

3.3 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ**

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

A. Κλασματικές εξισώσεις

Για να λύσουμε τις κλασματικές εξισώσεις εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
- Βάζουμε τους αναγκαίους περιορισμούς
- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών
- Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και λύνουμε την εξίσωση.

B. Εξισώσεις της μορφής: $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Γνωρίζουμε ότι $x^2 = |x|^2$.

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$, κάνουμε τα εξής βήματα:

- Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$, (1)
- Θέτουμε $|x| = y$ (2), όπου γβοηθητικός άγνωστος
- Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) την $|x|$ με y και έχουμε την εξίσωση:
 $\alpha y^2 + \beta|y| + \gamma = 0$ (3)
- Λύνουμε την εξίσωση (3) και τις ρίζες της τις αντικαθιστούμε στη (2), από την οποία βρίσκουμε τις τιμές του x που είναι ρίζες της εξίσωσης (1).
-

Γ. Εξισώσεις της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Είναι $x^4 = (x^2)^2$

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha(x^2)^2 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1)

- Θέτουμε $x^2 = y$ (2) και η (1) γράφεται ισοδύναμα $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ (3).
- Λύνουμε την εξίσωση (3) και τις ρίζες της τις αντικαθιστούμε στη (2), από όπου βρίσκουμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Οι εξισώσεις της μορφής: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$ ονομάζονται **διτετράγωνες**.

- Οι ρίζες της διτετράγωνης εξίσωσης είναι ανά δύο αντίθετες, οπότε το άθροισμα των ριζών της είναι 0.
- Η εξίσωση $\alpha x^{2\nu} + \beta x + \gamma = 0$ λύνεται όπως η διτετράγωνη εξίσωση, αφού θέσουμε $x^\nu = y$.

Δ. Πλήθος ριζών των εξισώσεων: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$

Το πλήθος των ριζών των παραπάνω εξισώσεων από το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

η οποία λέγεται **επιλύουσα** αυτών.

Αν η επιλύουσα έχει:

- Δύο ρίζες θετικές, οι εξισώσεις έχουν τέσσερις ρίζες.
- Δύο ρίζες αρνητικές, οι εξισώσεις είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$.
- Δύο ρίζες ετερόσημες, οι εξισώσεις έχουν δύο ρίζες.

Ε. Εξισώσεις της μορφής: $\alpha[f(x)]^2 + \beta f(x) + \gamma = 0$

Για να λύσουμε μία εξίσωση της μορφής:

$$\alpha[f(x)]^2 + \beta f(x) + \gamma = 0$$

θέτουμε $y = f(x)$ και η εξίσωση γράφεται

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στις προηγούμενες μορφές εξισώσεων.