ε):

$$(\varepsilon): \boxed{xx_1 = p(y + y_1)} \quad \text{ή } (\varepsilon): \boxed{yy_1 = p(x + x_1)} \rightarrow \text{με αγνώστους τα } x_1, y_1$$

Βήμα 2:

Βρίσκουμε τα x_1, y_1 ως εξής:

- (1) $\rightarrow A(x_1, y_1) \in (C)$, οπότε επαληθεύει την εξίσωσή της παραβολής
- (2) $\rightarrow$ η εφαπτομένη ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος

Άσκηση-1

Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση :

$$\text{i) } y^2 = 6x \quad \text{ii) } y^2 = -8x \quad \text{iii) } x^2 = 4y \quad \text{iv) } y = -\frac{1}{4}x^2$$

Λύση

$$\text{i) } y^2 = 6x \quad p = 3 \quad \text{άρα Εστία : } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \rightarrow E\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\text{Διευθετούσα : } (\delta): x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ii) } y^2 = -8x \quad p = -4 \quad \text{άρα Εστία : } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \rightarrow E(-2, 0),$$

$$\text{Διευθετούσα : } (\delta): x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{iii) } x^2 = 4y \quad p = 2 \quad \text{άρα Εστία : } E\left(0, \frac{p}{2}\right) \rightarrow E(0, 1),$$

$$\text{Διευθετούσα : } (\delta): y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = -1$$

$$\text{iv) } y = -\frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2 = -4y \quad p = -2 \quad \text{άρα Εστία : } E\left(0, \frac{p}{2}\right) \rightarrow E(0, -1),$$

$$\text{Διευθετούσα : } (\delta): y = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow y = 1$$

Άσκηση-2

A. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει :

$$\text{i) Εστία } E(2, 0) \quad \text{ii) Εστία } E(0, -3) \quad \text{και iii) Διευθετούσα } (\delta): x = -1 \quad \text{iv) } y = 5$$

B. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής του i) ερωτήματος που άγεται από το σημείο $M(-2, 0)$.

Λύση

A.

$$\text{i) } E(2, 0) \quad \text{άρα } \frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4 \quad \text{άρα } (C): y^2 = 2 \cdot 4x \Leftrightarrow y^2 = 8x$$

$$\text{ii) } E(0, -3) \quad \text{άρα } \frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6 \quad \text{άρα } (C): x^2 = 2 \cdot (-6)y \Leftrightarrow x^2 = -12y$$

$$\text{iii) } (\delta): x = -1 \quad -\frac{p}{2} = -1 \Leftrightarrow p = 2 \quad \text{άρα } (C): y^2 = 2 \cdot 2x \Leftrightarrow y^2 = 4x$$

$$\text{iv) } (\delta): y = 5 \quad \text{άρα } -\frac{p}{2} = 5 \Leftrightarrow p = -10 \quad \text{άρα } (C): x^2 = 2 \cdot (-10)y \Leftrightarrow x^2 = -20y$$

B.i) Έστω $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής, τότε για την παραβολή $(c): y^2 = 8x$ έχουμε:

$$\text{Είναι } p = 4 \quad \text{και } (\epsilon): yy_1 = p(x + x_1)$$

- Αλλά $M(-2,0) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0 \cdot y_1 = 4(-2 + x_1) \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2} \quad (1)$
- Επίσης $A(x_1, y_1) \in (c) \Leftrightarrow y_1^2 = 8x_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y_1^2 = 16 \Leftrightarrow \boxed{y_1 = -4} \text{ ή } \boxed{y_1 = 4}$
- Για $x_1 = 2$ και $y_1 = -4 \rightarrow M_1(2, -4)$ και $(\varepsilon) \Leftrightarrow -4y = 4(x+2) \Leftrightarrow \boxed{x+y+2=0} \rightarrow (\varepsilon_1)$
- $x_1 = 2$ και $y_1 = 4 \rightarrow M_2(2, 4)$ και $(\varepsilon) \Leftrightarrow 4y = 4(x+2) \Leftrightarrow \boxed{x-y+2=0} \rightarrow (\varepsilon_2)$

5. ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ (C) ΚΑΙ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ (C₁): $y^2 = 2px$

A. Εξετάζουμε την κατακόρυφη $x=0$ ($y'y$) (η οποία είναι εφαπτομένη της παραβολής) αν είναι εφαπτομένη και του κύκλου και την δεχόμαστε ή την απορρίπτουμε αναλόγως.

B. Θεωρούμε κοινή εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \rightarrow$ με αγνώστους λ, β . Πρέπει :

► για τον κύκλο : $d(K, \rho) = \varepsilon, (1)$ όπου K το κέντρο του κύκλου και

► για την παραβολή $\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = 2px \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda x + \beta)^2 - 2px = 0$, η 2-βάθμια να έχει μία λύση $\Leftrightarrow \Delta = 0, (2)$.

Από (1) και (2) βρίσκω τα β, λ και τα αντικαθιστώ στην (ε) .

✂ **ΠΡΟΣΟΧΗ!** Με το να βρούμε κοινά σημεία κωνικών τομών –δηλαδή σύστημα και μετά κλασσικά τις εφαπτομένες θα είναι λανθασμένες – εκτός αν τα σημεία είναι επαφής.

Άσκηση-3

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του κύκλου $(c): x^2 + y^2 = 4$ και της παραβολής $(c_1): y^2 = 3x$.

Λύση

(Θέλουμε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 στα σημεία K, M και Λ, N και όχι στα σημεία A και B γιατί σ' αυτά δεν έχουμε κοινές εφαπτομένες).

Η κατακόρυφη ευθεία $x=0$ δεν είναι εφαπτομένη για τον κύκλο $(c): x^2 + y^2 = 4$, ο οποίος έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Έστω η κοινή τους εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow \boxed{\lambda x - y + \beta = 0} \quad (\varepsilon)$, με λ, β ομόσημοι και πρέπει:

$$d(O, \rho) = \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 + \beta|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |\beta| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \boxed{\beta^2 = 4\lambda^2 + 4} \quad (1) \text{ και}$$

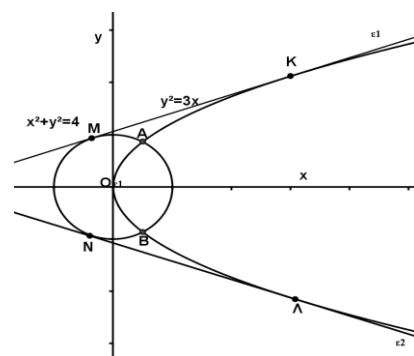
$$\begin{cases} y = \lambda x + \beta \\ y^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda x + \beta)^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 x^2 + (2\beta\lambda - 3)x + \beta^2 = 0} \quad (2),$$

η οποία είναι 2-βάθμια ως προς x και θέλουμε μία λύση για να εφάπτεται, άρα

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\beta\lambda - 3)^2 - 4\lambda^2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow -12\beta\lambda + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 \lambda^2 = \frac{9}{16} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (4\lambda^2 + 4)\lambda^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow 4\lambda^4 + 4\lambda^2 - \frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow$$

$$64\lambda^4 + 64\lambda^2 - 9 = 0 \quad (3).$$



$$\text{Θέτω } \boxed{\lambda^2 = \omega} \succ 0 \text{ και έχουμε } 64\omega^2 + 64\omega - 9 = 0, \Delta = 6400, \omega_{1,2} = \frac{-64 \pm 80}{128} = \begin{cases} \omega = -\frac{144}{128} \\ \omega = \frac{16}{128} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Για } \omega = -\frac{144}{128} \text{ ή } \lambda^2 = \omega = -\frac{144}{128} \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{Για } \omega = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

$$\text{Για ή } \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ ή } (1) \Rightarrow \beta^2 = 4\lambda^2 + 4 \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}}, \text{ με } \lambda, \beta \text{ ομόσημοι.}$$

$$\text{➤ Τελικά για } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ και } \beta = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ αντικαθιστούμε στην (ε):}$$

$$(ε): y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}x - y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0} \quad (ε_1).$$

$$\text{➤ Τελικά για } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ και } \beta = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ αντικαθιστούμε στην (ε): } (ε): y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}x - y + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0} \quad (ε_2)$$

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ1/ ΘΕΜΑ 4-21690

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 3x$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 10 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία και να τις σχεδιάσετε.

(Μονάδες 8)

β) Έστω $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της παραβολής. Να αποδείξετε ότι η απόστασή του $d(M, \varepsilon)$ από την ευθεία είναι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{(y_0 + 2)^2 + 6}{5}.$$

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο της παραβολής που είναι το πιο κοντινό στην ευθεία.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα γ) είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

(Μονάδες 4)

ΑΣΚΗΣΗ2/ ΘΕΜΑ 3-20866

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

(Μονάδες 04)

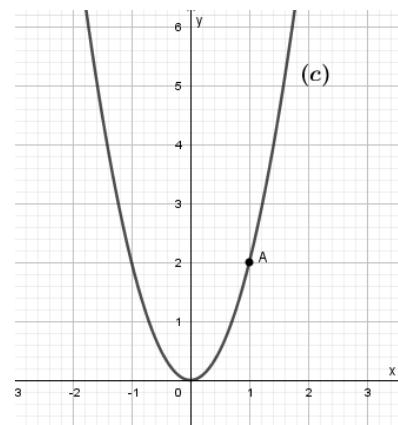
γ)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

(Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ3/ ΘΕΜΑ 4-22465

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x=-2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$.

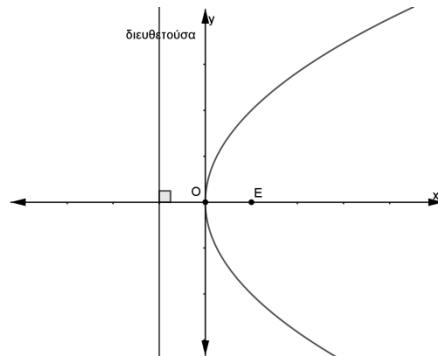
Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon : y = x + 2$.

Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$.

(Μονάδες 7)



ΑΣΚΗΣΗ4/ 2.22511. Θεωρούμε την παραβολή $C : y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία $\epsilon : x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος της παραβολής C .

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 10

β) Αν η ευθεία ϵ τέμνει την παραβολή C στα σημεία της B και Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ϵ_1 και ϵ_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.

Μονάδες 10

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2 ανήκει στη διευθετούσα της C .

Μονάδες 5

ΑΣΚΗΣΗ5/ ΘΕΜΑ 2-22512. Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1 : y^2 = 4x$ και $C_2 : y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.

Μονάδες 13

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

Μονάδες 12

ΑΣΚΗΣΗ6/ 2.22514. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1 : y^2 = -2px$ και $C_2 : y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα.

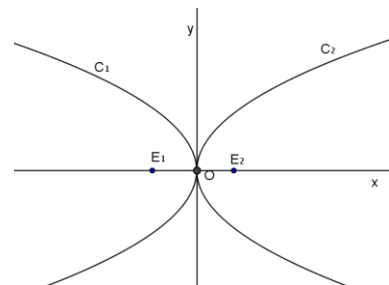
Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.

α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2 .

Μονάδες 15

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .

Μονάδες 10



ΑΣΚΗΣΗ7/ 4.22559. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\epsilon : x - y - 1 = 0$. Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1 .

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 25$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1 .

Μονάδες 7

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 , τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ϵ_1 και ϵ_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.

Μονάδες 5

iii) να αποδείξετε ότι οι ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1 .

Μονάδες 4

ΑΣΚΗΣΗ8/ 4.22560. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία A(0,2) , B(-2,4) και Γ (0,6) .

α) Να αποδείξετε ότι $C : x^2 + (y - 4)^2 = 4$

Μονάδες 10

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .

Μονάδες 9

γ) Αν M₁ και M₂ είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαιπόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M₁ και M₂.

Μονάδες 6

ΑΣΚΗΣΗ9/ 4.22579. Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία A(-2, - 2) , B(0, - 4) , την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$

ii. $(MAB) \geq 3$

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο.

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν M(1, -2). Να εξετάσετε αν η εφαιπόμενη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά BΓ του τριγώνου MAB.

ΑΣΚΗΣΗ10/ 4.18245.

Δίνεται η παραβολή C : $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το O(0,0) .

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω M(α, β) σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E .

(Μονάδες 7)

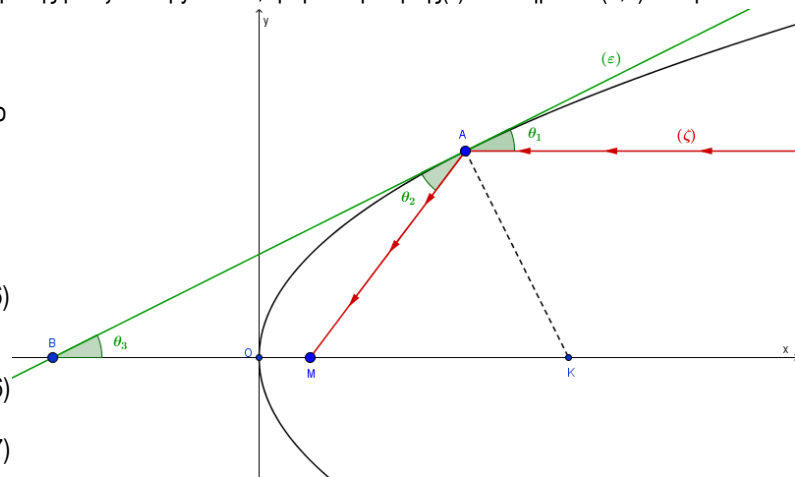
4.18870. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαιπόμενη της(ε) στο σημείο A(4,4) και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ₁ που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ₂ που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x'x. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής. (Μονάδες 06)



ΑΣΚΗΣΗ11/ ΘΕΜΑ 2-22267

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x(1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E, έχει συντεταγμένες E(.....,) και η διευθετούσα έχει εξίσωση».

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο A(1, -2). (Μονάδες 08) γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ12/ ΘΕΜΑ 2-22190

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση

$$y^2 = x \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

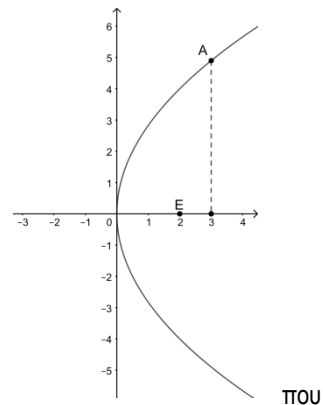
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της A(1,-1).

(Μονάδες 12)

(Μονάδες 05)

(Μονάδες 08)



ΑΣΚΗΣΗ13/ ΘΕΜΑ 2-21307

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο E(0, 3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε₁) και (ε₂) της παραβολής στα σημεία A(6,3) και B(-6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε₁) και (ε₂). (Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ14/ ΘΕΜΑ 2-21306

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x'x, κορυφή O(0,0) και εστία E(2,0), όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο A. (Μονάδες 09)

ΑΣΚΗΣΗ15/ ΘΕΜΑ 4-20092

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\epsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την ε. (Μονάδες 07)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ε.

(Μονάδες 08)

δ) Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε;

(Μονάδες 05)

ΑΣΚΗΣΗ16/ ΘΕΜΑ 1-21152

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A(x₀, y₀) και είναι παράλληλη στον άξονα x'x έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο E(1,0).

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = r^2$ στο σημείο του A(x₁, y₁) έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = r^2$.

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ17/ ΘΕΜΑ 4-18570

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

(Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του.

(Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

ΑΣΚΗΣΗ18/ ΘΕΜΑ 4 - 18372

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(-2, -2), B(0, -4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την (παράμετρο) εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ.

(Μονάδες 08)

γ) Αν M(1, -2) και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x'x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ19/ ΘΕΜΑ 4 -15394

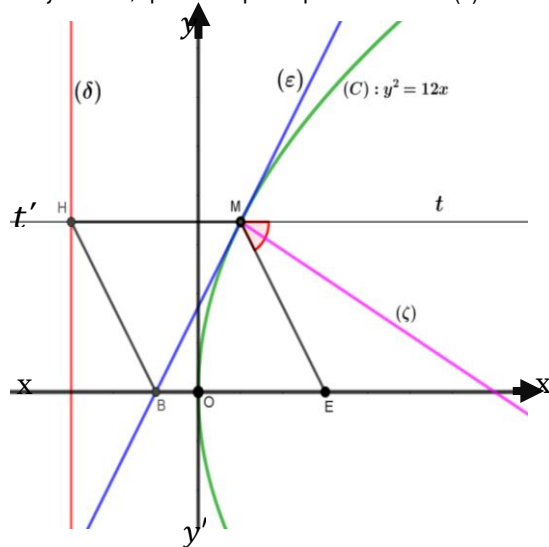
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ϵ) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία t' παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E .

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία EMt .



ΑΣΚΗΣΗ20/ Δίνεται η παραβολή $C: y = \frac{1}{4}x^2$ και το σημείο της $M(2, 1)$. Αν K είναι η προβολή του M στην διευθετούσα:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και K , όπου E η εστία της παραβολής,

β) να βρείτε τις εξισώσεις της ευθείας EK και της μεσοκαθέτου αυτής.

γ) να δείξετε ότι η μεσοκάθετος της EK είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $M(2, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ21/ Έστω $c: x = \frac{1}{2p}y^2$ η εξίσωση της παραβολής του σχήματος και

ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{AOB} = 90^\circ$.

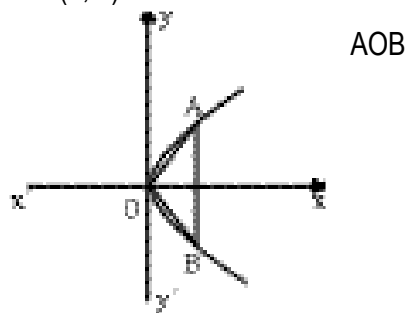
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών OA, OB .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

δ) Να δείξετε ότι το AB τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σταθερό σημείο.

ε) Να γραφεί η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει το OA .



ΑΣΚΗΣΗ22/ Δίνεται η παραβολή $(c): y^2 = 4x$. Να βρείτε:

A. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

B. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της (c) και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

Δ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της καμπύλης (c) που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{u}(-1, 1)$

ΑΣΚΗΣΗ23/ Δίνεται η παραβολή $(c_1): y^2 = 8x$.

A. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της παραβολής που σχηματίζουν με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

B. Να βρεθεί ο κύκλος (c) που εφάπτεται στην ευθεία $(\epsilon_1): y = x + 2$ και έχει κέντρο την εστία E της παραβολής

Γ. Να βρεθεί το σημείο επαφής της παραπάνω εφαπτομένης με τον κύκλο

ΑΣΚΗΣΗ24/ Θεωρούμε τη παραβολή $(c_2): y^2 = 3x$ και το κύκλο $(c_3): x^2 + y^2 = 4$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες των (c_2) και (c_3) .

ΑΣΚΗΣΗ25/ Θεωρούμε τη παραβολή $(c): y^2 = 8x$ και τις εφαπτόμενες MA, MB που άγονται από το $M(-3,2)$.

- A. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής AB.
- B. Να βρεθεί η απόσταση του M από την AB.
- Γ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της (c) που άγονται από το σημείο M
- Δ. Να βρεθεί το συνιμήτονο της γωνίας των MA και MB
- Ε. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου MAB

ΑΣΚΗΣΗ26/ Θεωρούμε την εξίσωση : $y^4 - 16x^2 = 0$, (1) .

- A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $(c_1): y^2 = 4x$ και $(c_2): y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά απ' αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.
- B. Αν E_1 και E_2 οι εστίες των $(c_1): y^2 = 4x$ και $(c_2): y^2 = -4x$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το τμήμα E_1E_2 .

3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός

Έλλειψη με εστίες δύο σταθερά σημεία E' και E ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο του $E'E$. Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με $2a$ και την απόσταση των εστιών $E'E$ με 2γ . Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της έλλειψης.

Συνέπειες ορισμού:

α) Ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, αν

$$\text{και μόνο αν } (ME') + (ME) = 2a$$

$$\text{και } (E'E) = 2\gamma$$

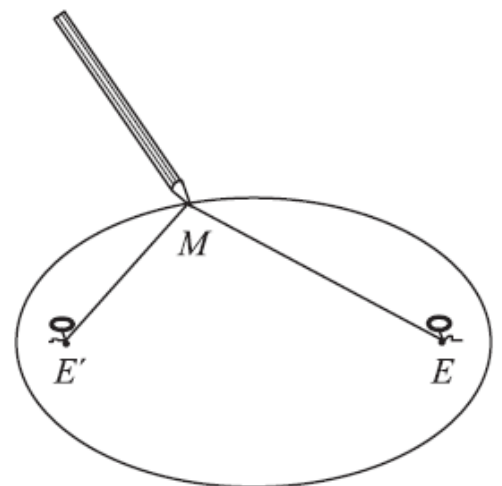
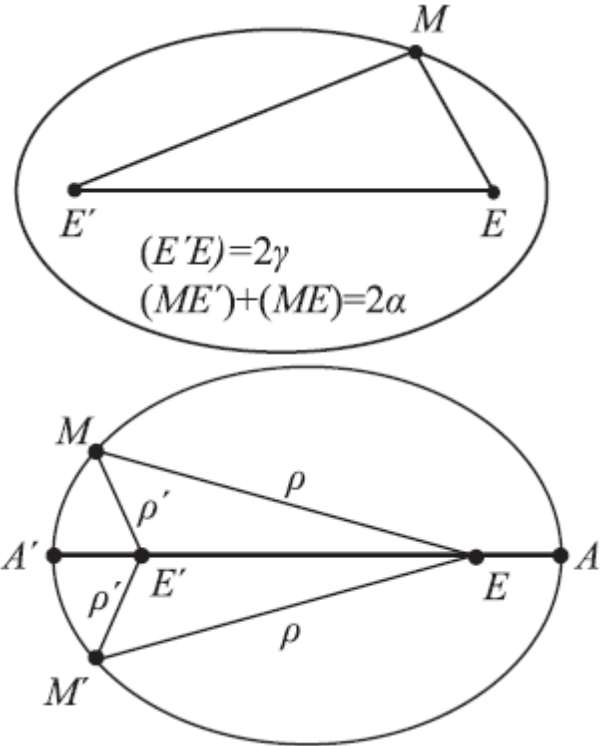
β) Ισχύει

$$(E'E) \leq (ME') + (ME) \leq 2a \Leftrightarrow \gamma \leq a$$

➤ Αν $\gamma = 0$ τότε τα σημεία E', E συμπίπτουν και η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο E και ακτίνα a . συμπίπτουν, οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο το E και ακτίνα a .

Πρακτικά : Μπορούμε να σχεδιάσουμε την έλλειψη ως εξής:

➤ Παίρνουμε ένα σχοινί μήκους $2a$ και στερεώνουμε τα άκρα του στις εστίες E' και E . Αν τώρα με ένα μολύβι διατηρούμε το σχοινί τεντωμένο, τότε αυτό, κατά την κίνησή του, θα διαγράψει την έλλειψη.



1^η ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΑ $x'x$ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ $E'E$ ΚΑΙ $y'y$ ΤΗΝ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ ΤΟΥ $E'E$

A. ΕΛΛΕΙΨΗ $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ (1), με $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$

➤ $(ME\phi) + (ME) = 2a$

➤ **Εστίες** $\rightarrow E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$

➤ Κορυφές: A', A, B', B

➤ Μεγάλος άξονας: $A'A = 2a$

➤ Μικρός άξονας: $B'B = 2b$

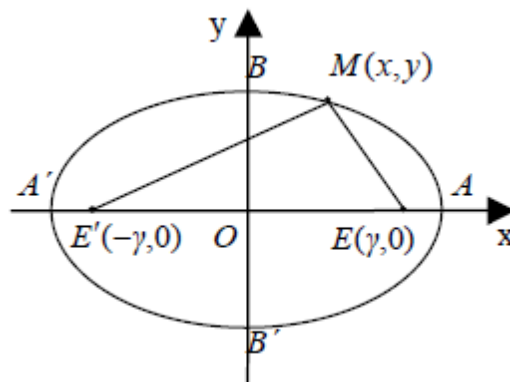
➤ Για κάθε $M(x, y) \in (C)$ ισχύει:

$-\alpha \leq x \leq \alpha$ και $-\beta \leq y \leq \beta$.

➤ Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$ και $\frac{\beta}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

➤ Όταν $\varepsilon \rightarrow 0$, τότε $\frac{b}{a} \rightarrow 1$ και η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος (στρογγυλεύει)

➤ Όταν $\varepsilon \rightarrow 1$, τότε $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ και η έλλειψη τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα.



B. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

$(\varepsilon): \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (1ε), με $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

2^η ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΑ $y'y$ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ $E'E$ ΚΑΙ $x'x$ ΤΗΝ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ ΤΟΥ $E'E$

A. ΕΛΛΕΙΨΗ $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ (2), με $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$

➤ $(ME\phi) + (ME) = 2a$

➤ **Εστίες** $\rightarrow E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$

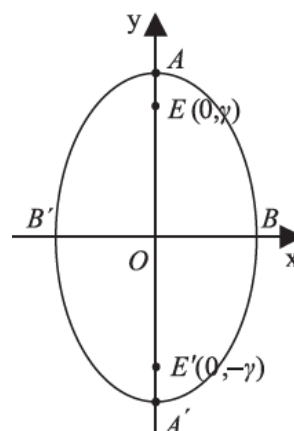
➤ Κορυφές: A', A, B', B

➤ Μεγάλος άξονας: $A'A = 2a$

➤ Μικρός άξονας: $B'B = 2b$

➤ Για κάθε $M(x, y) \in (C)$ ισχύει: $-\alpha \leq x \leq \alpha$ και $-\beta \leq y \leq \beta$

➤ Εκκεντρότητα: $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} < 1$ και $\frac{\beta}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$



B. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

$(\varepsilon): \frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$ (2ε), με $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ1/ Αν $M(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C , τότε τα και τα σημεία $M(x_1, -y_1), M(-x_1, y_1)$

και $M(-x_1, -y_1)$ ανήκουν στην C , αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω έλλειψη έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας.

Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E, E' της έλλειψης και η μεσοκάθετος του EE' είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ το μέσο O του EE' είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.

ΑΣΚΗΣΗ2/ Από την εξίσωση της έλλειψης για $y = 0$ βρίσκουμε $x = \pm a$ ενώ για $x = 0$ βρίσκουμε $y = \pm b$

Επομένως, η έλλειψη C τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-a, 0)$ και $A(a, 0)$, ενώ τον άξονα $y'y$ στα σημεία

$B(0, -b)$ και $B(0, b)$. Τα σημεία A, A', B, B' λέγονται **κορυφές** της έλλειψης, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και

$B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(AA') = 2a$ και $(BB') = 2b$, λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς O σημεία M_1 και M_2 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Αποδεικνύεται ότι: $2b \leq (M_1M_2) \leq 2a$, δηλαδή ότι κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

ΑΣΚΗΣΗ3/ Τέλος, για κάθε σημείο $M(x, y)$ της έλλειψης έχουμε: $-a \leq x \leq a$ και $-b \leq y \leq b$

Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x = -a, x = a$ και $y = -b, y = b$.

ΑΣΚΗΣΗ4/ **Εκκεντρότητα:** Ο λόγος $e = \frac{c}{a}$ και $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ (e : παράμετρος).

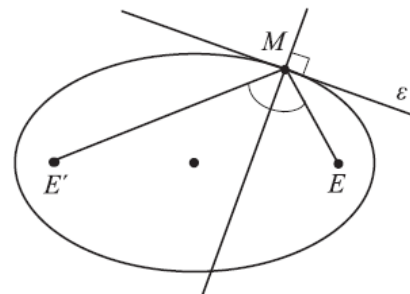
Όμοιες: λέγονται οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{b}{a}$.

ΑΣΚΗΣΗ5/ Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

Μια σπουδαία ιδιότητα της παραβολής, γνωστή ως **ανακλαστική ιδιότητα** είναι η εξής:

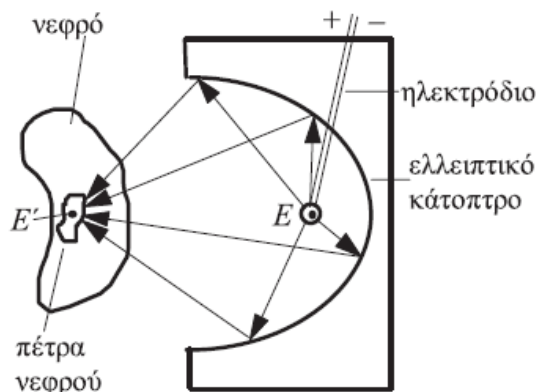
Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία EME' όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.

(χωρίς απόδειξη)



Χρήση της παραπάνω ιδιότητας

1. **Σχεδιασμός ορισμένων τύπων οπτικών οργάνων** και στην **κατασκευή των λεγόμενων "στοών με ειδική ακουστική"**. Οι στοές αυτές είναι αίθουσες με ελλειπτική οροφή, στις οποίες ένα πρόσωπο που ψιθυρίζει στη μια εστία μπορεί να ακουστεί στην άλλη εστία.
2. **Στην Ιατρική:** σε μια ιατρική μέθοδο που λέγεται **λιθοθρυψία**. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ως εξής: Στη μια εστία της έλλειψης τοποθετείται ένα ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων, ενώ ο ασθενής τοποθετείται σε τέτοια θέση, ώστε το νεφρό του να είναι στην άλλη εστία. Τότε οι πέτρες του νεφρού κονιορτοποιούνται από τους ανακλώμενους υπερήχους.



ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

A. Εφαπτομένη (ε) με γνωστό το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Αντικαθιστούμε στους τύπους

$$(ε): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad \text{για την } C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ή

$$(ε): \frac{x x_1}{b^2} + \frac{y y_1}{a^2} = 1, \text{ για την } C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

B. Εφαπτομένη (ε) με άγνωστο το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Υποθέτουμε το σημείο επαφής έστω $A(x_1, y_1)$, Γράφουμε την εξίσωση εφαπτομένης (ε):

$$(ε): \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1 \quad \text{ή } (ε): \frac{x x_1}{b^2} + \frac{y y_1}{a^2} = 1 \rightarrow \text{με αγνώστους τα } x_1, y_1$$

Βήμα 2:

Βρίσκουμε τα x_1, y_1 ως εξής:

(1) $\rightarrow A(x_1, y_1) \in (c)$, οπότε επαληθεύει την εξίσωσή της έλλειψης

(2) $\rightarrow$ η εφαπτομένη ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος

Άσκηση-1 (άσκηση

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i) όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10

ii) όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26

iii) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της περίπτωσης i) που άγεται από το σημείο $M(-8,0)$.

Λύση

i) $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ άρα $\gamma=4$, μεγάλος άξονας 10 άρα $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$

$$\text{Επίσης } b^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$$

$$\text{Άρα } (C): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ii) $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ άρα $\gamma=5$, μεγάλος άξονας 26 άρα $2\alpha=26 \Leftrightarrow \alpha=13$

$$\text{Επίσης } b^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow b^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow b^2 = 144 \Leftrightarrow b = \pm 12$$

$$\text{Άρα } (C): \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

iii) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής, τότε για την έλλειψη (c): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ έχουμε:

$$\text{Είναι } (ε): \frac{x x_1}{25} + \frac{y y_1}{16} = 1$$

$$\bullet \text{ Αλλά } M(-25,0) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{-25x_1}{25} + \frac{0 \cdot y_1}{16} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 1} \quad (1)$$

Επίσης $A(x_1, y_1) \in (C) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, άρα την επαληθεύει

$$\frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{16} = 1 \xRightarrow{(1)} \frac{1}{25} + \frac{y_1^2}{16} = 1 \Rightarrow 25y_1^2 = 400 \Rightarrow y_1^2 = 16 \Rightarrow \boxed{y_1 = \pm 4} \quad (2).$$

$$\bullet \text{ Για } x_1 = 1 \text{ και } y_1 = -4 \rightarrow M_1(1, -4) \text{ και } (\varepsilon) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): \frac{1x}{25} + \frac{-4y}{16} = 1} \Leftrightarrow \boxed{16x - 100y - 400 = 0} \rightarrow (\varepsilon_1)$$

$$\bullet \text{ Για } x_1 = 1 \text{ και } y_1 = 4 \rightarrow M_2(1, 4) \text{ και } (\varepsilon) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): \frac{1x}{25} + \frac{4y}{16} = 1} \Leftrightarrow \boxed{16x + 100y + 400 = 0} \rightarrow (\varepsilon_2)$$

Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ1/ 2.22509. Δίνονται οι ελλείψεις $C_1 : x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2 : 4x^2 + y^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 8$ Μονάδες 13

ΑΣΚΗΣΗ2/ 2.22510. Δίνονται ο κύκλος $C_1 : x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2 : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon : x = 4$. Αν Γ και Δ είναι

τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ . Μονάδες 11

β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών. Μονάδες 14

ΑΣΚΗΣΗ3/ 2.22516. Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. Μονάδες 10

β) Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ME' και ME . Μονάδες 9

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή. Μονάδες 6

ΑΣΚΗΣΗ4/ 4.22592. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} + \frac{16}{9}(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = 0, \text{ όπου } A(-3, 0) \text{ και } B(3, 0).$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 25$. Μονάδες 11

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x'$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B .

Μονάδες 10

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 .

Μονάδες 4

ΑΣΚΗΣΗ5/ ΘΕΜΑ 2-21648

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3, 0)$, $E'(-3, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{12}{5})$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$. (Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

ΑΣΚΗΣΗ6/ ΘΕΜΑ 2-21647

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4, 0)$, $E'(-4, 0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C . (Μονάδες 10)

β) την εκκεντρότητά της C . (Μονάδες 7)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$. (Μονάδες 8)

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C .

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

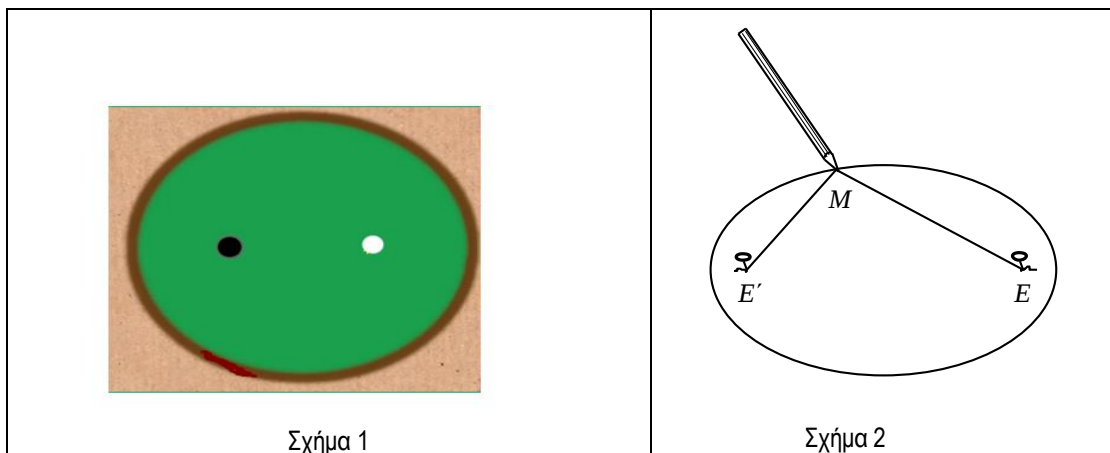
(Μονάδες 5)

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα



Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ8/ ΘΕΜΑ 2-22564

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β είναι αντίστοιχα

$$x + 2y - 6 = 0 \text{ και } -2x + y - 6 = 0 .$$

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ9/ ΘΕΜΑ 2-22558

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(Μονάδες 12)

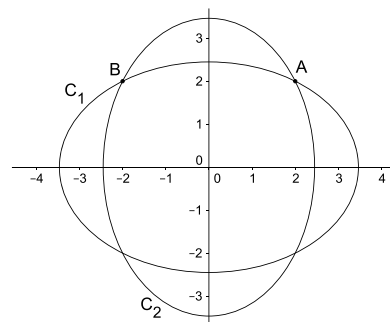
β) Έστω Σ και Ρ τα σημεία της ελλείψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία Ε(2, 0). Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το Ρ αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2, 3)$ και $P(2, -3)$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣΡ.

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ10/ ΘΕΜΑ 2-22556

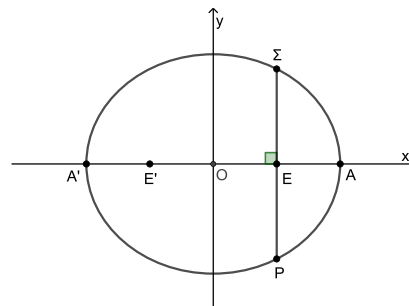
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5, 0)$, $A(5, 0)$, $B'(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$. (Μονάδες 10)

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$.

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ11/ ΘΕΜΑ 4-22273

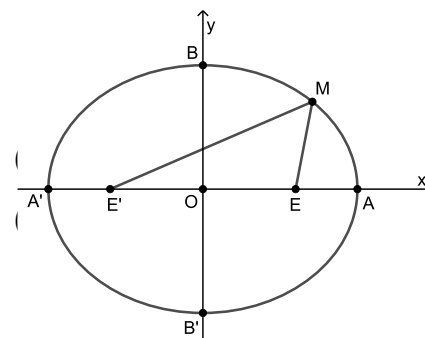
Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. Των εστιών E και E' της έλλειψης.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$ και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1).



ΑΣΚΗΣΗ12/ ΘΕΜΑ 2-22168

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία E της παραβολής.

(Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O , αν η μια εστία της είναι το σημείο $E(1, 0)$ και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ13/ ΘΕΜΑ 2-21308

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οχγδίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.

(Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

(Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της έλλειψης στο σημείο της $B(0, 4)$.

(Μονάδες 08)

ΑΣΚΗΣΗ14/ ΘΕΜΑ 2-20883

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και του μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' . (Μονάδες 12)

β) Αν $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (Μονάδες 13)

ΑΣΚΗΣΗ15/ Δίνεται η εξίσωση $(c): 3x^2 + 4y^2 = 12$. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση έλλειψης και να βρείτε τις εστίες και τις κορυφές της.

ΑΣΚΗΣΗ16/ Α. Να βρεθεί η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $E(1, 0)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες OX και OY τρίγωνο εμβαδού $\frac{1}{4}$ τ.μ

Β. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης που είναι παράλληλες στην ευθεία $\epsilon: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ17/ Δίνονται οι κύκλοι $c_1: x^2 + y^2 = 1$ και $c_2: x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Α. Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, 1)$ είναι εξωτερικό του κύκλου c_1 και εσωτερικό του κύκλου c_2 .

Β. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ της οποίας οι εστίες είναι τα κέντρα των δύο κύκλων και ισχύει $a = 3\gamma$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του c_1 στο σημείο του $N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Δ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του c_2 στο σημείο του $\Lambda(1, \sqrt{3})$

ΑΣΚΗΣΗ18/ Δίνεται η έλλειψη: $4x^2 + y^2 = 20$.

A. Να βρείτε τις ευθείες, την εκκεντρότητα και το μήκος του μεγάλου άξονα.

B. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία: $4x + y + 2016 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ19/ Θεωρούμε τις καμπύλες $(c_1): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ και $(c_2): x^2 + (y+1)^2 = 4$

A. Ναδειχτεί ότι οι (c_1) και (c_2) εφάπτονται σε ένα σημείο και τέμνονται σε δύο άλλα.

B. Από το σημείο P φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA, PB στην (c_1) . Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής AB.

Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της καμπύλης (c_1) που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{u}(-4, 1)$

Δ. Αν $K(x_1, y_1) \in (c_1)$ και $L(x_2, y_2) \in (c_2)$, Ναδειχτεί ότι $-1 \leq \frac{x_1 x_2 - 2y_1(y_2 + 1)}{4} \leq 1$.

3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

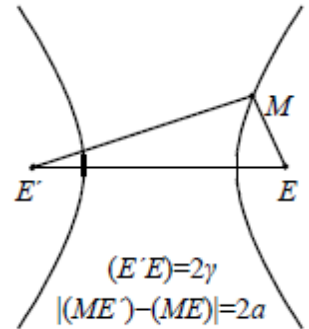
Ορισμός

Υπερβολή με εστίες δύο σταθερά σημεία E' και E (εστίες) ονομάζουμε τον γεωμετρικό τόπο C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $E'E$. Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων των σημείων της υπερβολής από τις εστίες την συμβολίζουμε, συνήθως, με $2a$ και την απόσταση των εστιών $E'E$ (εστιακή απόσταση) με 2γ .

Συνέπειες ορισμού:

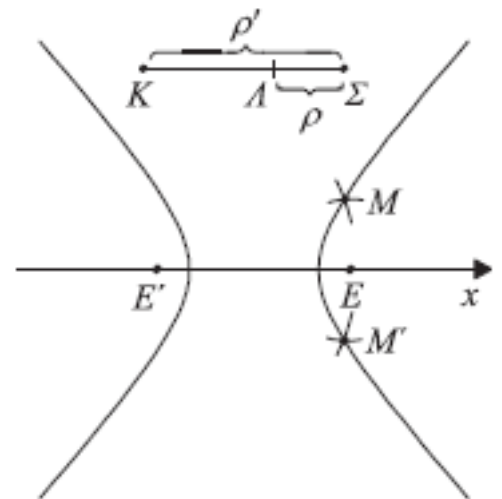
α) Ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν $|(ME') - (ME)| = 2a$ και $(E'E) = 2\gamma$

β) Ισχύει $|(ME') - (ME)| < (E'E)$ ή $2a < 2\gamma \Rightarrow a < \gamma$



Πρακτικά : σχεδιάζουμε την έλλειψη ως εξής:

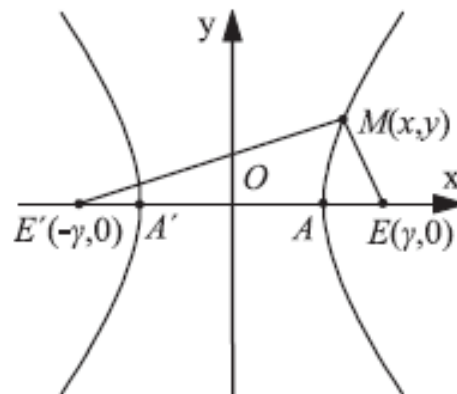
Για να βρούμε σημεία της υπερβολής C , εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ μήκους $2a$ και ένα οποιοδήποτε σημείο Σ της ημιευθείας $K\Lambda$ εκτός του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$. Με κέντρα E' και E και ακτίνες $\rho' = (K\Sigma)$ και $\rho = (\Lambda\Sigma)$, αντιστοίχως, γράφουμε κύκλους οι οποίοι τέμνονται στα σημεία M και M' . Τα σημεία M και M' είναι σημεία της υπερβολής, γιατί ισχύει $(ME') - (ME) = (K\Sigma) - (\Lambda\Sigma) = (K\Lambda) = 2a$.



**1η ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΑ $x'x$ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ $E'E$
και $y'y$ ΤΗΝ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ ΤΟΥ $E'E$**

A. ΥΠΕΡΒΟΛΗ (c): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1), με $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

- $| (ME') - (ME) | = 2a$
- **Εστίες** $\rightarrow E'(-c, 0)$ και $E(c, 0)$
- Κορυφές: A', A .
- Για κάθε $M(x, y) \in (c)$ ισχύει: $|x| \leq -a \text{ ή } x \geq a$
- Εκκεντρότητα: $e = \frac{c}{a} > 1$ και $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$
- Όταν $e \rightarrow 1$, τότε $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ και το ορθογώνιο βάσης γίνεται πιο επιμήκες, δηλαδή η υπερβολή τείνει να γίνει «πιο κλειστή».

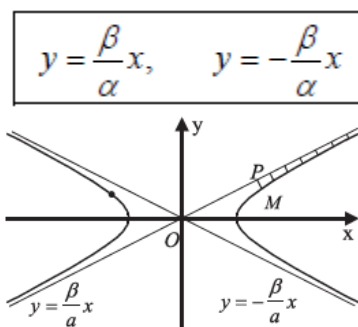


B. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

(ε): $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ (1ε) με $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

Γ. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ είναι οι ευθείες

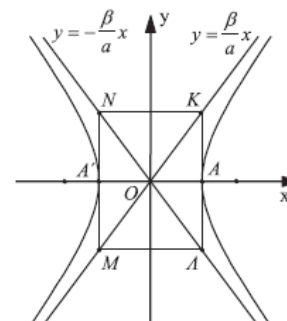


Επισημάνση:

- Είναι φανερό ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγώνιες του ορθογώνιου $KLMN$ με κορυφές τα σημεία $K(a, b)$, $L(a, -b)$, $M(-a, -b)$ και $N(-a, b)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται **ορθογώνιο βάσης της υπερβολής**.

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Ισοσκελής υπερβολή Αν $a=b$ τότε η υπερβολή έχει τύπο $(c): x^2 - y^2 = a^2$ με εκκεντρότητα $e = \sqrt{2}$.



ΕΝΑΣ ... ΑΛΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ

Ένας μνημονικός κανόνας για να βρίσκουμε κάθε φορά τις ασύμπτωτες μιας υπερβολής είναι ο εξής:

Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης της υπερβολής και εξισώνουμε

κάθε παράγοντα με μηδέν. Για παράδειγμα, έστω η υπερβολή $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Επειδή

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = \left(x - \frac{y}{2}\right) \left(x + \frac{y}{2}\right).$$

οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες

$$x - \frac{y}{2} = 0 \quad \text{και} \quad x + \frac{y}{2} = 0,$$

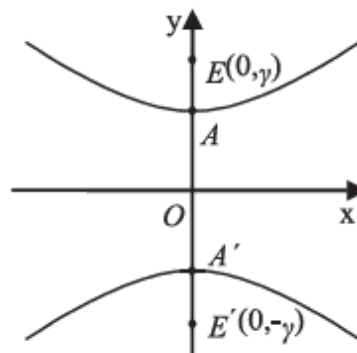
δηλαδή οι

$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -2x.$$

2η ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΑ $y'y$ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ $E'E$ και $x'x$ ΤΗΝ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ ΤΟΥ $E'E$

A. ΥΠΕΡΒΟΛΗ (c): $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (2), με $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$

- $| (ME') - (ME) | = 2\alpha$
- **Εστίες** $\rightarrow E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$
- Κορυφές: A', A .
- Για κάθε $M(x, y) \in (c)$ ισχύει: $x \leq -a$ ή $x \geq a$
- Εκκεντρότητα: $e = \frac{\gamma}{a} > 1$ και $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$
- Όταν $e \rightarrow 1$, τότε $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ και το ορθογώνιο βάσης γίνεται πιο επιμήκες, δηλαδή η υπερβολή τείνει να γίνει «πιο κλειστή».



B. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

(ε): $\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$ (2ε), με $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής.

Γ. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

➤ Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \frac{a}{b}x$ και $y = -\frac{a}{b}x$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Αν $M(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C , τότε τα και τα σημεία $M(x_1, -y_1)$, $M(-x_1, y_1)$ και $M(-x_1, -y_1)$ ανήκουν στην C , αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω έλλειψη έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας.

Επομένως, η ευθεία που ενώνει τις εστίες E', E της υπερβολής και η μεσοκάθετος του EE' είναι άξονες συμμετρίας της υπερβολής, ενώ το μέσο O του EE' είναι κέντρο συμμετρίας της. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

2. Από την εξίσωση της υπερβολής για $y = 0$ βρίσκουμε $x = \pm a$ ενώ για $x = 0$ προκύπτει η εξίσωση $y^2 = -b^2$ που είναι **ΑΔΥΝΑΤΗ στο $\mathbb{R}$** .

Επομένως, η έλλειψη C τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-a, 0)$ και $A(a, 0)$, ενώ **δεν τέμνει άξονα $y'y$** .

3. Για κάθε σημείο $M(x, y)$ της υπερβολής έχουμε : $x \leq -a$ ή $x \geq a$. Άρα, η υπερβολή βρίσκεται έξω από το ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x = -a$, $x = a$ και $y = -b$, $y = b$.

4. **Εκκεντρότητα:** Ο λόγος $e = \frac{r}{a} > 1$ και $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ (e : παράμετρος).

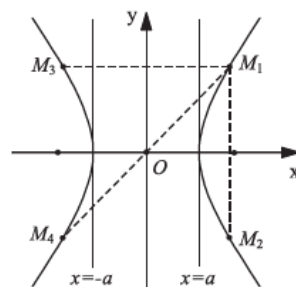
Όταν $e \rightarrow 1$, τότε $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ και το ορθογώνιο βάσης γίνεται πιο επίμηκες, δηλαδή η

υπερβολή τείνει να γίνει «πιο κλειστή».

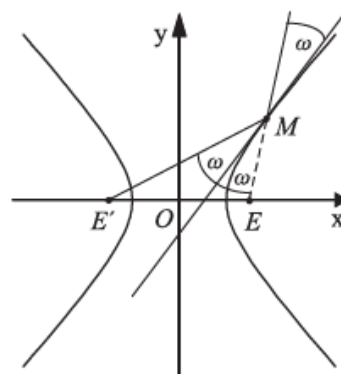
5. Ανακλαστική Ιδιότητα Υπερβολής

Μια σπουδαία ιδιότητα της παραβολής, γνωστή ως ανακλαστική ιδιότητα είναι η εξής:

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $\widehat{EME'}$ όπου E', E οι εστίες της υπερβολής.



(χωρίς απόδειξη))



Χρήση της παραπάνω ιδιότητας

Επομένως, μια φωτεινή ακτίνα, κατευθυνόμενη προς τη μία εστία της υπερβολής, όταν ανακλάται στην επιφάνεια αυτής, διέρχεται από την άλλη εστία, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ιδιότητα αυτή της υπερβολής σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες των άλλων κωνικών τομών βρίσκει εφαρμογή στην κατασκευή των ανακλαστικών τηλεσκοπίων, καθώς και στη ναυσιπλοΐα για τον προσδιορισμό του στίγματος των πλοίων.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

A. Εφαπτομένη (ε) με γνωστό το σημείο επαφής $A(x_1, y_1)$

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Αντικαθιστούμε στους τύπους

$$(ε): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \text{για την } C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ή

$$(ε): \frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1, \text{ για την } C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

B. Εφαπτομένη (ε) με άγνωστο το σημείο επαφής

ΜΕΘΟΔΟΣ:

Υποθέτουμε το σημείο επαφής έστω $A(x_1, y_1)$. Γράφουμε την εξίσωση εφαπτομένης (ε):

$$(ε): \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \text{ή } (ε): \frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1 \rightarrow \text{με αγνώστους τα } x_1, y_1$$

Βήμα 2:

Βρίσκουμε τα x_1, y_1 λύνοντας σύστημα ως

$$\text{εξής: } \begin{cases} (1) \rightarrow A(x_1, y_1) \in (c) \text{ οπότε επαληθεύει την εξίσωσή της έλλειψης} \\ (2) \rightarrow \eta \text{ εφαπτομένη ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος} \end{cases}$$

Παράδειγμα-1

Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i) όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-13,0)$ και $E(13,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$ και $A(5,0)$

ii) όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-10)$ και $E(0,10)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{3}$

Λύση :

i) $E'(-13,0)$ και $E(13,0)$ άρα $\gamma=13$,

κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$ και $A(5,0)$ άρα $\alpha=5$

$$\text{Επίσης } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 169 - 25 \Leftrightarrow \beta^2 = 144 \Leftrightarrow \beta = \pm 12$$

$$\text{Άρα } (C): \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$$

ii) $E'(0,-10)$ και $E(0,10)$ άρα $\gamma=10$,

$$\text{εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{\alpha} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 5\alpha = 30 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

$$\text{Επίσης } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \beta^2 = 64 \Leftrightarrow \beta = \pm 8$$

$$\text{Άρα } (C): \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

Παράδειγμα-2

Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες των υπερβολών :

i) $9x^2 - 16y^2 = 144$ ii) $x^2 - y^2 = 4$

Λύση :

i) $9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ άρα $\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \pm 4$ και

$\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = \pm 3$ άρα $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 9 = \gamma^2 - 16 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = \pm 5$

Εστίες : $E'(-5,0)$, $E(5,0)$, Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$

Ασύμπτωτες : $(\varepsilon_1) : y = \frac{3}{4}x$ και $(\varepsilon_2) : y = -\frac{3}{4}x$

ii) $x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (ισοσκελής υπερβολή) άρα $\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$ και

$\beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = \pm 2$ άρα $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 4 = \gamma^2 - 4 \Leftrightarrow \gamma^2 = 8 \Leftrightarrow \gamma = \pm 2\sqrt{2}$

Εστίες : $E'(-2\sqrt{2},0)$, $E(2\sqrt{2},0)$, Εκκεντρότητα : $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Ασύμπτωτες : $(\varepsilon_1) : y = \frac{2}{2}x \Leftrightarrow y = x$ και $(\varepsilon_2) : y = -\frac{2}{2}x \Leftrightarrow y = -x$

ΑΣΚΗΣΗ1/ 2.22515. Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή $C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy.

ΑΣΚΗΣΗ2/ 4.22591.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $A'(-2, 0)$, $A(2, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα $A'A$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\epsilon_1 : x = -2$ και $\epsilon_2 : x = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ3/ 2-17942. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(c) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C).

ΑΣΚΗΣΗ4/ ΘΕΜΑ 2-21651

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5, 0), E'(-5, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ5/ ΘΕΜΑ 2-22051

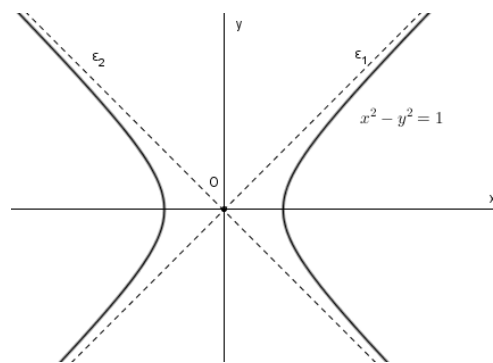
Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 της υπερβολής ότι:

α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

(Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 12)



ΑΣΚΗΣΗ6/ ΘΕΜΑ 4-21656

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0, 0)$, εστίες τα σημεία $E(5, 0), E'(-5, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4, 0), A'(-4, 0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της υπερβολής C .

(Μονάδες 3)

ii. την εξίσωση της υπερβολής C .

(Μονάδες 3)

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή C , τις ασύμπτωτες της C και το ορθογώνιο βάσης της C .

(Μονάδες 9)

γ) Αν M τυχαίο σημείο της C , να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME) - (ME')$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της C , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

(Μονάδες 5)

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C .

(Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

ΑΣΚΗΣΗ8/ ΘΕΜΑ 4-20653

Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκτυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .

α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι

$$(PM_1) - (PM_2) = 1360 \text{ m.}$$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 .

(Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1$, θεωρώντας ως άξονα $x'x$ την ευθεία M_1M_2 και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων. Δίνεται ότι $37^2 = 1369$.

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ9/ ΘΕΜΑ 2-22566

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

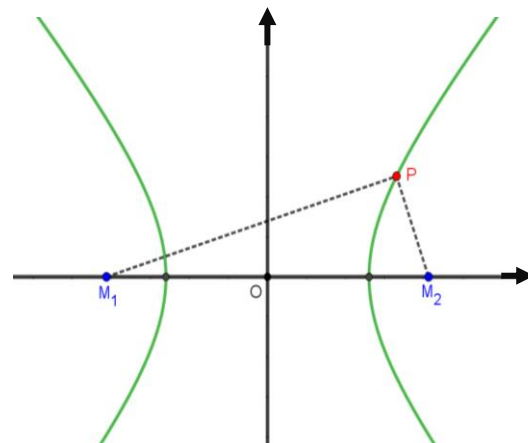
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$ (Μονάδες 8)



ΑΣΚΗΣΗ10/ ΘΕΜΑ 2-22567

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

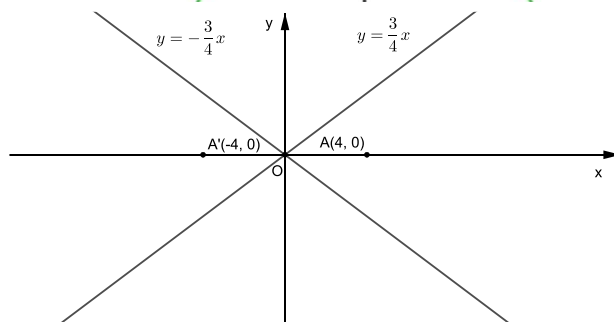
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $a = 4$ και $\beta = 3$,

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ11/ ΘΕΜΑ 2-22561

Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ϵ είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

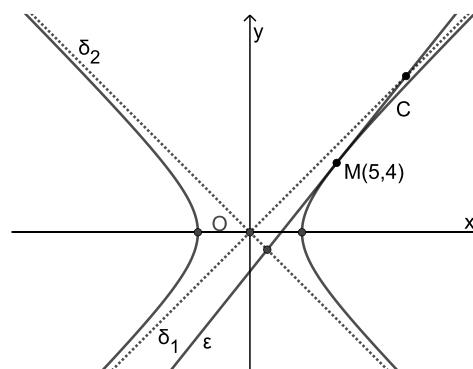
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\epsilon: 5x - 4y = 9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ϵ και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ϵ και δ_2 .

(Μονάδες 9)



ΑΣΚΗΣΗ12/ ΘΕΜΑ 2-22559

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. (Μονάδες 12)

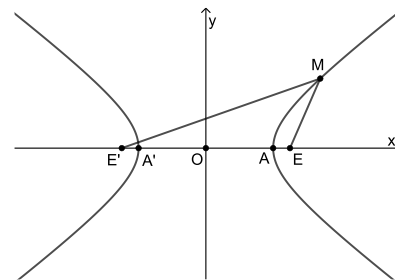
β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' .

(Μονάδες 5)



ΑΣΚΗΣΗ13/ ΘΕΜΑ 4-22174

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

(Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

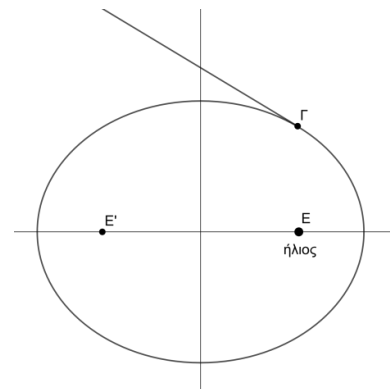
i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma(3, \frac{16}{5})$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα

που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα $O\gamma$. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$. (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

με $x > 0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)



ΑΣΚΗΣΗ14/ ΘΕΜΑ 2-22169

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

β) Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ15/ ΘΕΜΑ 2-22269

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ16/ ΘΕΜΑ 2-22196

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ17/ ΘΕΜΑ 1-21973

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = \frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(Μονάδες 15)

ΑΣΚΗΣΗ18/ ΘΕΜΑ 3-17944

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $a = 2, b = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, A' της υπερβολής (C) .

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C) .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C) , τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

(Μονάδες 9)

ΑΣΚΗΣΗ19/ ΘΕΜΑ 2-16128

Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .

(Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C) , να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) .

(Μονάδες 10)

ΑΣΚΗΣΗ20/ ΘΕΜΑ 4-21657

Έστω υπερβολή C με κέντρο το $(0, 0)$, εστίες πάνω στον άξονα x της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτωτων της C . (Μονάδες 6)

ii. την εκκεντρότητα της C . (Μονάδες 6)

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο $(2, 0)$ και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της C (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την C .

(Μονάδες 8)

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της C ; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΑΣΚΗΣΗ21/

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο M (3συνφ, 2ημφ) $\varphi \in [0, 2\pi)$ ανήκει στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και να βρείτε τις κορυφές της.

B. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει εστίες τις κορυφές της έλλειψης και κορυφές τις εστίες της έλλειψης.

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(5, 0)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $x + 2y = 5$ εφάπτεται της έλλειψης C .

ΑΣΚΗΣΗ22/ Δίνεται η υπερβολή $4x^2 - 5y^2 = 20$

α) Να βρείτε τις εστίες, και τις ασύμπτωτες.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 6 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ23/ Δίνεται η υπερβολή $C: 2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$.

α) Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και τις ασύμπτωτες.

β) Να αποδείξετε ότι το $M\left(\frac{\sqrt{5}}{\sin t}, \sqrt{2}\cos t\right)$ ανήκει στη C για κάθε t με $\sin t \neq 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $\Lambda(\sqrt{10}, \sqrt{2})$.

ΑΣΚΗΣΗ24/

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση υπερβολής που τέμνει τον άξονα x στα σημεία $A'(-2, 0)$ και $A(2, 0)$ και διέρχεται από το σημείο

$\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $(C_1): \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

B. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C_2) με διάμετρο το τμήμα AA' .

Γ. Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτομένες της υπερβολής (C_1) και του κύκλου (C_2) είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: x = -2$ και $\varepsilon_2: x = 2$.