Εξάσκηση για Alan Turing (μέρος ΙΙΙ)

Ερώτηση 1

23) Ο Άρης, η Βάσω, ο Γιώργος, η Δήμητρα και η Ελένη γεννήθηκαν (όχι κατ΄ ανάγκη με αυτή τη σειρά) στις 20/2/2001, 12/3/2000, 20/3/2001, 12/4/2000 και 23/4/2002. Γνωρίζουμε ότι

- Ο Άρης και η Ελένη γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα.
- Η Βάσω και ο Γιώργος γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα.
- Ο Άρης και ο Γιώργος γεννήθηκαν το ίδιο έτος.
- Η Δήμητρα και η Ελένη γεννήθηκαν το ίδιο έτος.

Ποιο από τα παιδιά είναι το πιο μεγάλο σε ηλικία;

Α) ο Άρης **Β)** η Βάσω **Γ)**) ο Γιώργος **Δ)** η Δήμητρα **Ε)** η Ελένη

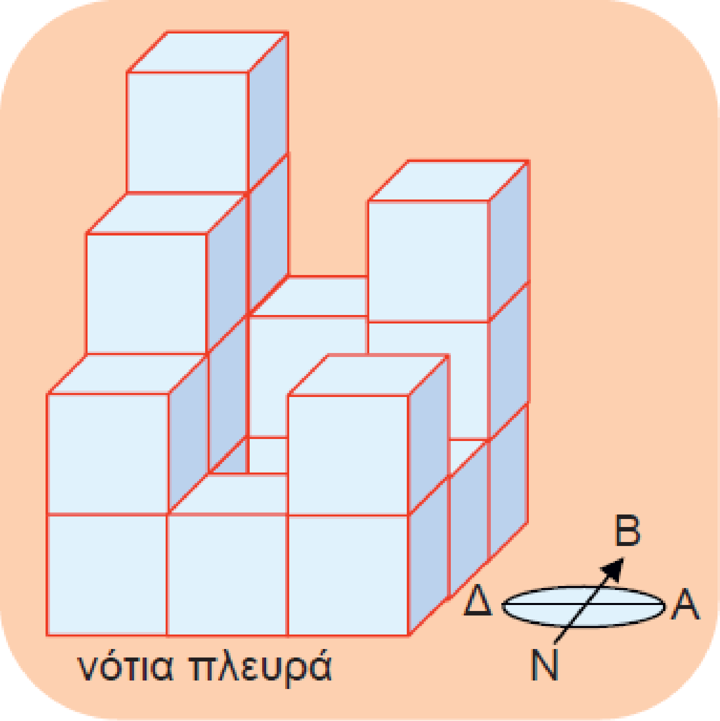
23) A) ο Άρης

1ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι το 2002 γεννήθηκε μόνο ένα παιδί. Αφού το 2000 γεννήθηκαν δυο παιδιά και το 2001 επίσης δύο συμπεραίνουμε από το τρίτο και το τέταρτο δεδομένο ότι το 2002 (23/4/2002) γεννήθηκε η Βάσω. Επίσης το μήνα Φεβρουάριο γεννήθηκε ένα παιδί μόνο, ενώ τους άλλους μήνες από δύο. Επομένως από το πρώτο και το δεύτερο δεδομένο τον Φεβρουάριο (20/2/2001) γεννήθηκε η Δήμητρα. Αφού η Δήμητρα και η Ελένη γεννήθηκαν το ίδιο έτος η Ελένη γεννήθηκε στις 20/3/2001. Αφού ο Άρης και η Ελένη γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα, ο Άρης γεννήθηκε στις 12/3/2000 και επομένως είναι ο μεγαλύτερος σε ηλικία.

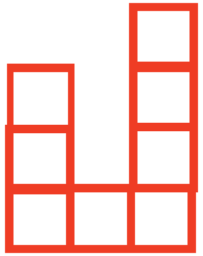
2ος τρόπος: Κατασκευάζουμε έναν πίνακα που καταγράφει τα δεδομένα μας. Στην αριστερή του στήλη καταγράφουμε τις ημερομηνίες γεννήσεως των παιδιών. Τις καταγράφουμε σε αύξουσα σειρά, αν και αυτό δεν είναι απαραίτητο. Στη πρώτη γραμμή έχουμε τα ονόματα των παιδιών (Α για τον Άρη, Β για τα Βάσω κλ.π).

Ερώτηση 2

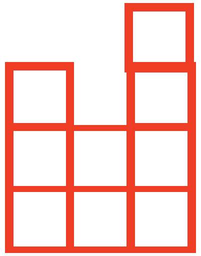
21) Η εικόνα δεξιά δείχνει μία αεροφωτογραφία ενός οικοδομικού τετραγώνου. Τι θα δούμε αν κοιτάξουμε το οικοδομικό τετράγωνο από την βορινή του πλευρά;



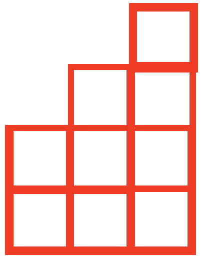
Α)



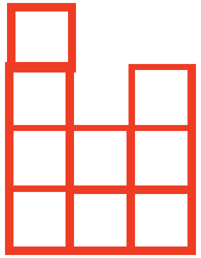
Β)



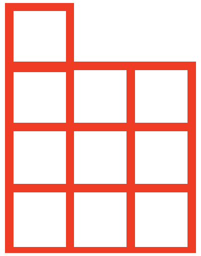
Γ)



Δ)



Ε)

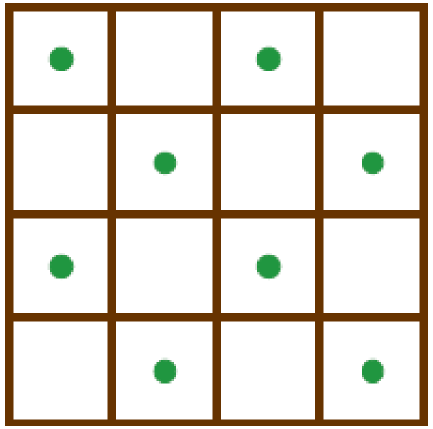


21) B)

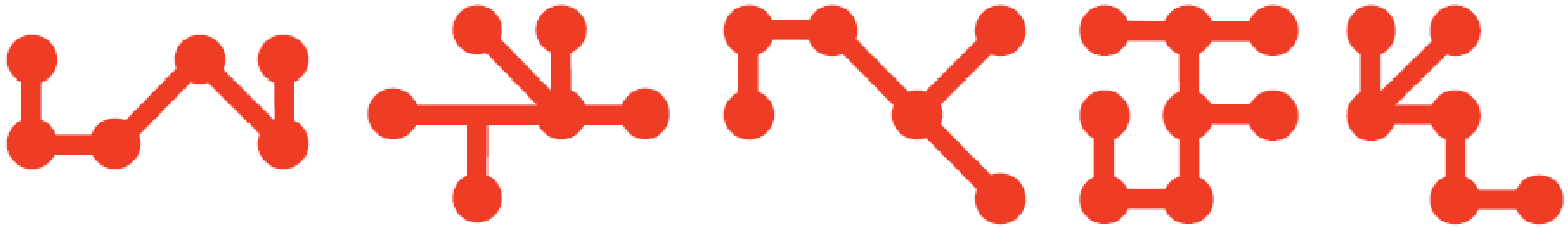
Όταν κοιτάξουμε από τη βορινή πλευρά το ψηλό τετραώροφο κτήριο που τώρα φαίνεται στο πάνω αριστερά μέρος της αεροφωτογραφίας, θα το δούμε στο δεξί μας χέρι. Δίπλα του είναι ένα κτήριο δύο ορόφων και μετά ένα τριών. Επίσης, πίσω από τα κτήριά μας, όπως κοιτάμε από τη βορινή πλευρά, δεν υπάρχει ψηλότερο κτήριο ώστε να φαίνεται το πάνω του μέρος. Συμπεραίνουμε ότι από την βορινή πλευρά και από δεξιά προς αριστερά βλέπουμε κτήρια 4, 2 και 3 ορόφων, αντίστοιχα. Άρα η σωστή εικόνα είναι η (Β).

Ερώτηση 3

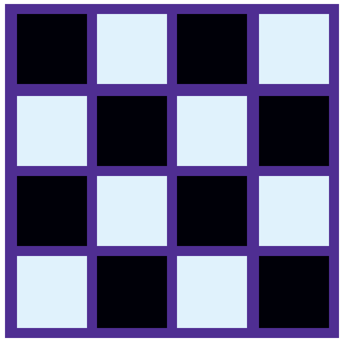
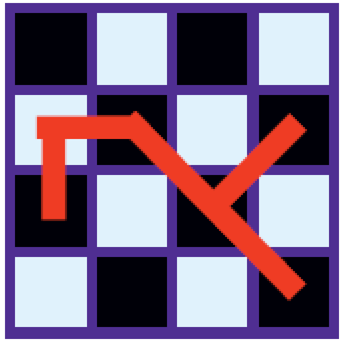
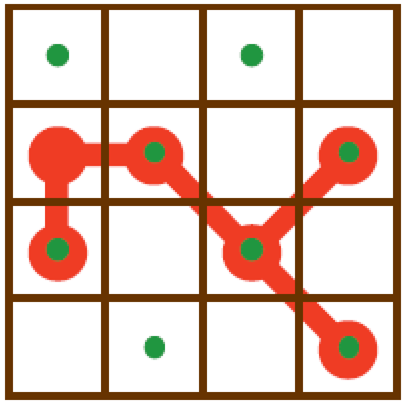
25) Στο διπλανό τετράγωνο είναι σχεδιασμένες μερικές κουκκίδες. Θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα από τα παρακάτω πέντε σχήματα πάνω στο τετράγωνο με σκοπό να καλύψουμε όσο γίνεται περισσότερες από τις κουκκίδες. Ποιο από τα σχήματα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



Α) Β) Γ) Δ) Ε)



25) Γ)

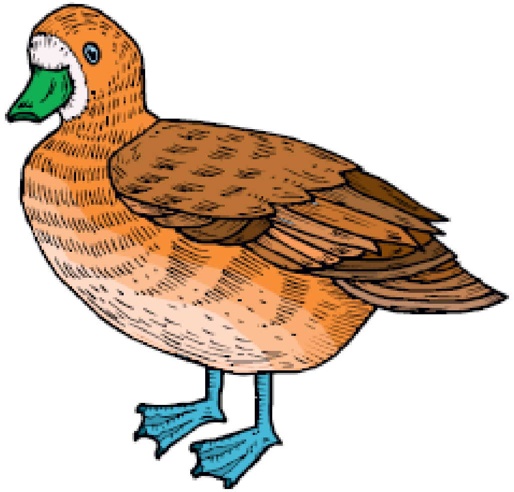




1ος τρόπος: Στο σχήμα αριστερά έχουμε βάψει με μαύρο χρώμα τα τετράγωνα που περιέχουν κουκκίδα, για να είναι πιο ορατή η κατάσταση. Το σχήμα (Γ) μπορεί να τοποθετηθεί έτσι ώστε να καλύπτει πέντε κουκκίδες, όπως φαίνεται στο σχήμα δεξιά. Όλα τα άλλα σχήματα καλύπτουν το πολύ 4 κουκκίδες. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε με δοκιμές αλλά ένας ενδιαφέρον συλλογισμός που το δείχνει αυτό χωρίς να κάνουμε δοκιμές είναι ο εξής (δείτε το πρόβλημα 17 για έναν παρόμοιο συλλογισμό): Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε δύο μαύρα τετράγωνα δεν έχουν κοινή πλευρά. Κάθε ένα από τα σχήματα (Α), (Β), (Δ) και (Ε), όταν τοποθετηθούν στο ασπρόμαυρο τετράγωνο αριστερά, καλύπτει μερικά άσπρα και μερικά μαύρα τετράγωνα. Εξετάζοντας όμως τα σχήματα αυτά διαπιστώνουμε ότι καλύπτουν το πολύ 4 μαύρα τετράγωνα γιατί αν χρωματίσουμε σωστά τους μικρούς κύκλους στα σχήματα, βλέπουμε ότι μερικοί από αυτούς είναι υποχρεωτικά άσπροι (όσοι βρίσκονται στην διπλανή θέση οριζόντια ή κάθετα σε μαυρισμένο κύκλο). Με κάθε τέτοιο χρωματισμό των σχημάτων (για το καθένα υπάρχουν ακριβώς δύο) οι μαυρισμένοι κύκλοι είναι το πολύ 4, εκτός της περίπτωσης του σχήματος (Γ) που είναι 5.

2ος τρόπος: Δυο οριζόντιοι ή κατακόρυφοι κόκκινοι κύκλοι στα σχήματα έχουν απόσταση όσο δύο διαδοχικά κέντρα μικρών τετραγώνων του μεγάλου τετραγώνου ή περισσότερο. Παρατηρούμε ότι δυο κουκίδες δεν βρίσκονται σε δύο διαδοχικά (οριζόντια ή κατακόρυφα) μικρά τετράγωνα. Έτσι το σχήμα (Α) από τους τρεις κύκλους που έχει στις δυο οριζόντιες γραμμές ένας από τους κύκλους στην κάθε γραμμή αποκλείεται να καλύψει κουκίδα. Δηλαδή το σχήμα (Α) το πολύ να καλύψει 4 κουκίδες. Το ίδιο συμβαίνει με το σχήμα (Β). Το (Γ) μπορεί να καλύψει καταρχήν 5 κουκίδες και με έλεγχο βρίσκουμε ότι πράγματι καλύπτει ακριβώς 5 κουκίδες. Το (Δ) θα μπορούσε να καλύπτει 2 κουκίδες με την πρώτη γραμμή (οι δυο ακραίοι κύκλοι), 2 με τη δεύτερη (πάλι οι δυο ακραίοι) και 1 κουκίδα από την τρίτη γραμμή. Κοιτώντας κατακόρυφα αυτή η επιλογή περιορίζει σε 3 τις καλυπτόμενες κουκίδες. Το σχήμα (Ε) μπορεί να καλύψει το πολύ 3 κουκίδες.

Ερώτηση 4

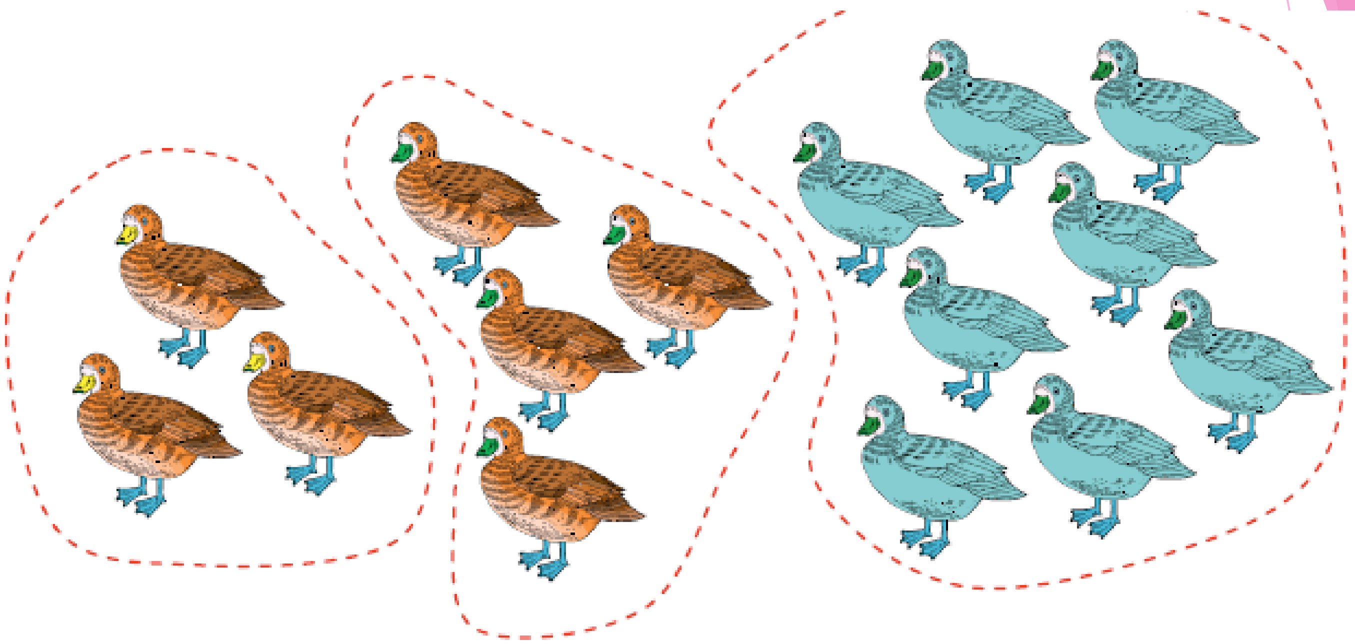
29) Στο πάρκο ζουν 15 αγριόπαπιες. Οι 7 από αυτές έχουν καφετί χρώμα και οι 12 έχουν πράσινο ράμφος. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από αγριόπαπιες του πάρκου που σίγουρα έχουν και καφετί χρώμα και πράσινο ράμφος;



Α) 3 **Β)** 4 **Γ)** 5 **Δ)** 7 **Ε)** 8

29) Β) 4

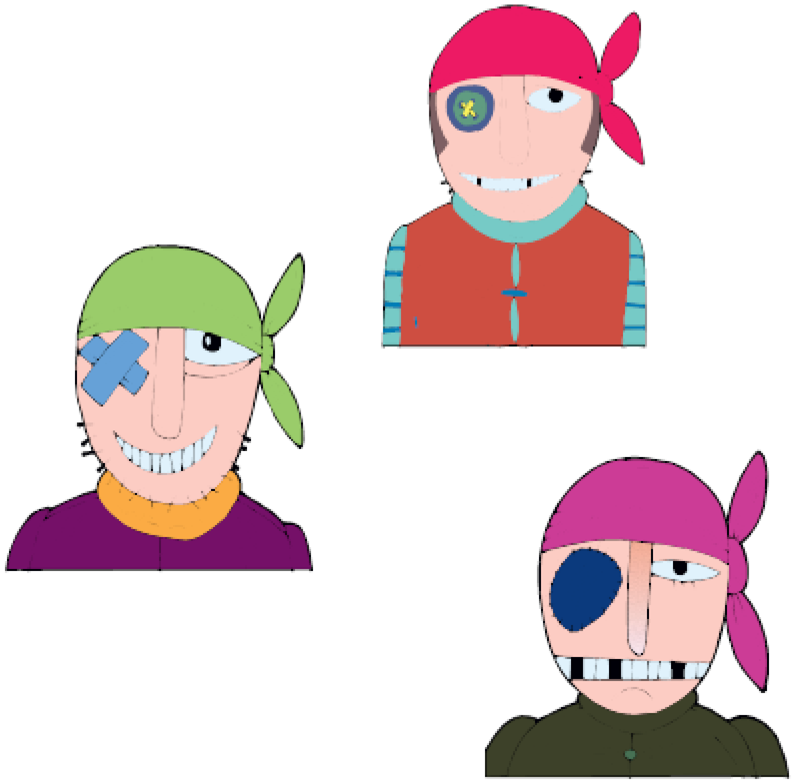
Από τις 15 αγριόπαπιες οι 7 έχουν καφετί χρώμα. Περισσεύουν 15-7=8 αγριόπαπιες. Στη χειρότερη περίπτωση και οι 8 αυτές έχουν πράσινο



ράμφος. Επομένως υπάρχουν άλλες 12-8 = 4 με πράσινο ράμφος. Οπότε αυτές οι 4 σίγουρα συγκαταλέγονται στις αγριόπαπιες με καφετί χρώμα. Άρα τουλάχιστον 4 αγριόπαπιες έχουν οπωσδήποτε και καφετί χρώμα και πράσινο ράμφος.

Ερώτηση 5

30) Ο Αρφ, ο Βαρ και ο Γορ είναι πειρατές που λένε πάντα ψέματα. Ο καθένας κρατάει από ένα διαμάντι που είναι είτε κόκκινο είτε πράσινο χρώμα. Μια μέρα ο Αρφ είπε «*το δικό μου διαμάντι έχει το ίδιο χρώμα με του Βαρ*». Ο Βαρ είπε «*το δικό μου διαμάντι έχει το ίδιο χρώμα με του Γορ*» και ο Γορ είπε «*ακριβώς δύο από εμάς έχουν κόκκινα διαμάντια*». Ποιο από τα παρακάτω είναι σίγουρα σωστό;



Α) Το διαμάντι του Αρφ είναι πράσινο

Β) Το διαμάντι του Βαρ είναι πράσινο

Γ) Το διαμάντι του Γορ είναι κόκκινο

Δ) Τα διαμάντια του Αρφ και του Γορ έχουν διαφορετικό χρώμα

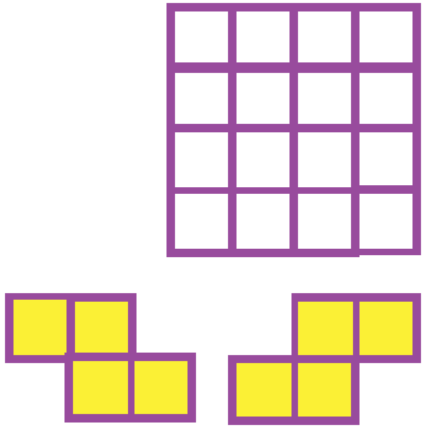
Ε) Κανένα από τα προηγούμενα

30) A) Το διαμάντι του Αρφ είναι πράσινο

Αν το διαμάντι του Αρφ ήταν κόκκινο τότε, επειδή είπε ψέματα όταν έλεγε «*το δικό μου διαμάντι έχει το ίδιο χρώμα με του Βαρ*», σημαίνει ότι το διαμάντι του Βαρ θα ήταν πράσινο. Αφού ο Βαρ είπε ψέματα λέγοντας «*το δικό μου διαμάντι έχει το ίδιο χρώμα με του Γορ*», συμπεραίνουμε ότι ο Γορ θα είχε κόκκινο διαμάντι. Με άλλα λόγια θα είχαμε την κατάσταση Αρφ/κόκκινο, Βαρ/πράσινο και Γορ/κόκκινο. Αλλά τότε θα είχε πει την αλήθεια ο Γορ, ο οποίος ισχυρίστηκε «*ακριβώς δύο από εμάς έχουν κόκκινα διαμάντια*». Τελικά ο Αρφ δεν μπορεί να είχε κόκκινο διαμάντι, που σημαίνει ότι είχε πράσινο. Με παρόμοιο συλλογισμό όπως πριν συμπεραίνουμε ότι τότε έχουμε την κατάσταση Αρφ/πράσινο, Βαρ/κόκκινο και Γορ/πράσινο, που ταιριάζει με τους ψευδείς ισχυρισμούς των πειρατών. Από τις απαντήσεις στο πρόβλημα βλέπουμε τώρα ότι η σωστή είναι η (Α).

Ερώτηση 6

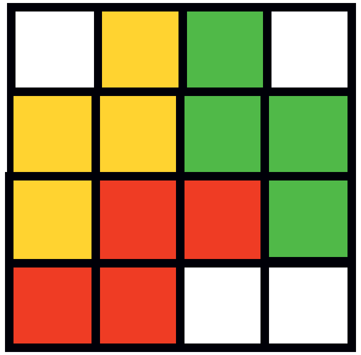
6) Η Λητώ έχει ένα 4×4 τετραγωνισμένο χαρτί. Θέλει με ένα ψαλίδι να κόψει το χαρτί καταμήκος των γραμμών για να φτιάξει αντίγραφα των δύο κίτρινων σχημάτων που εικονίζονται. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός τέτοιων σχημάτων που μπορεί να φτιάξει;



Α) 1 **Β)** 2 **Γ)** 3 **Δ)** 4 **Ε)** 5

6) Γ) 3

Αφού τα τετράγωνα στο χαρτί είναι 16 και καθένα από τα σχήματα που κόβει η Λητώ με το ψαλίδι έχει 4 τετράγωνα, σημαίνει ότι θα φτιάξει το πολύ 4 τέτοια σχήματα. Μάλιστα αν μπορούσε να φτιάξει 4 σχήματα, σημαίνει ότι δεν θα περίσσευε κανένα τετράγωνο. Η εικόνα δεξιά, ή άλλες παρόμοιες, δείχνει πώς θα φτιάξει 3. Βλέπουμε ότι δεν μπορεί να φτιάξει τέταρτο σχήμα (δεν χωράει πουθενά), δηλαδή παίρνει το πολύ 3 σχήματα.



Ερώτηση 7

8) Ένα συρτάρι περιέχει 2 κόκκινες κάλτσες, 3 μπλε, 10 άσπρες, 4 πράσινες και 3 μαύρες. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από κάλτσες που πρέπει να βγάλουμε από το συρτάρι για να είμαστε απόλυτα βέβαιοι ότι θα βγάλουμε τουλάχιστον δύο κάλτσες με το ίδιο χρώμα;

Α) 2 **Β)** 12 **Γ)** 10 **Δ)** 5 **Ε)** 6

8) Ε) 6

Οι κάλτσες στο συρτάρι είναι πέντε διαφορετικών χρωμάτων, κόκκινες, μπλε, άσπρες, πράσινες και μαύρες. Αν βγάλουμε 5 κάλτσες μπορεί να έχουμε την ατυχία να είναι όλες διαφορετικού χρώματος. Σε αυτή την περίπτωση, που είναι η χειρότερη, αν βγάλουμε άλλη μία κάλτσα τότε αυτή σίγουρα θα έχει το ίδιο χρώμα με μία από τις ήδη βγαλμένες γιατί αυτές καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις χρωμάτων. Όποτε με 6 κάλτσες εξασφαλίζουμε ομοιότητα δύο χρωμάτων.

Ερώτηση 8

14) Ο Άλκης διάλεξε τρεις από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Μετά πολλαπλασίασε τους τρεις αριθμούς που διάλεξε. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι το γινόμενο που βρήκε;

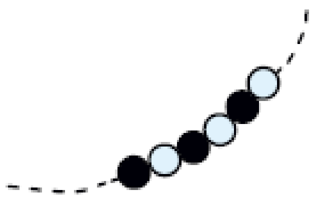
Α) 27 **Β)** 35 **Γ)** 39 **Δ)** 64 **Ε)** 288

14) Γ) 39

Οι διαιρέτες του αριθμού 39 είναι 1, 3, 13 και 39. Ο μόνος τρόπος να πολλαπλασιάσουμε τρεις διαφορετικούς αριθμούς και να βρούμε 39 είναι ο $1 \cdot 3 \cdot 13$. Όμως οι αριθμοί 1, 3, 13 δεν συγκαταλέγονται και οι τρεις στους 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 οπότε αποκλείεται να είναι η επιλογή του Άλκη. Αν θέλουμε να εξετάσουμε ότι οι υπόλοιποι αριθμοί στις απαντήσεις είναι πιθανά γινόμενα τριών αριθμών από τους 1 έως 9, έχουμε $27 = 1 \cdot 3 \cdot 9$, $35 = 1 \cdot 5 \cdot 7$, $64 = 2 \cdot 4 \cdot 8$ και $288 = 4 \cdot 8 \cdot 9$.

Ερώτηση 9

29) Σε ένα σπάγκο είναι περασμένες εναλλάξ άσπρες και μαύρες χάντρες. Η εικόνα δείχνει ένα τμήμα του σπάγκου. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι το ποσοστό των μαύρων χαντρών στον σπάγκο;



Α) 40% **Β)** 45% **Γ)** 48% **Δ)** 50% **Ε)** 60%

29) Β) 45%

Αν στον σπάγκο υπάρχει άρτιο πλήθος από χάντρες, τότε οι μαύρες είναι οι μισές. Δηλαδή η απάντηση (Δ) 50% είναι εφικτή. Η περίπτωση που το πλήθος είναι περιττό, έστω 2N+1, τότε οι μαύρες χάντρες είναι είτε N και οι άσπρες N+1 ή το ανάποδο, ανάλογα αν οι δύο χάντρες στην άκρη είναι και οι δύο άσπρες ή και οι δύο μαύρες. Οπότε το πρόβλημα μεταφράζεται στο να εξετάσουμε ποια από τις απαντήσεις (Α), (Β), (Γ) και (Ε) δεν είναι ούτε της μορφής $\frac{N}{2N+1}$ ούτε της $\frac{N+1}{2N+1}$. Μας βοηθά να παρατηρήσουμε ότι το πρώτο κλάσμα είναι μικρότερο το 1/2 και το δεύτερο, μεγαλύτερο. Οπότε τις απαντήσεις (Α) 40% (Β) 45% και (Γ) 48% πρέπει να συγκριθούν με το πρώτο ενώ η (Ε) 60% με το δεύτερο κλάσμα. Λύνουμε τώρα διαδοχικά τις εξισώσεις

$$\frac{N}{2N+1}=\frac{40}{100},\quad \frac{N}{2N+1}=\frac{45}{100},\quad \frac{N}{2N+1}=\frac{48}{100}\quad \text{και}\quad \frac{N+1}{2N+1}=\frac{60}{100},$$

Θα βρούμε, αντίστοιχα, N = 2, N=4,5 , N = 12 και N = 3. Από αυτές πρέπει να απορρίψουμε την N = 4,5 αφού δεν δίνει ακέραιο πλήθος από χάντρες. Άρα η απάντηση 45% αποκλείεται να είναι το ποσοστό των μαύρων χαντρών στον σπάγκο.

Ερώτηση 10

1) Το μεγάλο τρίγωνο της εικόνας είναι ισόπλευρο με εμβαδόν 9. Οι ευθείες είναι παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου και τις χωρίζουν σε τρία ίσα μέρη. Πόσο είναι το εμβαδόν της κόκκινης περιοχής;

Α) 1 Β) 4 Γ) 5 Δ) 6 Ε) 7

1) Δ) 6

Η κάθε κόκκινη περιοχή είναι παραλληλόγραμμο. Αν φέρουμε τις διαγωνίους τους, σχηματίζονται 9 ισόπλευρα τρίγωνα που είναι ίσα μεταξύ τους (η κάθε πλευρά τους είναι το $\frac{1}{3}$ της πλευράς του μεγάλου) εμβαδού 1. Μετρώντας διαπιστώνουμε ότι η κόκκινη περιοχή έχει εμβαδόν 6.