

## 3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

**Άσκηση 1:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$ .

- α.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .
- β.** Για ποια τιμή του  $x \in [0, 2\pi]$  η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

**Άσκηση 2:** Δίνεται γωνία  $\omega$ , με  $0 \leq \omega < 2\pi$  που ικανοποιεί τις σχέσεις:  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$  και  $\eta\mu\omega > 0$ .

- α.** Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega$  πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.
- β.** Να βρείτε όλες τις γωνίες  $\varphi$  με  $\varphi \in \mathbb{R}$ , που ικανοποιούν τη σχέση  $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}$ .

**Άσκηση 3:** Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση  $\eta\mu x = \alpha$  στο διάστημα  $[-2\pi, 2\pi]$  όταν:

- α.**  $\alpha = 1$ .
- β.**  $\alpha = -2$ .

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

**Άσκηση 4:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}$ .

- α. i.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .
- ii.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .
- β.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -3$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Άσκηση 5:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$ .

- α.** Να δείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$ .
- β.** Να δείξετε ότι  $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$ .
- γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -2$ .

**Άσκηση 6: α.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ , για κάθε  $x \neq 2κπ, κ \in \mathbb{Z}$ .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ .

**Άσκηση 7: α.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ , όπου  $x \neq κπ, κ \in \mathbb{Z}$ .

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**Άσκηση 8:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

**β.** Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την ευθεία  $y = 1$ .

**γ.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  και  $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

**δ.** Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

**Άσκηση 9:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

**β.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**γ.** Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

**δ.** Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Άσκηση 10:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x), x \in \mathbb{R}$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ .

**β.** Να αποδείξετε ότι  $-2 \leq f(x) \leq 2$ . Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

**γ.** Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τον άξονα  $y'y$ .

ii. Δυο σημεία τομής της  $C_f$  με τον  $x'x$ .

**Άσκηση 11:** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right), g(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της  $g$  προκύπτει η γραφική παράσταση της  $f$ .

**β.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

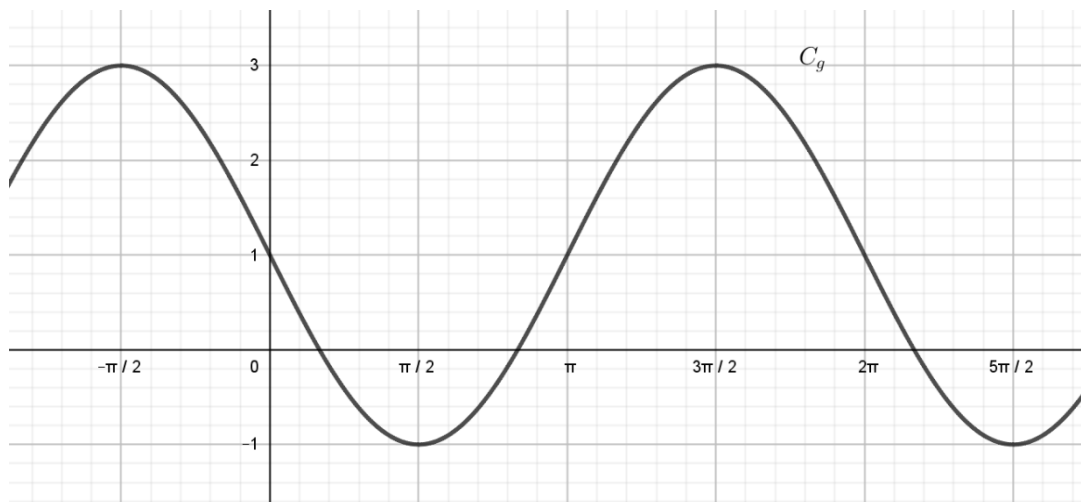
**γ.** Να βρείτε τις τιμές  $f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi)$ .

**δ.** Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{2} f(x) + 1 = 0$ .

**Άσκηση 12:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να βρείτε την περίοδο  $T$ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .

**β.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με,  $\beta > 0$  και πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .



- i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii. Για  $\alpha = -2, \beta = 1$  και  $\gamma = 1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο διάστημα  $[0, \pi)$

**Άσκηση 13:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = |\alpha + 1|\eta\mu(\beta\pi x)$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\beta > 0$ , η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

**α.** Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  ή  $\alpha = -4$  και  $\beta = \frac{1}{2}$ .

**β.** Για  $\alpha = 2$  και  $\beta = \frac{1}{2}$ ,

i. να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 3$

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 8]$

**Άσκηση 14:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια.

**β.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με τον άξονα  $x'x$  και στη συνέχεια, με τις ευθείες  $y = x$  και  $y = -x$ .

**γ.** Να δείξετε ότι  $-|x| \leq f(x) \leq |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Άσκηση 15:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \eta \mu \beta x$ , με  $\alpha, \beta$  ακέραιους θετικούς αριθμούς.

**α.** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

**β.** Αν  $\alpha = 2$ , να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του  $\beta$  για την οποία είναι  $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$  είναι

$\beta = 8$ .

**γ.** Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = 8$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$  στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Άσκηση 16:** Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας  $m$  και ισορροπεί στη θέση  $O$  (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση  $O$ , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$ , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με  $2y_0$ .

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε

δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} t$$

**α.** Να βρείτε το  $y_0$  και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$  της ταλάντωσης.

**β.** Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

**γ.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $t \in [0, 4]$ .

**δ.** Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για  $t \in [0, 2]$ .

