

3.3 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

Εξίσωση δευτέρου βαθμού ονομάζουμε την εξίσωση που είναι της μορφής:

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0 \quad (1)$$

- Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ ονομάζεται διακρίνουσα της εξίσωσης (1)

❖ Πλήθος ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4a\gamma$	Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$
• $\Delta > 0$	• Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
• $\Delta = 0$	• Έχει μία διπλή λύση: $x = -\frac{b}{2a}$
• $\Delta < 0$	• Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Πρόταση Ι: Αν οι αριθμοί a, γ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Παρατηρήσεις:

- για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ προκύπτει ότι:
 - έχει δύο ρίζες άνισες $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$
 - έχει διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta = 0$
 - δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$.
 - έχει λύση στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \geq 0$
- αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$, τότε ισχύει:
 - υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $a\lambda^2 + b\lambda + \gamma = 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$
 - για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $ax^2 + bx + \gamma \neq 0, \Leftrightarrow \Delta < 0$
 - η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$, έχει δύο το πολύ ρίζες.
- για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0 \quad (1), a \neq 0$ ισχύουν:
 - το ρ είναι ρίζα της (1) $\Leftrightarrow a\rho^2 + b\rho + \gamma = 0$
 - το 1 είναι ρίζα της (1) $\Leftrightarrow a + b + \gamma = 0$
 - το 0 είναι ρίζα της (1) $\Rightarrow \gamma = 0$

❖ Άθροισμα και Γινόμενο ριζών

Τύποι του Vieta

Πρόταση II: Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικές τις x_1, x_2 τότε

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Αν S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 x_2$, έχουμε τους τύπους

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{και} \quad P = \frac{c}{a}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Από τους τύπους του Vieta μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης (εφόσον έχει) χωρίς να τη λύσουμε.

Άρα, αν $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$, τότε η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ έχει ρίζες τις x_1 και x_2 .

Γενικός πίνακας για το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Δ	P	S	Πλήθος και πρόσημο ριζών	
+	+	+	δύο ρίζες άνισες και θετικές	ομόσημες
		-	δύο ρίζες άνισες και αρνητικές	
		0	αδύνατη περίπτωση	
	-	+	δύο ρίζες ετερόσημες (άρα και άνισες)	ετερόσημες
		-	δύο ρίζες ετερόσημες (άρα και άνισες)	
		0	δύο ρίζες αντίθετες (άρα άνισες και ετερόσημες)	
	0	+	δύο ρίζες άνισες: το 0 και το $-\frac{b}{a} > 0$	
		-	δύο ρίζες άνισες: το 0 και το $-\frac{b}{a} < 0$	
		0	αδύνατη περίπτωση	
0	+	+	διπλή ρίζα το $-\frac{b}{2a} > 0$	ομόσημες ομόσημες
		-	διπλή ρίζα το $-\frac{b}{2a} < 0$	
		0	διπλή ρίζα το 0	
-			δεν έχει ρίζες πραγματικές	