

3.3 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

Άσκηση 1: Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

α. Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β. Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Άσκηση 2: α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2} = 0$.

Άσκηση 3: Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

Άσκηση 4: Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

α. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και x_1x_2 .

β. Να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1, 4x_2$.

Άσκηση 5: Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}, B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

Άσκηση 6: α. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Άσκηση 7: α. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2).

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις (1) και (2).

Άσκηση 8: α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

β. Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

Άσκηση 9: Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K - 2) = 0$.

Άσκηση 10: Αν α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Άσκηση 11: Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Άσκηση 12: α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$P = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

Άσκηση 13: Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}, B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $A + B = \frac{1}{2}$

ii. $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

Άσκηση 14: α.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x-|x|}$.

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$.

β. Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x-|x|} = \frac{3}{2}x + 2$.

Άσκηση 15: Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

β. Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Άσκηση 16: Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού.

Άσκηση 17: Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64.$$

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β .

Άσκηση 18: α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0 \quad (1)$

β. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

Άσκηση 19: α. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

β. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i. $\rho \neq 0$.

ii. $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

Άσκηση 20: Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

γ. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

Άσκηση 21: Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i. Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii. Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii. να βρείτε τον αριθμό λ .

Άσκηση 22: Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.

β. i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 23: α. Δίνεται η εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 24: Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

β. Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α .

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$,

γ. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

Άσκηση 25: Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ .

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

Άσκηση 26: Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

γ. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1, -x_2 = 4$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

Άσκηση 27: Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α. Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω .

β. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.