

ΕΜΒΑΔΑ Ευθύγραμμων Σχημάτων

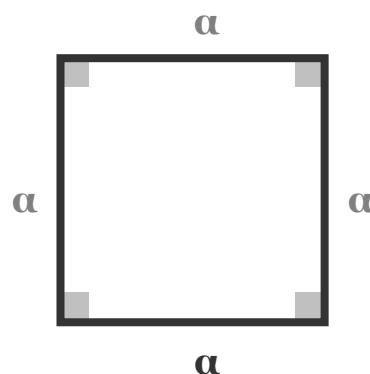
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό E ενός τετραγώνου με πλευρά a είναι a^2 , δηλαδή:

$$E = a^2$$

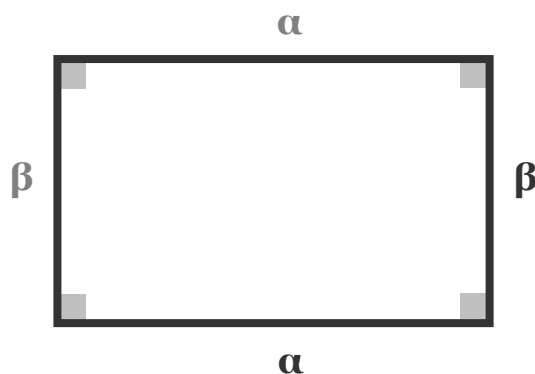


ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδό E ενός ορθογωνίου με πλευρές a , β ισούται με το γινόμενο των πλευρών του, δηλαδή:

$$E = a \cdot \beta$$



Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε:

ύψος

$$E = \text{βάση} \cdot \text{ύψος}$$

βάση

Φυσικά, ως βάση μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε πλευρά (προφανώς, την άλλη ως ύψος).

πλάτος

$$E = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος}$$

μήκος

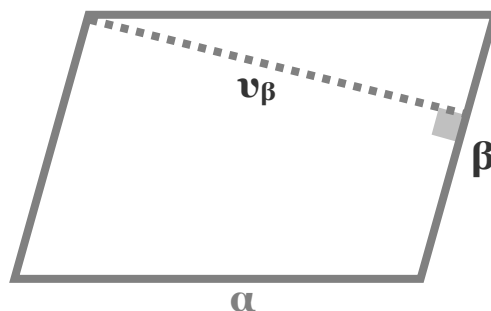
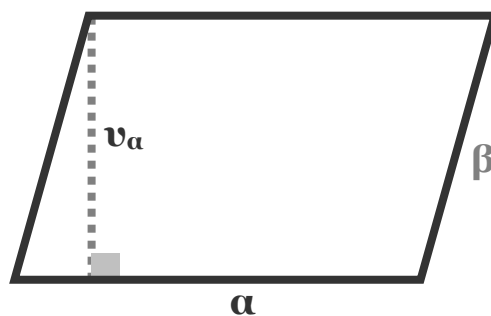
Συνήθως, θεωρούμε ως μήκος τη μεγαλύτερη από τις δύο διαστάσεις του ορθογωνίου (προφανώς, ως πλάτος τη μικρότερη).

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Το εμβαδό E ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή, δηλαδή:

$$E = \alpha \cdot v_{\alpha}$$

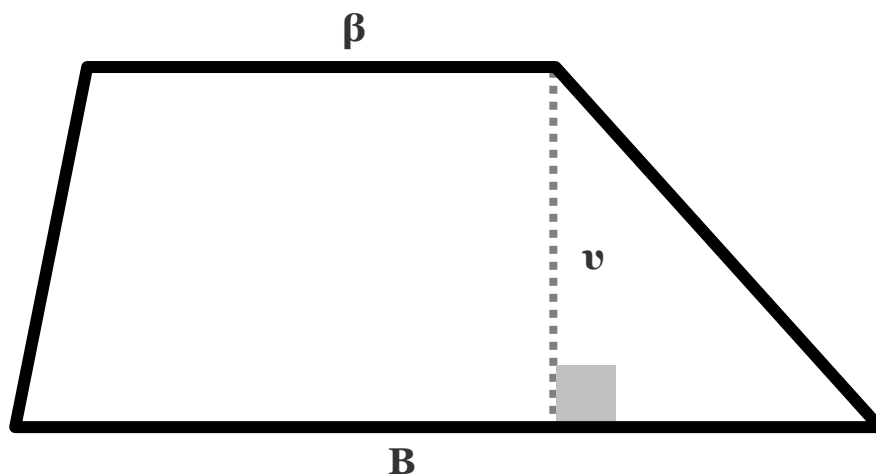
$$E = \beta \cdot v_{\beta}$$



ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Το εμβαδό E ενός τραpezίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή:

$$E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot v$$



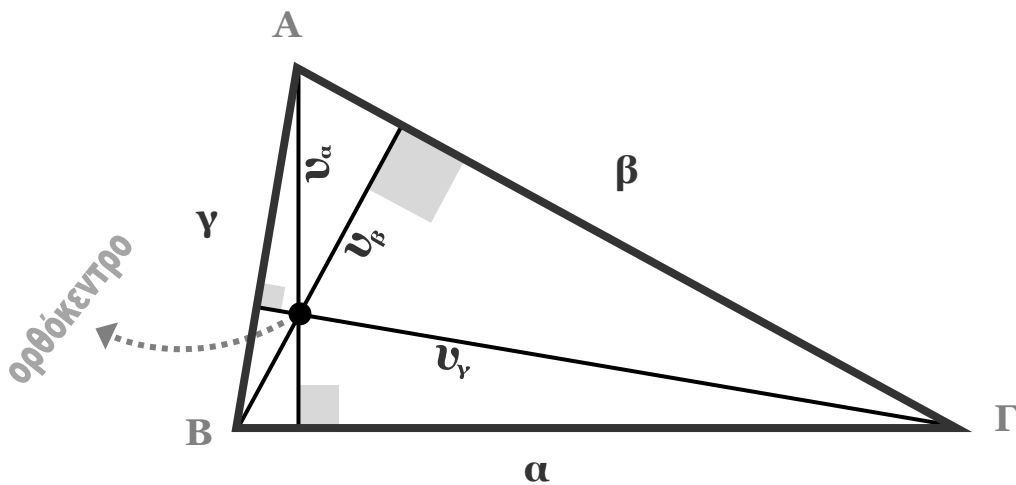
Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο

Το εμβαδό E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος, δηλαδή:

$$E = \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} / 2$$

$$E = \beta \cdot \upsilon_{\beta} / 2$$

$$E = \gamma \cdot \upsilon_{\gamma} / 2$$



Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Παρατήρηση: Έστω ένα τρίγωνο με πλευρές α, β, γ . Συμβολίζουμε με το γράμμα τ την **ημιπερίμετρο** του τριγώνου, με άλλα λόγια:

$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

Τύπος του Ήρωνα

1η Έκφραση

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

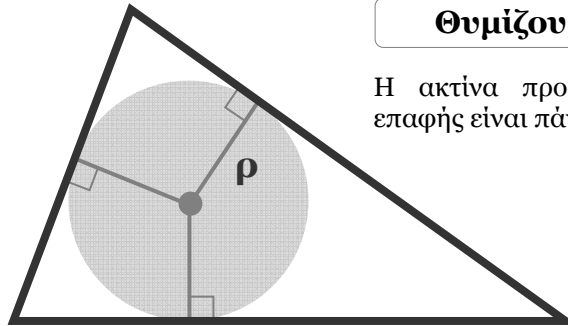
2η Έκφραση

$$E = \tau \cdot \rho$$

ρ = ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου

Θυμίζουμε ότι:

Ο κύκλος που είναι εγγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο έχει κέντρο το σημείο τομής των **διχοτόμων** του τριγώνου, το γνωστό **έγκεντρο**. Αυτό σημαίνει, με άλλα λόγια, ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου **ισαπέχει** από τις **πλευρές** του τριγώνου.



Θυμίζουμε ότι:

Η ακτίνα προς το σημείο επαφής είναι πάντα κάθετη.

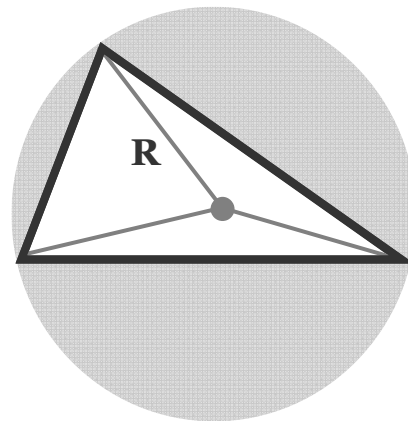
3η Έκφραση

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

R = ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου

Θυμίζουμε ότι:

Ο κύκλος που είναι περιγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο έχει κέντρο το σημείο τομής των **μεσοκαθέτων** του τριγώνου, το γνωστό **περίκεντρο**. Αυτό σημαίνει, με άλλα λόγια, ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου **ισαπέχει** από τις **κορυφές** του τριγώνου.



4η Έκφραση

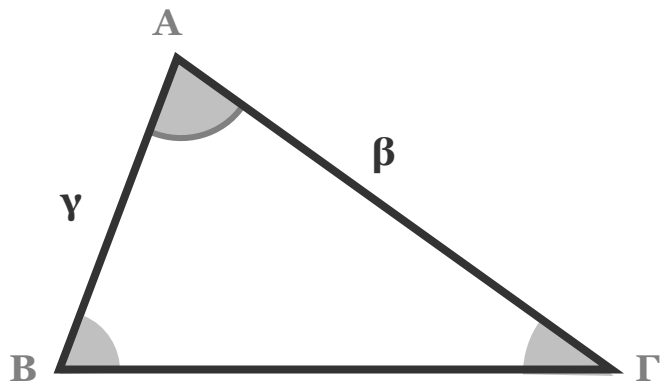
$$E = \frac{1}{2} \beta\gamma \cdot \eta\mu A$$

A = η περιεχόμενη γωνία

Αναλόγως φυσικά,
έχουμε τις εκφράσεις:

$$E = \frac{1}{2} \alpha\gamma \cdot \eta\mu B$$

$$E = \frac{1}{2} \alpha\beta \cdot \eta\mu \Gamma$$

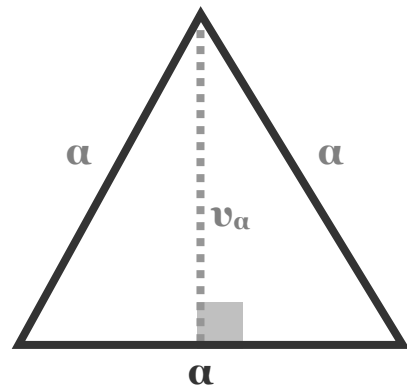


ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Το εμβαδό E ενός **ισόπλευρου** τριγώνου με πλευρά a είναι ίσο με:

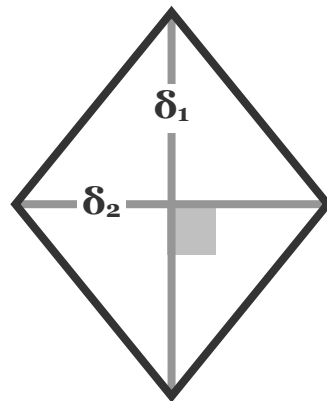
$$E = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Το εμβαδό E ενός **ρόμβου** ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του:

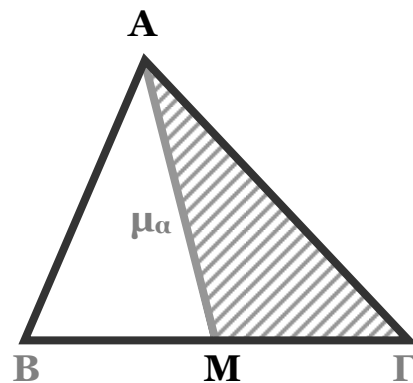
$$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Κάθε **διάμεσος** AM ενός τριγώνου $AB\Gamma$, το χωρίζει σε δύο τρίγωνα ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} (ABM) &= (AM\Gamma) \\ &= \frac{(AB\Gamma)}{2} \end{aligned}$$



Επίσης, σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει σταθερά η παρακάτω αναλογία, η οποία είναι γνωστή ως ...

Ν ό μ ο ς Η μ ι τ ό ν ω ν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\text{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\text{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\text{G}} = 2\text{R}$$

Με λόγια: Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι ανάλογη προς το ημίτονο της απέναντι γωνίας. Ο σταθερός αυτός λόγος ισούται με το διπλάσιο της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

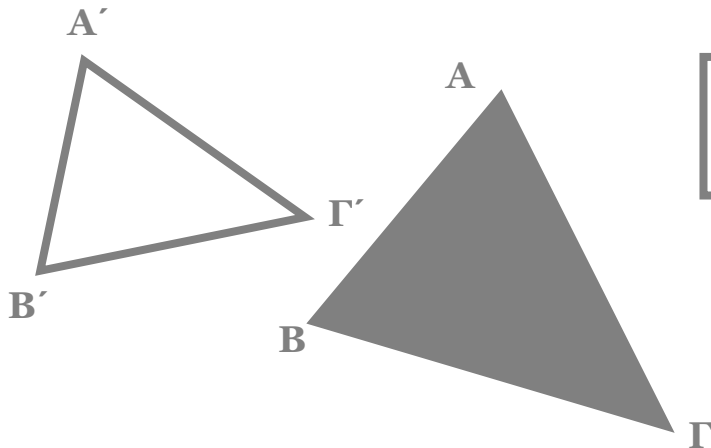
Ε Μ Β Α Δ Ο & Ο Μ Ο Ι Ο Τ Η Τ Α

ΠΡΟΤΑΣΗ

- Αν δυο τρίγωνα έχουν **ίσες βάσεις**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών.
- Αν δυο τρίγωνα έχουν **ίσα ύψη**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δυο τρίγωνα είναι **όμοια**, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.



$$\frac{\text{AB}}{\text{A'B'}} = \frac{\text{AG}}{\text{A'G'}} = \frac{\text{BG}}{\text{B'G'}} = \lambda$$

$$\frac{\text{E}_{\text{ABG}}}{\text{E}_{\text{A'B'G'}}} = \lambda^2$$

Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για δύο οποιαδήποτε όμοια πολύγωνα:

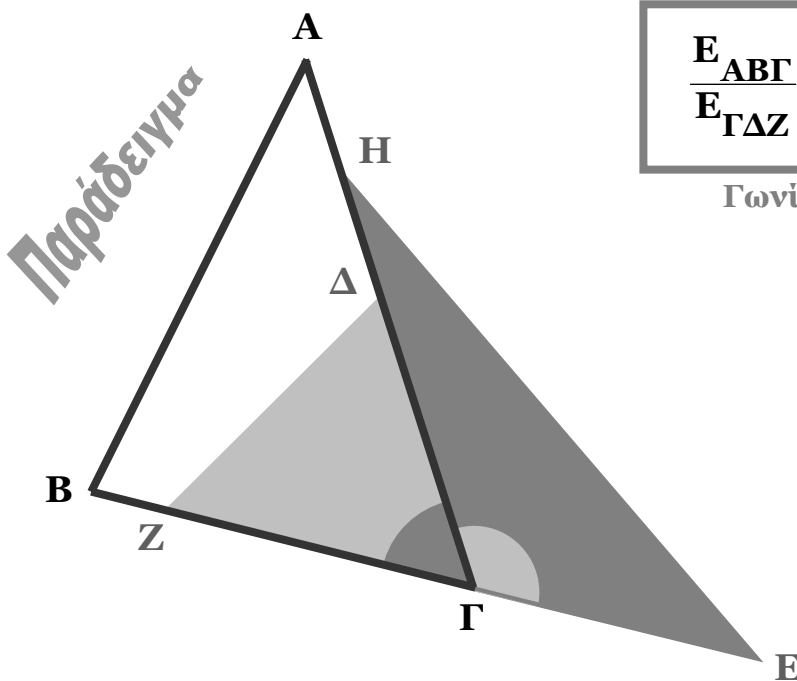
ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολύγωνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι **ίση ή παραπληρωματική** με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών, που περιέχουν τις γωνίες αυτές.



$$\frac{E_{ABG}}{E_{G\Delta Z}} = \frac{AG \cdot BG}{\Delta G \cdot GZ}$$

Γωνία Γ κοινή

$$\frac{E_{ABG}}{E_{GHE}} = \frac{AG \cdot BG}{GH \cdot GE}$$

Γωνίες Γ και Γ_{εξ} παραπληρωματικές

