

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

Άσκηση 1: α. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$.

γ. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Άσκηση 2: Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α. Να λύσετε την ανίσωση.

β. αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

Άσκηση 3: α. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|2x - 3| \leq 5$

ii. $|2x - 3| \geq 1$

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Άσκηση 4: Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α. Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

Άσκηση 5: Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$

Άσκηση 6: α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β. Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

Άσκηση 7: Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

β. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Άσκηση 8: α. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$.

γ. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 9: α. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$.

γ. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

Άσκηση 10: α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1 - 2x| < 5$

ii. $|1 - 2x| \geq 1$

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Άσκηση 11: Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Άσκηση 12: Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

Άσκηση 13: Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$.

Άσκηση 14: Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$

α. Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

β. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Άσκηση 15: α. Να λύσετε την ανίσωση $|y - 3| < 1$.

β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

Άσκηση 16: Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α. $-3 < x < -1$.

β. $|2x + 4| < 2$.

Άσκηση 17: α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β).

Άσκηση 18: α. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1).

β. Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$.

γ. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$.

δ. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Άσκηση 19: Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18$$

Άσκηση 20: Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

Άσκηση 21: Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

β. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β .

γ. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$.

δ. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$.

Άσκηση 22: α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

β. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x - 4 > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.