

4.3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

Άσκηση 1: Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

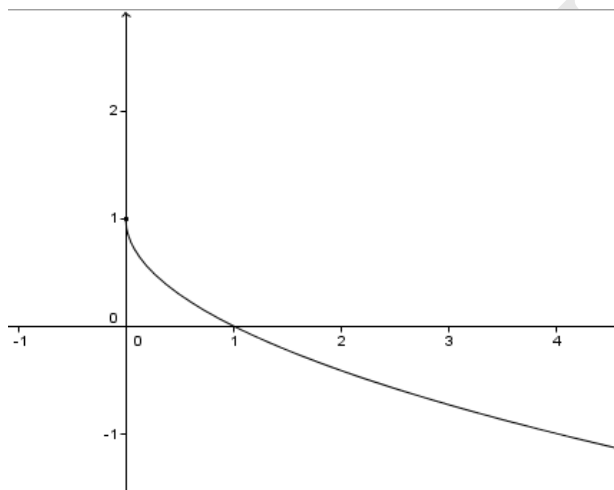
β. Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$$

γ. Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι

η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά

σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.



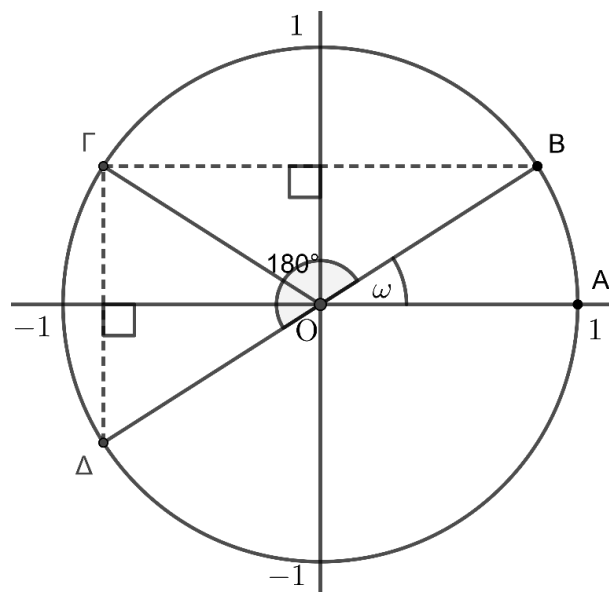
Άσκηση 2: Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α. Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β. Να βρείτε:

- την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,
- τις συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ ,
- το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών
- $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOG}$ και $\widehat{AOD}$.



Άσκηση 3: Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

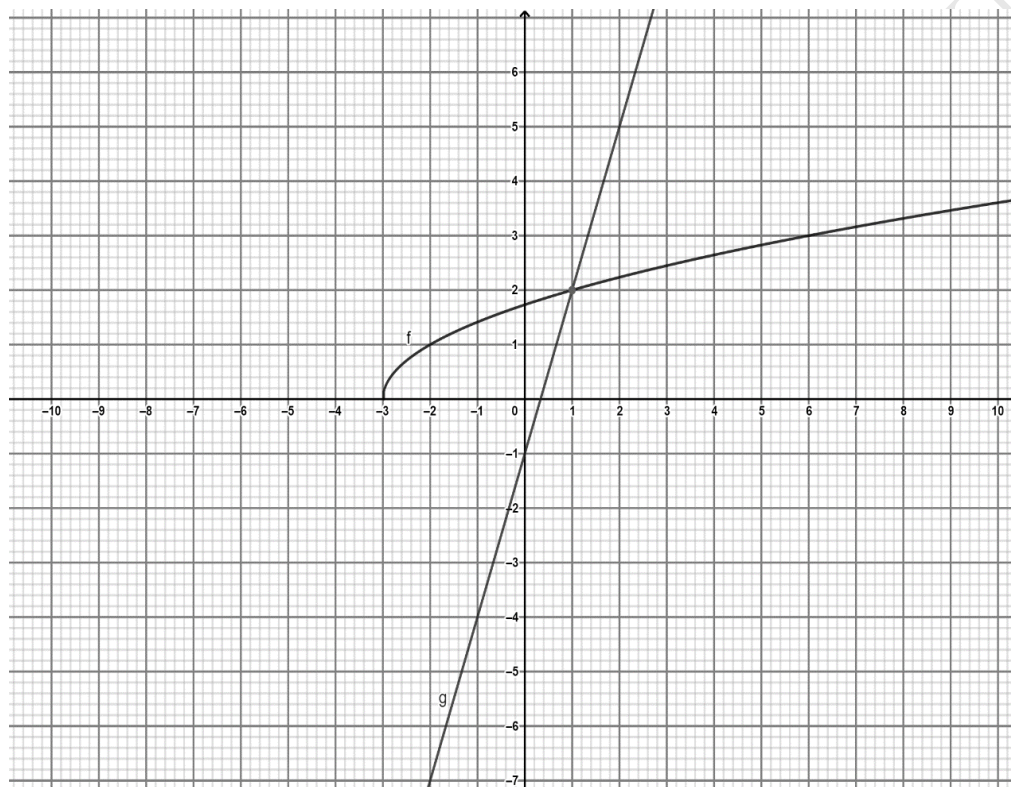
$$g(x) = 3x - 1.$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ.ι. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.



Άσκηση 4: Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a, a \in \mathbb{R}. \quad (1)$

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1) .

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i. Για $a = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii. Για $a \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

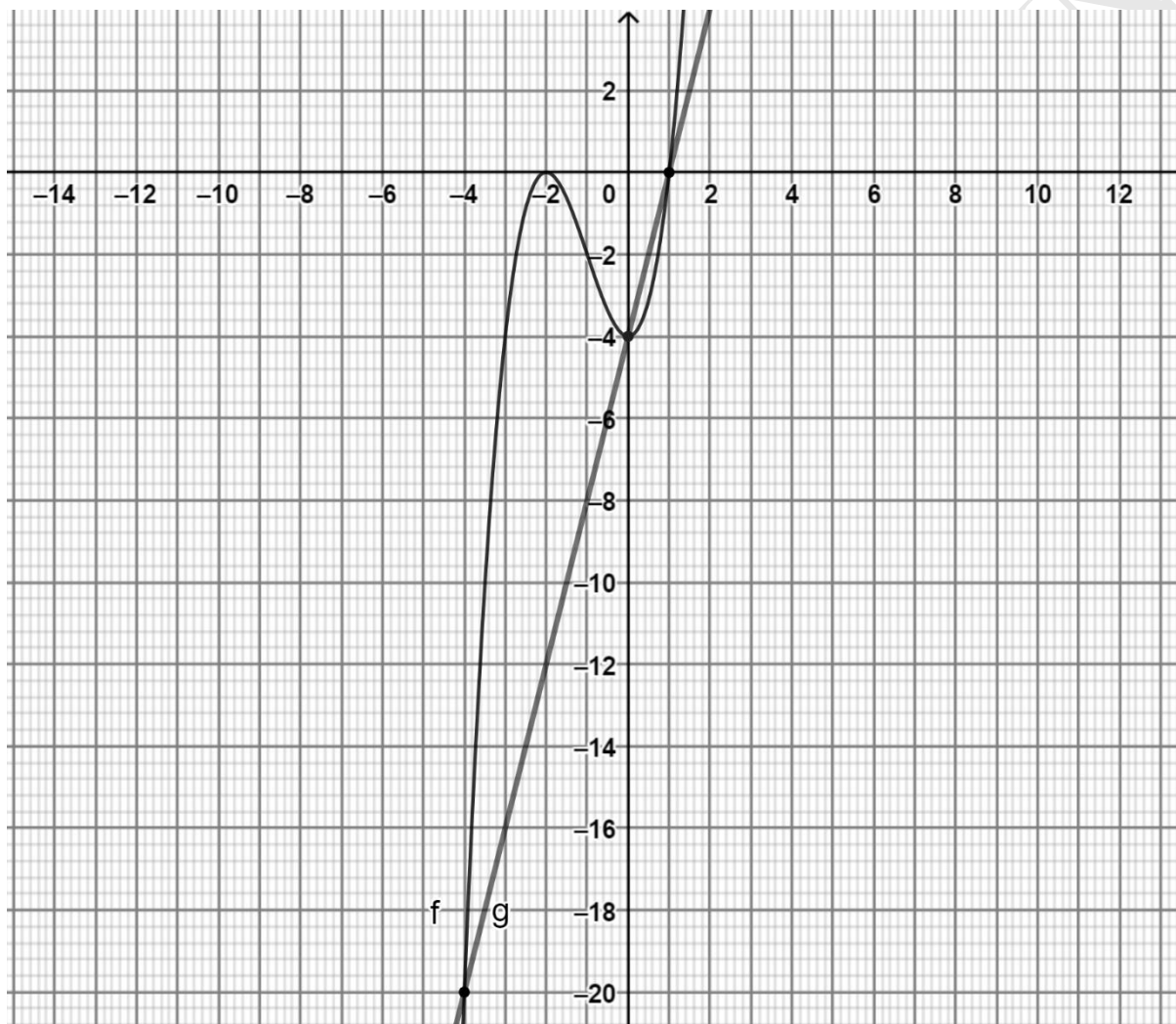
Άσκηση 5: Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α. Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β. Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ. Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Άσκηση 6: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 - bx + 3$, $a, b \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β. Να αποδείξετε ότι $a = -3$ και $b = \frac{21}{2}$.

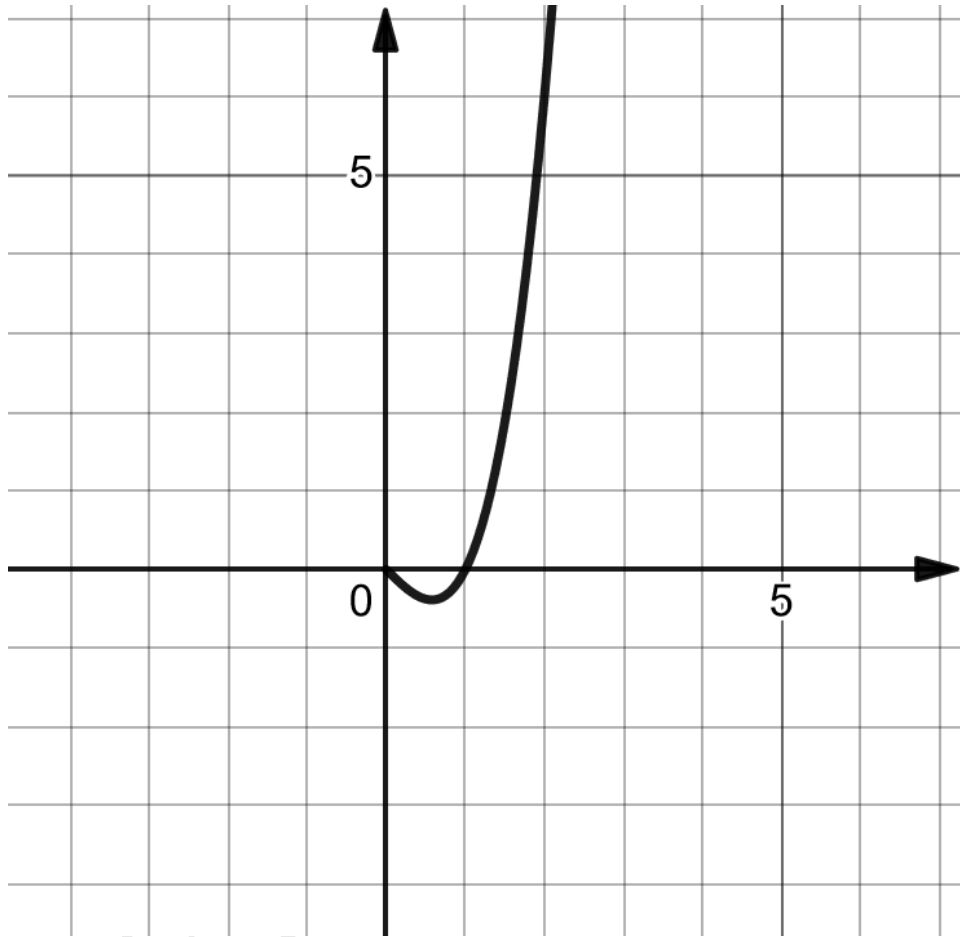
γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

Άσκηση 7: Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

α. i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

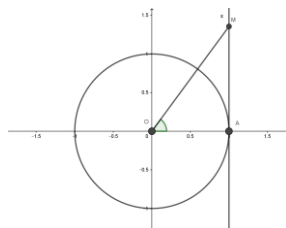
β. Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 8: Το εμβαδόν του τριγώνου OAM που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A .

α. Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \widehat{AOM}$ ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

β. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\varphi\omega$ της γωνίας $\omega = \widehat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \overset{\wedge}{AOM}$ η γωνία του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$.



Άσκηση 9: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

γ. i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$, να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 10 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α. Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

β.i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.