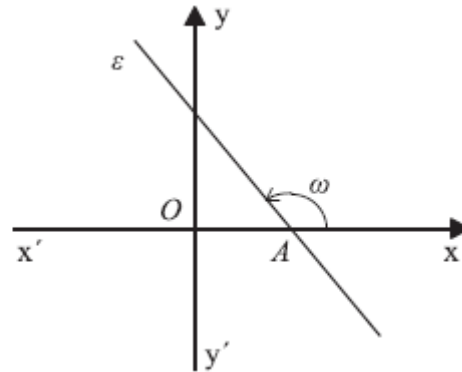
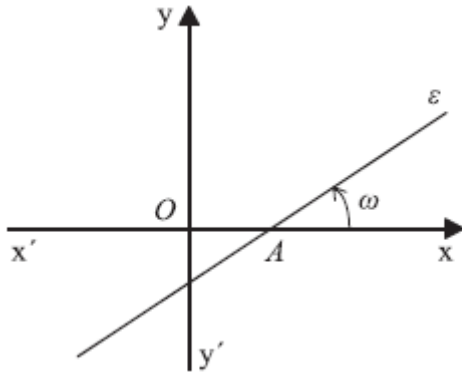


2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

A. Γωνία ευθείας με άξονα x'x.

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi$ και μια ευθεία ε που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A .

- **ΓΩΝΙΑ ω** λέμε τη γωνία που σχηματίζει όταν κινηθεί ο θετικός ημιάξονας Ox κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ε .



- Ισχύει: $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$. Στην περίπτωση που έχουμε $\varepsilon // x'x$, τότε είναι $\omega=0$.

B. Συντελεστής διεύθυνσεως ευθείας.

1. **Κλίση ή συντελεστής διεύθυνσεως της ε** , όταν η ε δεν είναι παράλληλη στον $\psi'\psi$, λέγεται ο αριθμός $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$ (1)

2. Αν $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ είναι δυο σημεία της ε με $x_1 \neq x_2$, τότε: $\lambda = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}$ (2)

3. Αν δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, του επιπέδου με συντελεστές διεύθυνσεως λ_1, λ_2 , αντίστοιχα, και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (3)

4. Αν δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, του επιπέδου με συντελεστές διεύθυνσεως λ_1, λ_2 , αντίστοιχα, και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ (4)

5. Αν μία ευθεία (ε) είναι παράλληλη σ' ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$, τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Δηλαδή $\varepsilon // \vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\vec{\delta}}$ (5)

Ειδικές περιπτώσεις:

- α) Αν η ε είναι παράλληλη στον $x'x$, τότε έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda=0$.
- β) Αν η ε είναι παράλληλη στον $\psi'\psi$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ε .

Παραδείγματα:

- α) Αν μια ευθεία ε σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα $x'x$, τότε έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = \varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$.

- β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2, -3)$ και $B(1, 4)$ έχει συντελεστή διεύθυνσεως:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-3)}{1 - 2} = \frac{7}{-1} = -7.$$

- γ) Η εξίσωση $2x + 3\psi - 5 = 0$ παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{2}{3}$

- δ) Η εξίσωση $2x + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$.

Γ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.1η ΜΟΡΦΗ:

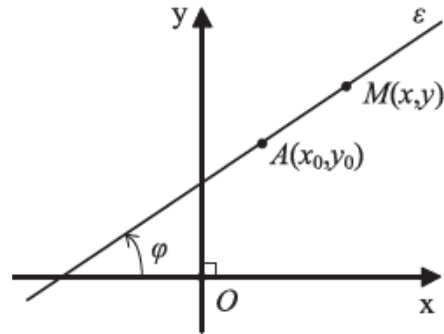
ΑΝ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ε ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $A(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ λ .

- Εξίσωση: $(\varepsilon): y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ (1)

Απόδειξη

Για κάθε Έστω και ένα άλλο(τυχαίο) σημείο $M(x, y)$ της ευθείας (ε) , τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ και η ευθεία (ε) ταυτίζονται, άρα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \lambda_{\varepsilon}$.

- Είναι $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και



$$\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0) \rightarrow (\varepsilon)$$

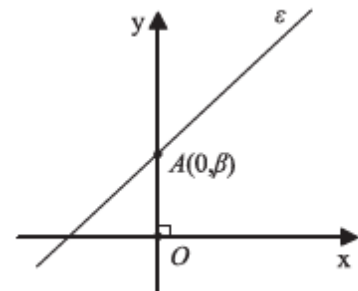
Παράδειγμα

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2, -3)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = -3$, έχει εξίσωση: $\psi - (-3) = -3(x - 2) \Leftrightarrow \psi + 3 = -3x + 6 \Leftrightarrow \psi = -3x + 3$.

2η ΜΟΡΦΗ:

ΑΝ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ε ΤΕΜΝΕΙ ΤΟΝ ΨΨ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $B(0, \beta)$ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ λ .

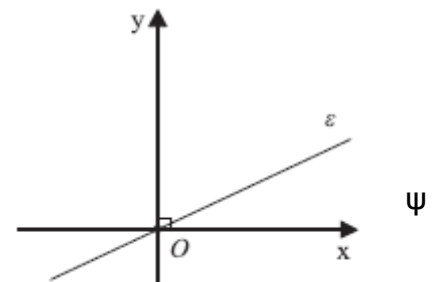
- Εξίσωση: $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ (2)



Ειδικές περιπτώσεις ευθειών:

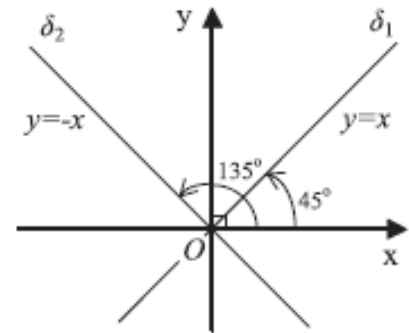
I. Αν η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσεως λ , τότε έχει εξίσωση: $\psi = \lambda x$

:

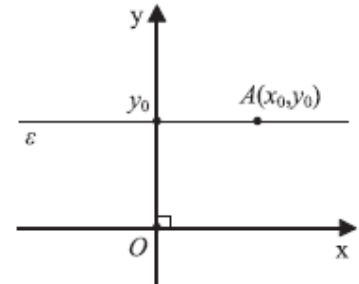


II. Η διχοτόμος της γωνίας $xO\psi$ έχει εξίσωση : $\psi=x$

III. Η διχοτόμος της γωνίας $x'O\psi$ έχει εξίσωση $\psi= -x$



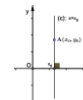
IV. Η ευθεία που περνά από το σημείο $A(x_0, \psi_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x' έχει εξίσωση: $\psi = \psi_0$



- Ο άξονας x' έχει εξίσωση $\psi=0$.

V. Η ευθεία που περνά από το σημείο $A(x_0, \psi_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα ψ' , έχει εξίσωση: $x=x_0$

- Ο άξονας ψ' έχει εξίσωση $x=0$.



Συνθήκη παραλληλίας και καθετότητας ευθειών

Αν δυο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 , του επιπέδου έχουν συντελεστές διεύθυνσεως λ_1, λ_2 , αντίστοιχα, τότε έχουμε:

$$\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{και} \quad \epsilon_1 \perp \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

3. ΕΥΘΕΙΑ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΓΝΩΣΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

Μέθοδος:

ΒΗΜΑ 1^ο: Βρίσκουμε πρώτα το σ.δ. από το τύπο $\lambda = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}$

ΒΗΜΑ 2^ο: Εφαρμόζουμε το τύπο : $\psi - \psi_1 = \lambda(x - x_1)$, με $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ τα γνωστά σημεία.

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-2,3)$,

Λύση:

α) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\epsilon = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{-2-1} = -\frac{1}{3}$.

Αφού διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, η εξίσωσή της είναι:

$$\psi - \psi_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow \psi - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow 3\psi - 6 = -x + 1 \Leftrightarrow x + 3\psi - 7 = 0.$$

4. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{\delta}=(\alpha,\beta)$ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $A(X_1,\Psi_1)$

↓ Μέθοδος:

ΒΗΜΑ 1^ο: Βρίσκουμε πρώτα το σ.δ. από το τύπο $\lambda_\epsilon=\lambda_\delta=\frac{\beta}{\alpha}$

ΒΗΜΑ 2^ο: Εφαρμόζουμε το τύπο : $\psi-\psi_1=\lambda_\epsilon (x-x_1)$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας παράλληλης στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-2,1)$ και να διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $\epsilon_1:2x-3\psi+6=0$ και $\epsilon_2: x-\psi=1 \rightarrow$ **Να λυθεί.**

5. ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΘΕΤΗΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{\delta}=(\alpha,\beta)$ ΚΑΙ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $A(X_1,\Psi_1)$

Μέθοδος:

ΒΗΜΑ 1^ο: Βρίσκουμε πρώτα το σ.δ. από το τύπο : $\lambda_\epsilon\lambda_\delta=-1$ με $\lambda_\delta=\frac{\beta}{\alpha}$.

ΒΗΜΑ 2^ο: Εφαρμόζουμε το τύπο : $\psi-\psi_1=\lambda_\epsilon (x-x_1)$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας κάθετης στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-2,-4)$ και να διέρχεται από το σημείο $A(-1,3) \rightarrow$ **Να λυθεί.**

6. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Μέθοδος:

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας χρειαζόμαστε ένα σημείο της και το συντελεστή διεύθυνσής της ή δύο σημεία της.

• Ο συντελεστής διεύθυνσης μπορεί να δίνεται άμεσα:

(α) Άν η ευθεία που ζητάμε είναι παράλληλη σε άλλη οπότε: $\lambda_1=\lambda_2$

(β) Άν είναι κάθετη σε άλλη ευθεία οπότε: $\lambda_1\lambda_2=-1$.

(γ) Άν περνάει από δύο σημεία $A(x_1,\psi_1), B(x_2,\psi_2)$, $\lambda=\frac{\psi_2-\psi_1}{x_2-x_1}$, με $x_1 \neq x_2$.

• Επίσης έμμεσα μπορεί να δίνεται και το δεύτερο σημείο. Αυτή είναι και η κύρια δυσκολία της άσκησης. Καλούμεθα να αποκρυπτογραφήσουμε τα δεδομένα του προβλήματος με τις γνώσεις μας από την αναλυτική και την ευκλείδια γεωμετρία.

Παράδειγμα -1

Τα μέσα των πλευρών: AB, ΑΓ και ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ είναι τα σημεία: Κ(1,3), Λ(2,-4), και Μ(3,6). Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

Λύση

1^{ος} τρόπος

$$K \text{ μέσο του } AB: \begin{cases} X_K = \frac{X_A + X_B}{2} \Leftrightarrow X_A + X_B = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow X_A + X_B = 2 & (1) \\ \Psi_K = \frac{\Psi_A + \Psi_B}{2} \Leftrightarrow \Psi_A + \Psi_B = 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \Psi_A + \Psi_B = 6 & (2) \end{cases}$$

Όμοια Λ μέσο του ΑΓ ... $X_A + X_\Gamma = 4$ (3) και $\Psi_A + \Psi_\Gamma = -8$ (4)

Όμοια Μ μέσο του ΒΓ: $X_B + X_\Gamma = 6$ (5) και $\Psi_B + \Psi_\Gamma = 12$ (6).

Από τις παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε ότι $A(0,-7), B(2,13)$ και $\Gamma(4,-1)$.

☛ Τότε: $\lambda_{AB} = \frac{\Psi_B - \Psi_A}{X_B - X_A} = \frac{13+7}{2-0} = 10$, συνεπώς η ΑΒ που περνάει από το σημείο: $A(0,-7)$ (ή

το $B(2,13)$) και έχει γνωστό λ , έχει εξίσωση: $\psi - \psi_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow \psi - (-7) = 10(x - 0) \Leftrightarrow \psi = 10x - 7$.

$$\text{Ομοίως: } \lambda_{\text{AG}} = \frac{\psi_{\Gamma} - \psi_{\text{A}}}{\chi_{\Gamma} - \chi_{\text{A}}} = \frac{-1+7}{4-0} = \frac{3}{2}, \text{ άρα: } \text{AG: } \psi - \psi_{\text{A}} = \frac{3}{2}(\chi - \chi_{\text{A}}) \Leftrightarrow \psi + 7 = \frac{3}{2}\chi \Leftrightarrow \psi = \frac{3}{2}\chi - 7.$$

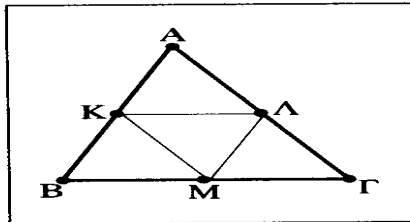
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε : $\psi = -7\chi + 27$.

2ος τρόπος

Γνωρίζουμε από την ευκλείδια γεωμετρία ότι αφού: Κ,Λ μέσα των ΑΒ, ΑΓ είναι: ΚΛ// ΒΓ.

$$\text{Όμως: } \lambda_{\text{KL}} = \frac{\psi_{\text{L}} - \psi_{\text{K}}}{\chi_{\text{L}} - \chi_{\text{K}}} = \frac{-4-3}{2-1} = -7. \text{ Άρα: } \text{KL//BG} \Leftrightarrow \lambda_{\text{KL}} = \lambda_{\text{BG}} \Leftrightarrow \lambda_{\text{BG}} = -7. \text{ Συνεπώς η εξίσωση}$$

$$\text{της BG αφού περνάει από σημείο M(3,6) και έχει γνωστό λ: } \psi - \psi_{\text{M}} = \lambda(\chi - \chi_{\text{M}}) \Leftrightarrow \psi - 6 = -7(\chi - 3) \Leftrightarrow \psi = -7\chi + 27.$$

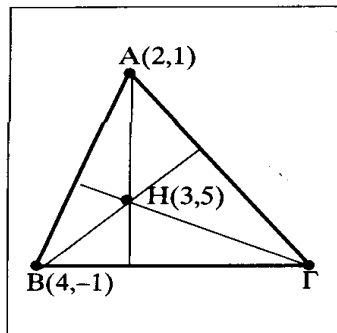


Παράδειγμα -2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται οι κορυφές του Α(2,1) και Β(4,-1). Αν το ορθόκεντρό του είναι το σημείο Η(3,5), να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

Λύση:

Αρχική σκέψη:



Το ορθόκεντρο είναι σημείο τομής των υψών, που σημαίνει ότι η ΑΗ προεκτεινόμενη είναι ύψος, δηλ. ΑΗ⊥ΒΓ. Ομοίως ΒΗ⊥ΑΓ και ΓΗ⊥ΑΒ...

$$\text{Είναι } \lambda_{\text{AH}} = \frac{\psi_{\text{H}} - \psi_{\text{A}}}{\chi_{\text{H}} - \chi_{\text{A}}} = \frac{5-1}{3-2} = 4, \lambda_{\text{BH}} = \frac{\psi_{\text{H}} - \psi_{\text{B}}}{\chi_{\text{H}} - \chi_{\text{B}}} = \frac{5+1}{3-4} = -6.$$

$$\text{Τότε λόγω καθετότητας: } \lambda_{\text{BG}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{AH}}} = -\frac{1}{4} \text{ και } \lambda_{\text{AG}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{BH}}} = \frac{1}{6}.$$

Βρίσκουμε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΓ και ΑΓ:

$$\text{BG: } \psi - \psi_{\text{B}} = \lambda_{\text{BG}}(\chi - \chi_{\text{B}}) \Leftrightarrow \psi + 1 = -\frac{1}{4}(\chi - 4) \Leftrightarrow \chi + 4\psi = 0$$

$$\text{AG: } \psi - \psi_{\text{A}} = \lambda_{\text{AG}}(\chi - \chi_{\text{A}}) \Leftrightarrow \psi - 1 = \frac{1}{6}(\chi - 2) \Leftrightarrow \chi - 6\psi + 4 = 0$$

$$\text{και AB: } \psi - \psi_{\text{A}} = \frac{\psi_{\text{A}} - \psi_{\text{B}}}{\chi_{\text{A}} - \chi_{\text{B}}}(\chi - \chi_{\text{A}}) \Leftrightarrow \psi - 1 = \frac{2}{-2}(\chi - 2) \Leftrightarrow \chi + \psi - 3 = 0.$$

...ασκήσεις

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α.	Αν φ η γωνία που σχηματίζει ευθεία (ε) με τον άξονα xx' τότε $\lambda\varepsilon=\varepsilon\varphi\varphi$ με $0\leq\varphi<\pi$	Σ Λ
β.	Αν η $\varphi=0$ τότε δεν ορίζεται $\lambda\varepsilon$	Σ Λ
γ.	Η ευθεία που διέρχεται από τα $A(1,2)$, $B(1,-3)$ έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda=0$	Σ Λ
δ.	Η εξίσωση $\psi=2\chi$ είναι διχοτόμος της 1ης -3ης γωνίας των αξόνων.	Σ Λ
ε.	Η $\psi=(2-\sin\theta)\chi$ σχηματίζει με τον $x'\chi$ οξεία γωνία.	Σ Λ
ζ.	Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το $M(3,2)$ έχουν εξίσωση $\psi-2=\lambda(\chi-3)$	Σ Λ
η.	Η εξίσωση $\chi^2-\alpha^2\psi^2=0$, με $\alpha\neq 0$ παριστάνει δυο ευθείες που διέρχονται από το $(0,0)$ και είναι μεταξύ τους κάθετες.	Σ Λ
θ.	Η ευθεία $-\psi=3\chi+2$ είναι παράλληλη στην ευθεία $6\chi+2\psi=0$ και τέμνει τον $\psi\psi'$ στο 2.	Σ Λ
ι.	Η ευθεία που διέρχεται από το $A(-3,2)$ και είναι παράλληλη στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$ έχει εξίσωση $\psi=2$.	Σ Λ
κ.	Αν $\varepsilon_1: \chi=4$ $\varepsilon_2: \psi=-8$ τότε $\lambda\varepsilon_1 \cdot \lambda\varepsilon_2 = -1$.	Σ Λ

2. Να αντιστοιχίσετε τις ευθείες της στήλης Α με τις αντίστοιχες γωνίες της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
ευθεία	Γωνία με $x'\chi$
$-y=2x+1$	90°
$3x-y=1$	$\pi/6$
$x=8$	Οξεία
$3y=\sqrt{3}x+6$	αμβλεία
$\frac{\sqrt{3}}{3}y=x+\frac{2}{\sqrt{3}}$	45°
$x-y=-1$	$\pi/3$
$y=-5$	0°
	45°
$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$	135°

3. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3)$ και $B(6,1)$. Να βρείτε :

- α] Τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον $x'\chi$. β] Την εξίσωση της AB .
 γ] Τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $M(2\lambda+1, 3-4\lambda)$ να ανήκει στην AB .

4. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται απ' το συμμετρικό του σημείου $A(-1,3)$ ως προς την αρχή αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: 3x-2\psi+1=0$.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, 0)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{-2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A = (1, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)$.

6. Αν δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου βρίσκονται στις ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y + 2 = 0$, $\varepsilon_2: x - 2y + 6 = 0$ και το κέντρο του είναι $K(-1, -2)$, να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών του.

7. Ενός ρόμβου ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $2x + y - 5 = 0$, η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $x - y - 1 = 0$ και η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(1, 3)$. Βρείτε τις συντεταγμένες κορυφών και πλευρών του.

8. Δίνονται τα σημεία $A(4, 2)$ και $B(3, -5)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 7x + y - 23 = 0$. Να βρεθεί σημείο Μ της (ε) ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

9. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθ. τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση την $y = -x + 7$.

10. Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $x'x$, $y'y$ στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 6)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 .

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2 .

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 .

11. Έστω Μ $(3, 5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με $A(1, 1)$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του σημείου Β.

β) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα $x'x$ έτσι ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$.

12. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y + x = 1$ και το σημείο $A(2, -4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε) .

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) .

γ) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε) .

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(4, 1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για

το οποίο ισχύει $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ.

14. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda + 1, \lambda - 1)$, $B(2, 2)$ και $\Gamma(4, 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ.

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ.

γ) Για $\lambda = 4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.

2.2 Η ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Α. **ΠΗ ΕΥΘΕΙΑ (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$** (ΣΕΛ. 66-70)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1) και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

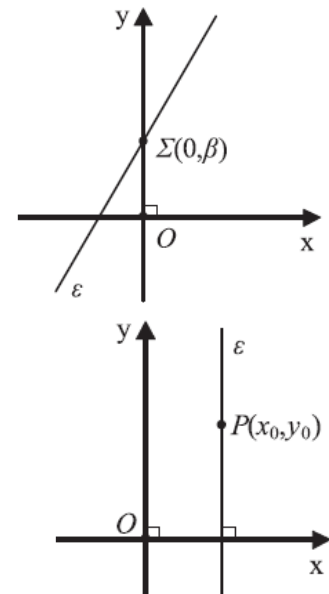
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• **Ορθό:** Έστω (ε) μια ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

– **1^η περίπτωση:** Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $P(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta \Rightarrow \lambda x + (-1)y + \beta = 0$, η οποία είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$.

– **2^η περίπτωση:** Αν η ευθεία (ε) είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$, τότε θα έχει εξίσωση

$$x = x_0 \Rightarrow x + 0y + (-x_0) = 0, \text{ η οποία είναι της μορφής } Ax + By + \Gamma = 0.$$



• **Αντίστροφα:** Έστω η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1).

– **1^η περίπτωση:** Αν $B \neq 0$ τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$, που είναι εξίσωση ευθείας μορφής $y = \lambda x + \beta$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$ και η οποία τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $P\left(0, -\frac{\Gamma}{B}\right)$.

– **2^η περίπτωση:** Αν $B = 0$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $A \neq 0$ και η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0 \Rightarrow Ax + 0y + \Gamma = 0 \Rightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$, που είναι εξίσωση ευθείας μορφής $X = X_0$ κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\frac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

ΤΕΛΙΚΑ:

Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1) παριστάνει ευθεία.



Γενικά:

- Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ η (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$
- Αν $A = 0$ και $B \neq 0$ η (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$ και είναι η οριζόντια ευθεία $\varepsilon // x'x$.
- Αν $B = 0$ και $A \neq 0$ η (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης και είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = x_0 = -\frac{\Gamma}{A}$, δηλαδή $\varepsilon \perp x'x$

Β. Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

B1. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα: $\vec{\delta} = (B, -A)$

Απόδειξη

Έστω ε η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$. Είδαμε προηγουμένως ότι:

– Αν $B \neq 0$ τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$

και επομένως είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$, αφού $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{y}{x} = -\frac{A}{B} = \lambda_{\varepsilon}$

– Αν $B = 0$, τότε η ε είναι παράλληλη προς τον άξονα yy' και επομένως παράλληλη και πάλι προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A) = (0, -A)$

B2. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα: $\vec{\eta} = (A, B)$

Απόδειξη

Το $\vec{\delta} = (B, -A)$ με το $\vec{\eta} = (A, B)$ έχουν: $\vec{\delta} \cdot \vec{\eta} = (B, -A) \cdot (A, B) = BA + (-A)B = BA - AB = 0$

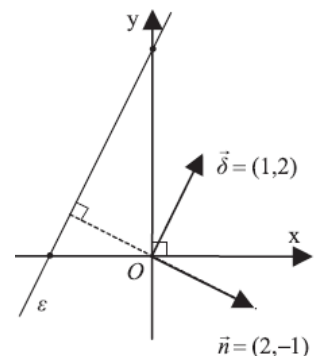
Επομένως: $\vec{\delta} \perp \vec{\eta} \Rightarrow \varepsilon \perp \vec{\eta}$

Παράδειγμα

Η ευθεία $2x - y + 4 = 0$, $A=2$, $B=-1$ και έχει $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$ είναι

παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A) = (-1, -2)$ και κάθετη στο

διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B) = (2, -1)$.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Γενικά:

→ Έστω ευθεία (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ (1), τότε:

- Αν θέλουμε διάνυσμα $\vec{\delta} // \varepsilon$ τότε $\vec{\delta} = (B, -A)$.
- Αν θέλουμε διάνυσμα $\vec{\delta} \perp \varepsilon$ τότε $\vec{\delta} = (A, B)$.

Γ. Σχετική θέση δύο ευθειών

➤ Έστω δύο ευθείες

$$(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \Rightarrow A_1x + B_1y = -\Gamma_1 \quad (1) \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \Rightarrow A_2x + B_2y = -\Gamma_2 \quad (2).$$

$$\text{Έτσι έχουμε το σύστημα } (\Sigma): \begin{cases} A_1x + B_1y = -\Gamma_1 \\ A_2x + B_2y = -\Gamma_2 \end{cases}.$$

➤ Τα αντίστοιχα παράλληλα διανύσματα είναι: $\vec{\delta}_1 = (B_1, -A_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (B_2, -A_2)$.

➤ Επομένως οι σχετικές θέσεις των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

➤ Η ορίζουσα $\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ είναι ίδια με την ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ του συστήματος των ευθειών.

Διερεύνηση

1. Αν $\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{\delta}_1 \not\parallel \vec{\delta}_2$ δηλαδή η ορίζουσα του συστήματος

$D \neq 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ τότε ε_1 και ε_2 τέμνονται, δηλαδή το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$\underline{x = \frac{D_x}{D}}, \quad \underline{y = \frac{D_y}{D}}, \text{ όπου } D_x = \begin{vmatrix} -\Gamma_1 & B_1 \\ -\Gamma_2 & B_2 \end{vmatrix} \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} A_1 & -\Gamma_1 \\ A_2 & -\Gamma_2 \end{vmatrix}.$$

2. Αν $\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2$ δηλαδή η ορίζουσα του συστήματος

$$D = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$$

- $\varepsilon_1 \not\equiv \varepsilon_2$ (αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$) (παράλληλες) $\rightarrow$ το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ ή
- $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ (αν $D_x = D_y = 0$) (ταυτίζονται) $\rightarrow$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

ΠΙΟ ΣΥΝΤΟΜΑ

1. Αν $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται $\rightarrow 1$ λύση στο σύστημα .

2. Αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Rightarrow \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ (ταυτίζονται) $\rightarrow$ άπειρες λύσεις στο σύστημα .

3. Αν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Rightarrow \varepsilon_1 \not\equiv \varepsilon_2$ (παράλληλες) $\rightarrow$ το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι σχετικές σχέσεις των παρακάτω ευθειών: $\varepsilon_1: 2x + 3y = 7$ και $\varepsilon_2: -x + y = 4$

Λύση

Έχουμε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

- Η ορίζουσα του συστήματος (συντελεστές των x, y) είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$,
άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 → τέμνονται.
- Επίσης η ορίζουσα $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 12 = -5$ (στην ορίζουσα D αντικαθιστούμε την στήλη των x με την στήλη των σταθερών όρων του 2^{ου} μέλους)
- Επίσης η ορίζουσα $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 7 = 15$ (στην ορίζουσα D αντικαθιστούμε την στήλη των y με την στήλη των σταθερών όρων του 2^{ου} μέλους)
- ;Ra $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{5} = -1$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{15}{5} = 3$. Οπότε τέμνονται στο σημείο $A(-1, 3)$.

Δ. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ – ΔΕΣΜΗ (ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ) ΕΥΘΕΙΩΝ

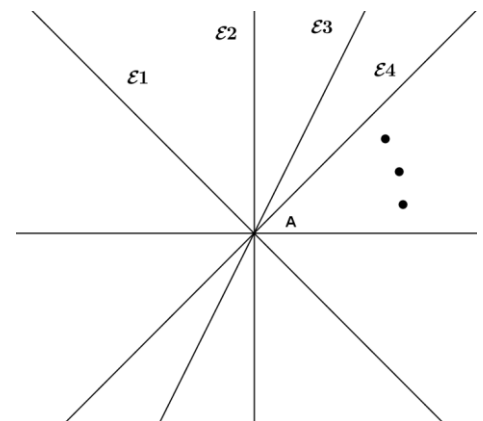
Παραμετρική εξίσωση ευθείας: Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ που εκτός των αγνώστων περιέχει και παράμετρο $\lambda, \mu, \dots$

Ορισμός

Οικογένεια ευθειών ή Δέσμη ευθειών:

Λέμε ένα σύνολο ευθειών στο επίπεδο που διέρχονται από το ίδιο σημείο και κφράζονται με την παραμετρική εξίσωση ευθείας.

π.χ. $(x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbf{R}$.



ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟΓια ν' αποδείξουμε ότι :1ο] μια 1-βάθμια παραμετρική εξίσωση ως προς x και ψ παριστάνει ευθεία**Μέθοδος** ☛Με τη σχέση $|A| + |B| \neq 0$ αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $Ax + B\psi + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.Δηλαδή λύνω το (Σ): $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ και τις κοινές(αν υπάρχουν) λύσεις της παραμέτρου τις εξαιρώαπό το $\mathbb{R}$.2ο]διέρχεται από σταθερό σημείο, εργαζόμαστε ως εξής:**α' τρόπος**

Δίνουμε δύο τυχαίες τιμές στη παράμετρο και προκύπτουν δύο ευθείες.

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε το σημείο τομής τους(x_0, ψ_0).Αποδεικνύουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την παραμετρική εξίσωση για κάθε τιμή της παραμέτρου. Το $M(x_0, \psi_0)$ είναι σταθερό σημείο.**β' τρόπος**Μετατρέπουμε τη σχέση σε μηδενικό πολώνυμο ως προς τη παράμετρο λ (όλα 1^ο μέλος=0) και από το μηδενισμό των συντελεστών βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σταθερού σημείου.Παράδειγμα 1^οΔίνεται η εξίσωση $(3-\lambda)x + (\lambda+1)\psi = \lambda+5, \lambda \in \mathbb{R}$ (1).i) Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία.ii) Ναδειχθεί ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, όλες οι ευθείες περνούν από σταθερό σημείο.iii) Να βρείτε μία ευθεία της εξίσωσης (1) που είναι παράλληλη της ευθείας (**η**): $x - 2y = 0$.Λύσηi) Είναι $A=3-\lambda$ και $B=\lambda+1$. Οπότε $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ και $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-\lambda = 0 \\ \lambda+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$ Άρα δεν μπορεί να είναι συγχρόνως $A=0$ και $B=0$ και συνεπώς η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.ii) Επειδή ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, δίνουμε δύο τυχαίες τιμές στο λ και από τις δύο εξισώσεις

που προκύπτουν λύνοντας το σύστημα.

• Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται: $3x + \psi = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \psi = 5 \\ \psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \psi = 2 \end{cases}$.• Για $\lambda=3$ η (1) γίνεται: $4\psi = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\psi = 8 \\ \psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 2 \end{cases}$.**Επαλήθευση:** Πρέπει αυτό να επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.Πράγματι η (1) για $x=1$ και $\psi=2$ γίνεται: $(3-\lambda) \cdot 1 + (\lambda+1) \cdot 2 = \lambda+5 \Leftrightarrow \lambda+5 = \lambda+5$. Άρα το κοινό σημείο όλων των ευθειών είναι το $K(1,2)$.ii) Έστω ε_1 η ζητούμενη ευθεία της οικογένειας ευθειών της εξίσωσης (1), που περνάει από το $K(1,2)$.Είναι $\varepsilon_1 // \eta$ με (**η**): $x - 2y = 0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\eta} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\varepsilon_1} = \frac{1}{2}}$ ➤ Εξίσωση της ε_1 : $y - y_K = \lambda_{\varepsilon_1} (x - x_K) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow \boxed{x - 2y + 3 = 0} \rightarrow \varepsilon_1$

Προσοχή! Δεν θα βρούμε τον συντελεστή της ε της εξίσωσης (1) γιατί έχει παράμετρο λ και θέλει περιπτώσεις:

1^η περ. $\rightarrow$ Για $B \neq 0 \Rightarrow \lambda + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -1$...

2^η περ. $\rightarrow$ Για $B = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$...

Ε. ΕΥΡΕΣΗ 2 ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΑΠΟ 2-ΒΑΘΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ

➤ 1η Μέθοδος $\rightarrow$ παραγοντοποίηση

➤ 2η Μέθοδος $\rightarrow$ την θεωρούμε 2-βάθμια ως προς x με y =σταθερό ή 2-βάθμια ως προς y με x =σταθερό και βρίσκουμε 2 εξισώσεις ευθειών .

Παράδειγμα 2^ο:

Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $x^2 - \psi^2 - 2x - 4\psi - 3 = 0$ (1), παριστάνει δύο ευθείες. Να εξετασθεί η σχετική τους θέση.

Λύση

1^{ος} τρόπος:

Η (1) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$(x^2 - 2x) - (\psi^2 + 4\psi) = 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - (\psi^2 + 4\psi + 4) = 3 + 1 - 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (\psi+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\psi-2)(x-1+\psi+2) = 0 \Leftrightarrow \text{ή } x-1-\psi-2=0 \text{ ή } x-1+\psi+2=0.$$

Οπότε έχουμε δύο ευθείες $\begin{cases} \varepsilon_1 : x - \psi = 3 \\ \varepsilon_2 : x + \psi = -1 \end{cases}$ με $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = 1 \cdot (-1) = -1$, άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

2^{ος} τρόπος:

Η (1) μετασχηματίζεται ως εξής: $x^2 - 2x - (\psi^2 + 4\psi + 3) = 0$, δηλ. τριώνυμο ως προς x οπότε: $\Delta = 4 + 4(\psi^2 + 4\psi + 3) = \dots = [2(\psi + 2)]^2$.

$$\text{Άρα } x = \frac{2 \pm 2(\psi + 2)}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm (\psi + 2), \text{ απ' όπου παίρνουμε τις ευθείες } \begin{cases} \varepsilon_1 : x - \psi = 3 \\ \text{ή} \\ \varepsilon_2 : x + \psi = -1 \end{cases}$$

Ζ. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ε_1 και ε_2

Μέθοδος $\rightarrow$

- Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των λ_1 , λ_2 και προκύπτει $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα τέμνονται.

- Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$ με χρήση του τύπου

$$\vec{\delta} // \varepsilon \Leftrightarrow \vec{\delta} = (B, -A) \text{ με } (\varepsilon): Ax + B\psi + \Gamma = 0$$

- Γράφουμε $\text{syn}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{syn}(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \dots$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1: x - \psi + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + \psi - 3 = 0$

Λύση

$$\lambda_1 = \frac{-A}{B} = 1 \text{ και } \lambda_2 = \frac{-A}{B} = -2 \text{ με } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ άρα τέμνονται.}$$

Οι ευθείες είναι παράλληλες προς τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (B, -A) = (1, 1)$ και $\vec{\delta}_2 = (1, -2)$.

$$\text{Επομένως } \text{syn}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{syn}(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{άρα } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \simeq 72^\circ.$$

...ασκήσεις

15. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

A	Η εξίσωση $Ax+B\psi+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία αν $A \neq 0$ και $B \neq 0$.	Σ Λ
B	Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ είναι κάθετο στην $Ax+B\psi+\Gamma=0$, με A ή $B \neq 0$.	Σ Λ
Γ	Το διάνυσμα $\vec{\delta'} = (\kappa B, -\kappa A)$ είναι παράλληλο στην $Ax+B\psi+\Gamma=0$ με A ή $B \neq 0, \kappa \neq 0$.	Σ Λ
Δ	Η οξεία γωνία δυο ευθειών είναι ίση ή παραπληρωματική με τη γωνία που σχηματίζουν τα κάθετα προς αυτές διανύσματα	Σ Λ
Ε	Οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση $(\chi+3\psi+5)+\lambda \cdot (4\chi+\psi-2)=0$ διέρχονται από το $M(1,2)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$	Σ Λ

16. Να γίνει η αντίστοιχηση

Ευθεία	κάθετο διάνυσμα	παράλληλο διάνυσμα
$2\psi-\chi=0$	$(0,1)$	$(2,0)$
$-3\psi=\chi-5$	$(1,3)$	$(2,1)$
$\chi-8=0$	$(-1,2)$	$(3,-1)$
$2\chi=\psi$	$(5,0)$	$(-1,-2)$
$\psi=-5$	$(2,-1)$	$(0,6)$
$\frac{\chi}{4}-\frac{\psi}{5}=1$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{5}\right)$	$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}\right)$

17. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: \chi+\psi-4+\mu(2\chi-\psi+6)=0$. Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε η (ϵ):

α) να περνά από την αρχή των αξόνων β) να περνά από το σημείο $A(1,2)$.

γ) να είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: \chi-3\psi+8=0$.

18. Να βρείτε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $\epsilon_1: (2\lambda+1)\chi-3\lambda\psi-2=0$ και $\epsilon_2: 3\lambda\chi+(\lambda+2)\psi+1=0$

να είναι : α] παράλληλες β] κάθετες.

19. Δίδεται η εξίσωση $(\kappa^2+\kappa-2)\chi+(\kappa^2-4)\psi+2\kappa+4=0$. (1)

A. Να βρεθούν οι τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία.

B. Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες οι ευθείες αυτές περνούν από το $A(4,2)$.

Γ. Να βρεθούν τα $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να :

Γ1. είναι παράλληλη στον xx' β) είναι παράλληλη στον yy'

Γ2. διέρχεται από την αρχή των αξόνων δ) είναι κάθετη στην ευθεία $\chi+\psi+1=0$.

Γ3. Να δείξετε ότι η (1) διέρχεται από σταθερό σημείο.

20. Δίνεται η εξίσωση (ϵ): $\chi-y+\lambda \cdot (\chi+y+2)=0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

A. Δείξατε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

Γ. Να βρείτε εκείνη την ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (1) που είναι κάθετη στην ευθεία (η): $y=2x+2012$.

21. Θεωρούμε την εξίσωση $(\lambda^2+2\lambda-3)\chi+(2\lambda^2+\lambda-3)y-3\lambda^2-3\lambda+6=0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία.

B. Να δείχτεί ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

Γ. Να βρείτε την ευθεία της (1) που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-3,0)$

Δ. Να βρείτε την ευθεία της (1) που είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-3,3)$

22. Θεωρούμε μια ευθεία (ϵ) και σημείο $A(6,-1)$ εκτός της (ϵ). Έστω $B(2,1)$ η προβολή του A στην (ϵ). Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ϵ).

β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ϵ).

2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

A. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Η απόσταση σημείου $M(x_0, y_0)$ από ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$, δίνεται από τη σχέση: $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Παράδειγμα-1

Η απόσταση του σημείου $M(-1, 2)$ από την ευθεία $\varepsilon: 4x + 3y + 8 = 0$ είναι ίση με

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4(-1) + 3 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|10|}{5} = 2$$

Παράδειγμα-2

Να βρεθεί σημείο στον άξονα x' που να ισαπέχει από την αρχή των αξόνων και από την ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y - 12 = 0$.

Λύση

Έστω $M(x_0, 0)$ το ζητούμενο σημείο. Τότε: $d(M, \varepsilon) = \frac{|3x_0 + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x_0 - 12|}{5}$ και $(OM) = |x_0|$.

$$\text{Άρα } \frac{|3x_0 - 12|}{5} = |x_0| \Leftrightarrow 3x_0 - 12 = \pm 5x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 12 = 5x_0 \Rightarrow 2x_0 = -12 \Rightarrow x_0 = -6 \text{ άρα } M_1(-6, 0) \\ \text{ή} \\ 3x_0 - 12 = -5x_0 \Rightarrow 8x_0 = 12 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2} \text{ άρα } M_2(\frac{3}{2}, 0) \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.

Η εξίσωση $\frac{|3x_0 - 12|}{5} = |x_0|$ μπορεί να λυθεί και με ύψωση στο τετράγωνο. Το προτιμάμε αν η $\sqrt{A^2 + B^2}$ δεν υπολογίζεται ακριβώς, οπότε με την ύψωση διώχνουμε και τη ρίζα.

Παράδειγμα-2β (Εφαρμογή -1σελ.ιδα 73)

Να αποδείξετε ότι η απόσταση των ευθειών $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$ δίνεται από τον

τύπο: $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$

Απόδειξη

- Η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 ισούται με την απόσταση οποιουδήποτε σημείου της ε_1 από την ε_2 .

- Βρίσκουμε ένα σημείο της ε_1 : Για $x = 0$ από την $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1 \Rightarrow y = \beta_1$, άρα το σημείο

$$A(0, \beta_1) \text{ ανήκει στην } \varepsilon_1, \text{ οπότε έχουμε: } d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|\lambda \cdot 0 - \beta_1 + \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

(αφού $\varepsilon_2: \lambda x - y + \beta_2 = 0$)

απέξω ως τύπος

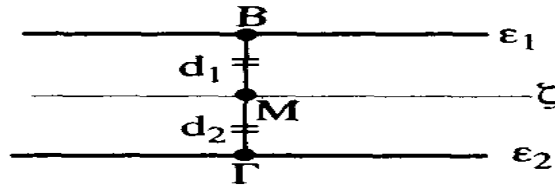
Β. ΜΕΣΟΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΔΥΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Μέθοδος:☛

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δυο δοσμένες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι: μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών, αν οι ευθείες είναι παράλληλες και ισχύει η σχέση: $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$ με $M(x_0, \psi_0)$ σημείο της μεσοπαράλληλης (ζ).

Μέθοδος: Χρησιμοποιούμε τη σχέση: $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1\psi + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2\psi + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

με $\varepsilon_1: A_1x + B_1\psi + \Gamma_1 = 0$, $\varepsilon_2: A_2x + B_2\psi + \Gamma_2 = 0$ και $M(x, \psi)$ σημείο της μεσοπαράλληλης (ζ).



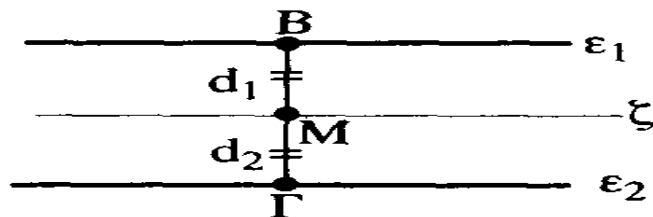
Παράδειγμα-3

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 2x + \psi - 8 = 0$ και $\varepsilon_2: 4x + 2\psi - 8 = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλής τους.

Λύση

Έστω $M(x_M, \psi_M)$ σημείο της μεσοπαράλληλης ζ , τότε: $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$ δηλ. :

$$\frac{|2x_M + \psi_M - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|4x_M + 2\psi_M - 8|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} \Leftrightarrow \frac{|2x_M + \psi_M - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x_M + 2\psi_M - 8|}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{20}|2x + \psi - 8| = \sqrt{5}|4x + 2\psi - 8| \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{5}(2x + \psi - 8) = \sqrt{5}(4x + 2\psi - 8) \\ 2\sqrt{5}(2x + \psi - 8) = -\sqrt{5}(4x + 2\psi - 8) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2\psi - 16 = 4x + 2\psi - 8 \rightarrow \text{ΑΔΥΝΑΤΗ} \\ 4x + 2\psi - 16 = -4x - 2\psi + 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8x + 4\psi - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{2x + \psi - 6 = 0} \rightarrow \text{η μεσοπαράλληλη } (\varepsilon).$$

Παρατήρηση

Ένας άλλος τρόπος για την εύρεση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2 είναι ο εξής: Θεωρούμε τυχαία ευθεία ε_3 που τέμνει τις ε_1 και ε_2 . Βρίσκουμε τα σημεία τομής, έστω A και B. Βρίσκουμε το μέσο M του AB. Η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη της ε_1 .

Γ. ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές αν τέμνονται .

Μέθοδος:

1ος τρόπος: Χρησιμοποιούμε τη σχέση: $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|A_1x + B_1y + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad \text{με} \quad \varepsilon_1: A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \quad \varepsilon_2: A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$$

και $M(x, y)$ σημείο της διχοτόμου (δ).

ΠΡΟΣΟΧΗ! Από το απόλυτο βγάζουμε δύο εξισώσεις.

2ος τρόπος: Βρίσκουμε το σημείο τομής K των ε_1 και ε_2 . Παίρνουμε δύο τυχαία σημεία A και B των ευθειών.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των $\vec{KA}$ και $\vec{KB}$ καθώς και τα μέτρα τους.

Θεωρούμε σημείο $M(x_0, y_0)$ στη διχοτόμο της γωνίας και τότε:

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{|\vec{KM} \cdot \vec{KA}|}{|\vec{KM}| \cdot |\vec{KA}|} = \frac{|\vec{KM} \cdot \vec{KB}|}{|\vec{KM}| \cdot |\vec{KB}|}, \quad \text{από όπου βρίσκουμε την ευθεία στην οποία ανήκει}$$

το $M(x_0, y_0)$, δηλαδή τη διχοτόμο.

Παράδειγμα-4

Δίνονται οι ευθείες (ε_1): $2x + y - 3 = 0$ και (ε_2): $3x - y + 2 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι (ε_1) και (ε_2).

Λύση

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε μια από τις διχοτόμους, αν και μόνο αν $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3x - y + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x - y + 2|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|2x + y - 3| = |3x - y + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(2x + y - 3) = 3x - y + 2 \\ \sqrt{2}(2x + y - 3) = -3x + y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} - 3x + y = 0 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 3\sqrt{2} + 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

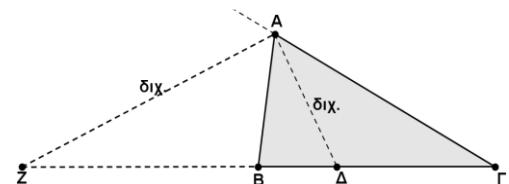
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{2} - 3)x + (\sqrt{2} + 1)y - 3\sqrt{2} - 2 = 0 \\ (2\sqrt{2} + 3)x + (\sqrt{2} - 1)y - 3\sqrt{2} + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{Άρα οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι}$$

ευθείες ε_1 και ε_2 είναι οι ευθείες:

$$(\varepsilon): \{(2\sqrt{2} - 3)x + (\sqrt{2} + 1)y - 3\sqrt{2} - 2 = 0 \text{ και } (\varepsilon') : \{(2\sqrt{2} + 3)x + (\sqrt{2} - 1)y - 3\sqrt{2} + 2 = 0$$

Παρατηρήσεις

- Έστω ότι δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ζητείται η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας A . Τότε με τον τρόπο που εργαστήκαμε στο παράδειγμα 2, βρίσκουμε τις διχοτόμους (εσωτερική και εξωτερική) της γωνίας A χωρίς να μπορούμε να αποφανθούμε για το ποια είναι η εσωτερική και ποια η εξωτερική.
- Για να διαπιστώσουμε ποια είναι η εσωτερική και ποια η εξωτερική, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν Δ και Z είναι αντίστοιχα τα ίχνη τους στην $B\Gamma$ τότε
 - ✓ $(B, \Gamma, \Delta) > 0 \Rightarrow$ η εσωτερική και
 - ✓ $(B, \Gamma, Z) < 0 \Rightarrow$ η εξωτερική.

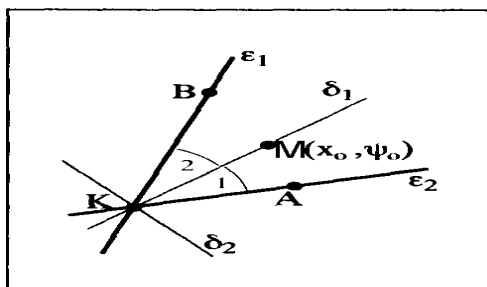


ΠΡΟΣΟΧΗ!! Αν το τρίγωνο είναι σωσκελές με κορυφή Α τότε η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α είναι παράλληλη της ΒΓ.

Παράδειγμα-5

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 4x - y + 14 = 0$ και $\epsilon_2: x - 4y - 4 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Λύση



Το σύστημα: $\begin{cases} 4x - y + 14 = 0 \\ x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$ των ϵ_1 και ϵ_2 , δίνει: $(x_K, y_K) = (-4, -2)$.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε το Α στην ϵ_2 με: $A(0, -1)$, το $B(0, 14)$ στην ϵ_1 , και το $M(x_0, y_0)$ στη διχοτόμο δ_1 έχουμε:

- $\vec{KA} = (x_A - x_K, y_A - y_K) = (0 - (-4), -1 - (-2)) = (4, 1)$ με: $|\vec{KA}| = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$.
- $\vec{KB} = (x_B - x_K, y_B - y_K) = (0 - (-4), 14 - (-2)) = (4, 16)$ με: $|\vec{KB}| = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$.
- $\vec{KM} = (x_M - x_K, y_M - y_K) = (x_0 + 4, y_0 + 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε: } \hat{K}_1 = \hat{K}_2 &\Rightarrow \frac{\vec{KM} \cdot \vec{KA}}{|\vec{KM}| \cdot |\vec{KA}|} = \frac{\vec{KM} \cdot \vec{KB}}{|\vec{KM}| \cdot |\vec{KB}|} \Leftrightarrow \frac{(x_0 + 4)4 + (y_0 + 2) \cdot 1}{\sqrt{17}} = \\ &= \frac{(x_0 + 4) \cdot 4 + (y_0 + 2) \cdot 16}{4\sqrt{17}} \Leftrightarrow \frac{4(x_0 + 4) + y_0 + 2}{1} = \frac{4(x_0 + 4) + 16(y_0 + 2)}{4} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 + y_0 + 18 = x_0 + 4 + 4y_0 + 8 \Leftrightarrow 3x_0 - 3y_0 + 6 = 0. \text{ Άρα μια διχοτόμος είναι } \delta_1: x - y + 2 = 0$$

Για να βρούμε τη δ_2 σκεπτόμαστε ως εξής: Αφού $\delta_2 \perp \delta_1 \Leftrightarrow \lambda_{\delta_2} = -\frac{1}{\lambda_{\delta_1}} = -1$, άρα η δ_2

περνάει από το $K(-4, -2)$, συνεπώς: $y - y_K = \lambda(x - x_K) \Leftrightarrow y + 2 = -1(x + 4) \Leftrightarrow y + x + 6 = 0$.

Δ. ΕΥΡΕΣΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Μέθοδος: Εκτός των άλλων τρόπων. . .

Για την εύρεση της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος AB, θεωρούμε $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου και χρησιμοποιούμε τη σχέση: $d(M, A) = d(M, B)$.

Παράδειγμα-6

Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $A(2, 4)$ και $B(-1, 3)$.

Λύση

Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του AB αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} d(M, A) &= d(M, B) \Leftrightarrow \sqrt{(2-\chi)^2 + (4-\psi)^2} = \sqrt{(-1-\chi)^2 + (3-\psi)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2-\chi)^2 + (4-\psi)^2 = (-1-\chi)^2 + (3-\psi)^2 \Leftrightarrow 4 - 4\chi + \chi^2 + 16 - 8\psi + \psi^2 = 1 + 2\chi + \chi^2 + 9 - 6\psi + \psi^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6\chi - 2\psi + 10 = 0 \Leftrightarrow 3\chi + \psi - 5 = 0. \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB είναι $3\chi + \psi - 5 = 0$.

Ε. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

Παράδειγμα-7

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 2\chi - 3\psi + 1 = 0$ και το σημείο: $A(1, 3)$. Να βρεθεί το συμμετρικό B του A με άξονα συμμετρίας την ε .

Λύση:

Η ε έχει συντελεστή συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda = \frac{2}{3}$. Άρα η κάθετη κ από το A στην ε θα έχει συντελεστή: $\lambda = -\frac{3}{2}$. Συνεπώς έχει εξίσωση:

$\psi - \psi_A = \lambda(\chi - \chi_A) \Leftrightarrow \psi - 3 = -\frac{3}{2}(\chi - 1) \Leftrightarrow 2\psi + 3\chi - 9 = 0$. Η τομή των κ και ε δίνει το σημείο M που είναι μέσο του AB . Άρα:

$$\left. \begin{aligned} 2\chi - 3\psi + 1 &= 0 \\ 3\chi + 2\psi - 9 &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -6\chi + 9\psi - 3 &= 0 \\ 6\chi + 4\psi - 18 &= 0 \end{aligned} \right\} (+) : 13\psi - 21 = 0 \Leftrightarrow \psi_M = \frac{21}{13}, \text{ οπότε: } \chi_M = \frac{25}{13}.$$

Αφού το M είναι μέσο του AB θα έχουμε:

$$\begin{cases} \chi_M = \frac{\chi_A + \chi_B}{2} \Leftrightarrow 2\chi_M - \chi_A = \chi_B \Leftrightarrow \chi_B = \frac{37}{13} \\ \psi_M = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} \Leftrightarrow 2\psi_M - \psi_A = \psi_B \Leftrightarrow \psi_B = \frac{3}{13} \end{cases}$$

Ζ. ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ - ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ**Μέθοδος:**

Αν δίνονται οι κορυφές ενός τριγώνου και ζητείται το εμβαδό του, χρησιμοποιούμε

τη σχέση: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$ με $\vec{AB} = (x_1, \psi_1)$, $\vec{A\Gamma} = (x_2, \psi_2)$.

Παράδειγμα-7

Να βρεθεί το εμβαδό τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(1, 2)$, $B(-1, -3)$ και $\Gamma(-2, 4)$.

Λύση

Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: Είναι $\vec{AB} = (-2, -5)$, $\vec{A\Gamma} = (-3, 2)$, οπότε :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{AB} & \vec{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-4 - 15| = \frac{1}{2} |-19| = \frac{19}{2}$$

Παράδειγμα-8(Εφαρμογή-2 σελ.74)

Θεωρούμε τα σημεία $A(-3,0), B(-2,0)$ και $\Gamma(-4,2)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει: $(MB\Gamma) = 2(AB\Gamma)$.

.Λύση

▪ Είναι $\overrightarrow{AB} = (-2+3, 0) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (1, 0)}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (-4+3, 2-0) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A\Gamma} = (-1, 2)}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι :

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |2+0| = \frac{1}{2} |2| = 1$$

$\Rightarrow \boxed{(AB\Gamma) = 1\tau, \mu} \quad (1)$

▪ Είναι $\overrightarrow{B\Gamma} = (-4+2, 2-0) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{B\Gamma} = (-2, 2)}$,

$\overrightarrow{BM} = (x+2, y-0) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BM} = (x+2, y)}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $MB\Gamma$ είναι :

$$(MB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{B\Gamma} \\ \overrightarrow{BM} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (MB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ x+2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-2y-2x-4|$$

$\Rightarrow (MB\Gamma) = \frac{1}{2} |-2(x+y+2)| \Rightarrow \boxed{(MB\Gamma) = |x+y+2|} \quad (2)$.

• Το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στο γ.τ. άρα

$$(MB\Gamma) = 2(AB\Gamma) \Leftrightarrow \begin{matrix} (1), (2) \\ |x+y+2| = 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2 = -2 \\ \text{ή} \\ x+y+2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-4 \rightarrow \varepsilon_2 \\ y = -x \rightarrow \varepsilon_1 \end{cases} \text{ ή}$$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι οι ευθείες $\boxed{(\varepsilon_1): y = -x \text{ και } (\varepsilon_2): y = -x-4}$ με $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

, οι οποίες είναι παράλληλες της $B\Gamma$ γιατί $\lambda_{B\Gamma} = \frac{2-0}{-4+2} \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = -1 = \lambda_1 = \lambda_2$.

➤ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

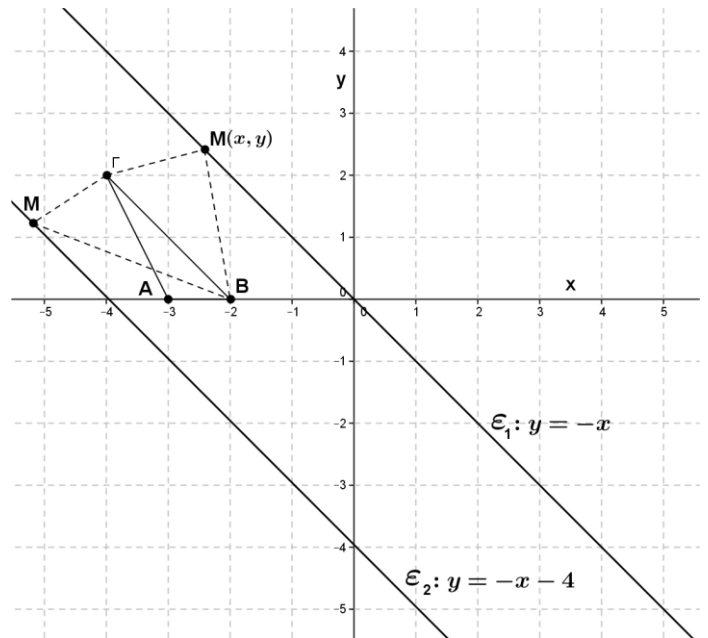
Τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν :

(α) $E_{AB\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ ή

(β) να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που σχηματίζουν είναι συγγραμικά, δηλ.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0$ ή

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι: $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$



Η. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Μέθοδος: ☛

Στις περιπτώσεις αυτές επιλέγουμε εμείς σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε να έχουμε τις λιγότερες δυνατές μεταβλητές για τις συντεταγμένες των σημείων.

Βασικά σημεία που πρέπει να λαμβάνουμε υπόψιν μας είναι:

1. Οι άξονες του συστήματος πρέπει να είναι σταθερές ευθείες και όχι μεταβλητές.
2. Οι άξονες πρέπει να περιέχουν όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία, με ένα από αυτά σαν αρχή του συστήματος.
3. Σαν άξονες επιλέγουμε άξονες συμμετρίας σχήματος αν υπάρχουν, ειδάλλως πλευρές ορθής γωνίας ή σαν αρχή αξόνων κέντρο συμμετρίας αν έχει το σχήμα.
4. Αν στο σχήμα υπάρχουν ευθείες παράλληλες, η μια από αυτές θα εκλεγεί σαν ένας άξονας.
5. Ορθογώνιο σύστημα αξόνων χρησιμοποιούμε υποχρεωτικά σε περιπτώσεις καθετότητας ευθειών ή περιπτώσεις αποστάσεων.

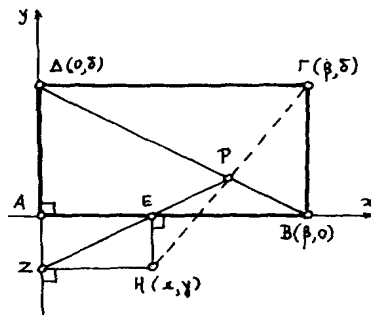
Παράδειγμα-8

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, σημείο Ρ της ΒΔ και το συμμετρικό Η του Γ ως προς το Ρ. Αν $HE \perp AB$, $HZ \perp AD$ να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ρ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη

Θεωρούμε ως σύστημα αξόνων τους Αχ, Αψ. Τότε $A(0,0)$, $B(\beta,0)$, $\Delta(0,\delta)$, $\Gamma(\beta,\delta)$.

Υποθέτουμε ότι $H(\alpha,\gamma)$ οπότε $E(\alpha,0)$ και $Z(0,\gamma)$. Επειδή το Ρ είναι μέσο του ΓΗ. Άρα $P(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2})$.



$$\text{Είναι } \lambda_{EP} = \frac{\frac{\gamma+\delta}{2} - 0}{\frac{\alpha+\beta}{2} - 0} = \frac{\gamma+\delta}{\alpha+\beta} \quad (1), \quad \lambda_{EZ} = \frac{\gamma - 0}{\alpha - 0} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (2).$$

$$\text{Αλλά } B, P, D \text{ συνευθειακά, οπότε: } \lambda_{BP} = \lambda_{PD} \Leftrightarrow \frac{\frac{\gamma+\delta}{2} - 0}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta} = \frac{\frac{\gamma+\delta}{2} - \delta}{\frac{\alpha+\beta}{2} - 0} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha\delta + \beta\gamma = 0 \quad (3).$$

Από (1),(2),(3) προκύπτει $\lambda_{EP} = \lambda_{EZ} \Leftrightarrow EP \parallel EZ$.

...ασκήσεις

23. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,2)$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: x+y+3=0$ και $\varepsilon_2: x-y+5=0$. Αν A_1 είναι προβολή του A στην ε_1 και B_1 η προβολή του B στην ε_2 να βρεθεί η απόσταση $d(A_1, B_1)$.
24. Στο σύστημα XOY το A κινείται στον OX και το Γ στον OY έτσι ώστε να ορίζεται ορθογώνιο $OAB\Gamma$ και η περίμετρός του είναι σταθερή. Δείξτε ότι η ευθεία που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην $A\Gamma$ διέρχεται από σταθερό σημείο.
25. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων Π_1, Π_2 είναι $\Pi_1(t-1, t+2)$ και $\Pi_2(3t, 3t-1)$ για κάθε χρον. στιγμή t ($t > 0$).
- Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.
 - Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.
 - Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 3$.
26. Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda + 2, 2\lambda - 1)$, $B(\lambda - 3, 3\lambda - 2)$ και $\Gamma(0, 3\lambda - 4)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Ναδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
 - Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε $(AB\Gamma) = 5$
 - Για $\lambda = 1$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου ώστε να ισχύει $(M\Gamma) = d(M, AB)$
27. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $A(-8, 2)$, $B(7, 4)$ και $H(5, 2)$ το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:
- την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 - τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 - τις εξισώσεις των πλευρών του
 - την απόσταση του A από τη $B\Gamma$
 - το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
28. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2: 4x - 3y - 24 = 0$.
- Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
 - Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 .
 - Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .
29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.
- Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2 .
 - Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.
 - Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ και $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλα προς τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.
30. Θεωρούμε τη καμπύλη $(c): 4x^2 + 4(y-3)x + y^2 - 6y + 5 = 0$ (1)
- Ναδειχτεί ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
 - Να βρείτε την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
 - Αν $\varepsilon_1: 2x + y - 1 = 0$ και έστω μία άλλη ευθεία $\varepsilon: x = 2$, να βρείτε το $\text{syn}(\varepsilon, \varepsilon_1)$
31. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + 2x - xy - y^2 + 4y - 4 = 0$ (1).
- Ναδειχτεί ότι η (1) παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες (ε_1) και (ε_2) και να δείξετε ότι το σημείο τομής τους είναι $A(0, 2)$.
 - Έστω $(\varepsilon_1): 2x + y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): x - y + 2 = 0$ καθώς και B, Γ τα σημεία τομής

με τον άξονα $x'x$ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(AB\Gamma)$.

Γ. Να βρεθεί σημείο $M(x, y)$ της ευθείας (ε_1) το οποίο έχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.

32. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2 . γ) Αν Α είναι σημείο της ε_1 με τεταγμένη 2 και Β σημείο της ε_2 με τετμημένη 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

33 Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ .

34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{a} \cdot \vec{b} + 12) \cdot x + (\vec{a} \cdot \vec{b} - 12) \cdot y - 5 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$.

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = 3\vec{a}$.

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{b} = -3\vec{a}$.

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b} \perp \vec{a}$

35. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$ όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

36. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Μ.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8x + y - 6 = 0$.

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.

ii) Αν Κ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$.

37. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : y = x$, με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$. Αν το σημείο Μ (3, 5) είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος

ΑΒ και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων Α και Β ισούται με 5, τότε:

- α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β .
 β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.
 γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ (x ,y) για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2 (OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις : $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$.
38. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2κx - (1 + κ)y + 1 - 3κ = 0$, $\zeta: (1 + 3κ)x + (κ - 1)y + 2 - 6κ = 0$, όπου $κ \in \mathbb{R}$.
 α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.
 β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .
39. Δίνονται τα σημεία Α(3,4) , Β(5,7) και Γ (2μ +1,3μ -2) , όπου $μ \in \mathbb{R}$.
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ και , στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.
 β) Να αποδείξετε ότι:
 i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ.
 ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
 γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;
40. Στο καρτεσιανό επίπεδο xOy θεωρούμε τα σημεία $A(4,0)$, $B(1,-2)$ και $\Gamma(2,3)$, και την εξίσωση : $2x + y + 5 + κ(x - y + 4) = 0$ (1) , με $κ \in \mathbb{R}$.
 Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $κ \in \mathbb{R}$ και ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο Κ(-3,1) .
 Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά.
 Γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές .
 Δ. Θεωρούμε τις ευθείες (ε_1) : $y = -2x - 5$ και (ε_2) : $4x - y + 13 = 0$ που προκύπτουν από την εξίσωση (1) για $κ=0$ και $κ=2$ αντίστοιχα. Αν Κ(-3,1) το σταθερό σημείο του ερωτήματος Γ1 , να βρείτε τα σημεία Μ,Ν των ευθειών (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα που έχουν ίδια μη μηδενική τετμημένη και το εμβαδόν του τριγώνου να ισούται με 27 τετραγωνικές μονάδες .
41. Στο καρτεσιανό επίπεδο xOy θεωρούμε τα σημεία $A(2,0)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(6,κ)$, με $κ \in \mathbb{R} - \{10\}$.
 Α. Να δείξετε ότι :
 i) Τα σημεία Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά.
 ii) Η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου (ε) που φέρουμε από τη κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ είναι $x = 4$.
 Β. Να προσδιορίσετε την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ αν είναι $(AB\Gamma) = 8$ τ.μ.
 Γ. Για $κ = 2$ να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.