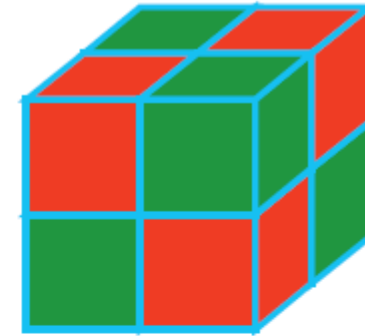


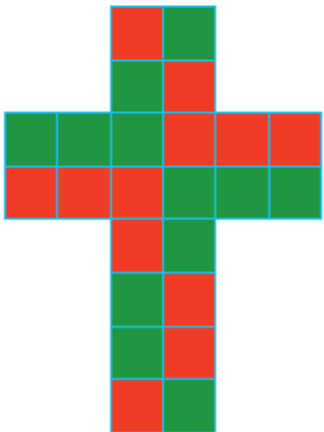
Εξάσκηση για Alan Turing (μέρος II)

Ερώτηση 1

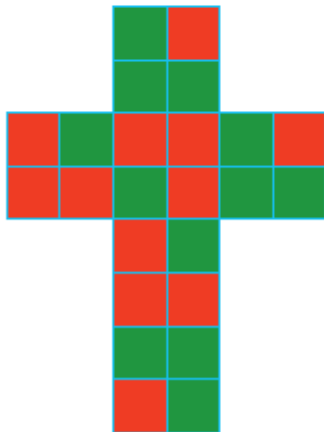
7) Με τέσσερις κόκκινους και τέσσερις πράσινους κύβους κατασκευάζουμε έναν μεγαλύτερο, όπως δείχνει η εικόνα. Πιο από τα παρακάτω είναι το ανάπτυγμα της επιφάνειας του μεγάλου κύβου;



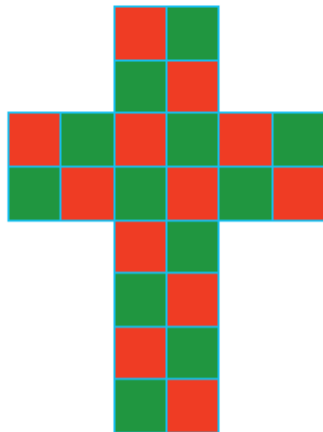
A)



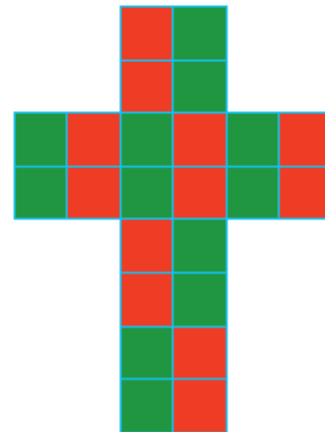
B)



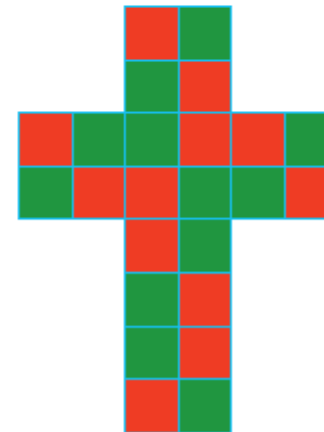
Γ)



Δ)



Ε)

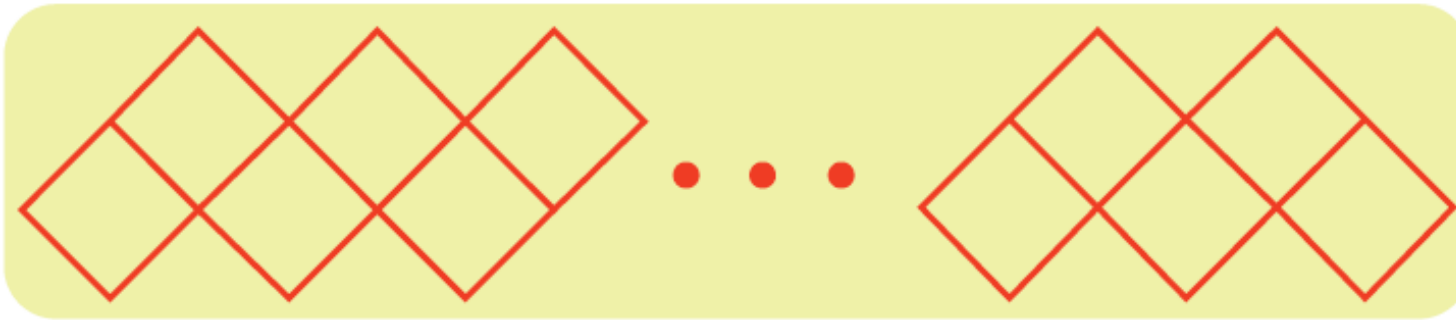


7) Ε)

Κάθε έδρα του κύβου είναι χρωματισμένη σαν σκακιέρα με δύο τετράγωνα κόκκινα και δύο πράσινα σε διαγώνιες σχετικές θέσεις. Αυτό αποκλείει αμέσως τα αναπτύγματα (Α), (Β) και (Δ) γιατί έχουν έδρες οι οποίες δεν είναι χρωματισμένες με αυτόν τον τρόπο. Επίσης, αν στον μεγάλο κύβο πάμε από μία έδρα σε διπλανή έδρα, τότε κάθε δύο τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά έχουν το ίδιο χρώμα (προέρχονται από τον ίδιο μικρό κύβο). Αυτό αποκλείει το ανάπτυγμα (Γ) γιατί όλα τα γειτονικά τετράγωνα έχουν διαφορετικό χρώμα. Μένει το (Ε), το οποίο είναι η σωστή απάντηση. Λίγη τρισδιάστατη εποπτεία μπορεί να μας πείσει ότι αν τυλίξουμε το ανάπτυγμα (Ε) για να ξαναφτιάξουμε τον κύβο, ο χρωματισμός είναι σωστά τοποθετημένος.

Ερώτηση 2

13) Στην εικόνα φαίνεται η αρχή και το τέλος ενός μοτίβου σχήματος ζιγκζαγκ που αποτελείται από 2013 τετράγωνα πλευράς 1 cm. Πόση είναι η εξωτερική περίμετρος του μοτίβου;



A) 2022 cm

B) 4028 cm

Γ) 4032 cm

Δ) 6038 cm

Ε) 8050 cm

13) B) 4028 cm

1ος τρόπος: Αν αγνοήσουμε προσωρινά το ακριανό μπλε τετράγωνο δεξιά, μένουν 2012 τετράγωνα. Αυτά χωρίζονται σε 1006 ζεύγη, όπως το χρωματισμένο πράσινο ζεύγος και τα χρωματισμένα κίτρινα ζεύγη. Τα κίτρινα ζεύγη, που είναι 1005, συνεισφέρουν από 4 cm στη περίμετρο (κόκκινες γραμμές στο σχήμα), οπότε συνολικά έχουμε συνεισφορά $1005 \times 4 = 4020$ cm. Σε αυτό έχουμε να προσθέσουμε άλλα 5 cm από το πράσινο ζεύγος αριστερά και 3 cm από το μπλε τετράγωνο δεξιά. Το σύνολο είναι $4020 + 5 + 3 = 4028$ cm.



2ος τρόπος: Αφού η δεύτερη σειρά αποτελείται από ένα τετράγωνο παραπάνω από ότι η πρώτη, η πρώτη σειρά έχει $\frac{2013-1}{2}=1006$ τετράγωνα (οπότε η δεύτερη έχει 1007 τετράγωνα). Η πρώτη σειρά τετραγώνων συνεισφέρει στην εξωτερική περίμετρο του σχήματος με $1006 \cdot 2$ cm και η δεύτερη καταρχήν κατά $1007 \cdot 2$ cm. Δεν έχουμε μετρήσει όμως από τη δεύτερη σειρά μία πλευρά παραπάνω για το πρώτο και το τελευταίο τετράγωνο. Επομένως η εξωτερική περίμετρος είναι $1006 \cdot 2 + 1007 \cdot 2 + 2 = (1006 + 1007 + 1) \cdot 2 = 2014 \cdot 2 = 4028$ cm.

Ερώτηση 3

23) Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν από το σημείο A μέχρι το B που ακολουθούν τη φορά που δείχνουν τα βέλη;

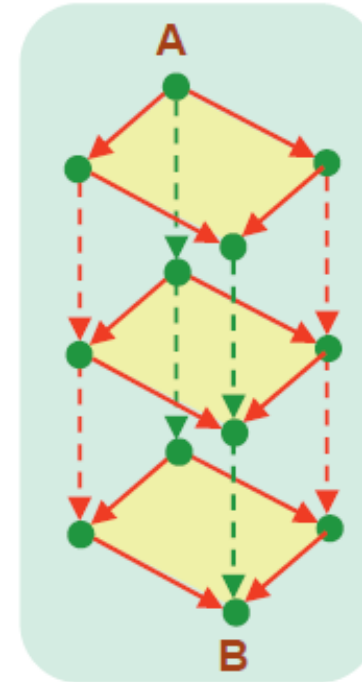
A) 9

B) 10

Γ) 11

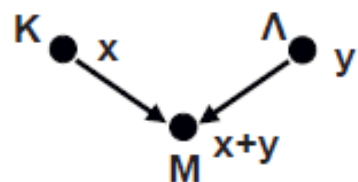
Δ) 12

Ε) 13



23) Δ) 12

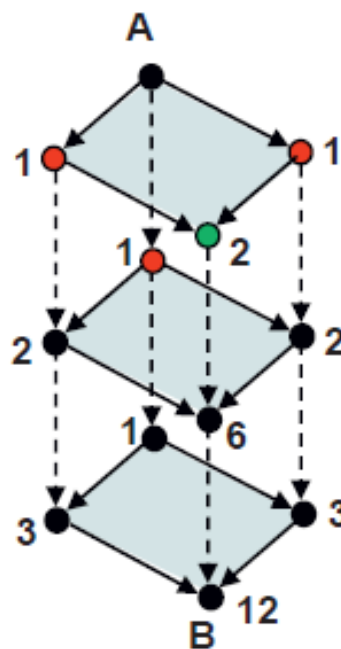
Η ιδέα είναι να μην καταγράψουμε όλες τις διαδρομές γιατί είναι πολλές και υπάρχει ο κίνδυνος να ξεχάσουμε κάποιες ή να διπλομετρήσουμε άλλες. Εργαζόμαστε με τον εξής πρακτικό τρόπο: Για να φτάσουμε σε ένα κόμβο εξετάζουμε με πόσους τρόπους φτάνουμε στους κόμβους που βρίσκο-



νται αμέσως πριν από αυτόν. Για παράδειγμα έστω ότι ο κόμβος που μας ενδιαφέρει είναι ο M (σχήμα αριστερά) και έστω ότι οι προηγούμενοι κόμβοι είναι δύο, οι K και Λ (αν ήσαν άλλο πλήθος κόμβων, η σκέψη που θα κάνουμε, δεν αλλάζει). Έστω ακόμα ότι υπάρχουν x τρόποι να φτάσουμε στον K και y τρόποι στον Λ. Τότε οι

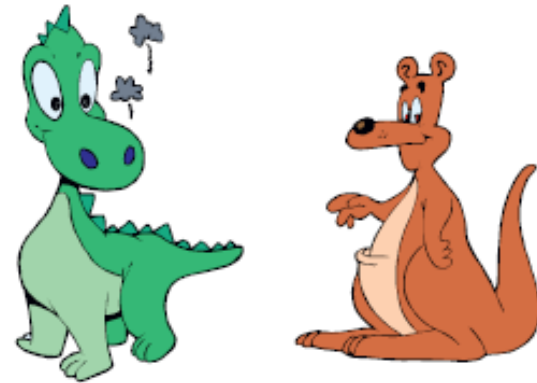
τρόποι να φτάσουμε στον M είναι $x+y$, διότι κάθε διαδρομή προς την M περνάει στο προηγούμενο βήμα είτε από τον K είτε τον Λ. Με άλλα λόγια, **το πλήθος των διαδρομών μέχρι έναν κόμβο είναι όσο το άθροισμα του πλήθους των διαδρομών μέχρι τους αμέσως προηγούμενους κόμβους.**

Με αυτή την σκέψη γράφουμε δίπλα σε κάθε κόμβο του αρχικού σχήματος το πλήθος των διαδρομών προς αυτόν. Πρώτα γράφουμε τον αριθμό 1 στους κόμβους που είναι γειτονικοί στον A (κόκκινοι στο σχήμα δεξιά) γιατί σε αυτούς υπάρχει μόνο ένας τρόπος να φτάσουμε, αρχίζοντας από την αφετηρία A. Κατόπιν γράφουμε σε κάθε κόμβο το άθροισμα των αριθμών στους κόμβους πριν από αυτόν. Για παράδειγμα στον πράσινο κόμβο θα γράψουμε $1+1=2$. Συμπληρώνοντας με αυτό τον τρόπο σταδιακά το σχήμα, από πάνω προς τα κάτω, στο B θα γραφεί το 12, που δηλώνει το πλήθος των διαδρομών από το A έως εκεί.



Ερώτηση 4

29) Σε ένα νησί ζουν 21 ζώα. Κάποια από αυτά είναι καγκουρό και τα υπόλοιπα είναι δράκοι (τουλάχιστον ένα από το κάθε είδος). Τα καγκουρό λένε πάντα την αλήθεια ενώ οι δράκοι λένε πάντα ψέματα. Κάθε μέρα φεύγει από το νησί ένα από τα ζώα. Τη στιγμή που φεύγει λέει «όταν θα φύγω από το νησί, το πλήθος των καγκουρό που μένουν θα είναι ίσο με το πλήθος των δράκων που μένουν». Πόσοι ήταν οι δράκοι αρχικά;



A) 0

B) 10

Γ) 11

Δ) 21

Ε) δε μπορούμε να ξέρουμε

29) B) 10

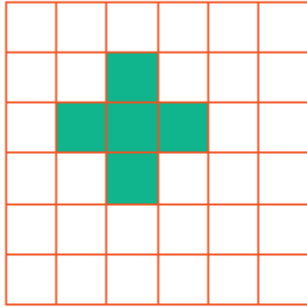
Το ζώο που αποχώρησε τη 2^η μέρα πρέπει να είπε ψέματα γιατί μένουν άλλες 19 μέρες (περιπτώσεις αριθμός) που σημαίνει ότι αποκλείεται το καγκουρό να είναι ίσα σε πλήθος με τους δράκους. Άρα το ζώο που αποχώρησε τη 2^η μέρα ήταν δράκος. Όμοια αποχώρησε δράκος στις ημέρες 4, 6, 8, ..., 20. Συνολικά αυτό μας κάνει 10 δράκους, οι οποίοι αποχώρησαν τις άρτιες ημέρες. Θα δούμε τώρα ότι δεν μπορεί να υπήρχε άλλος δράκος, δηλαδή όλα τα υπόλοιπα ζώα ήταν καγκουρό. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι τουλάχιστον ένα ζώο είναι καγκουρό. Πραγματικά, την 21^η μέρα πρέπει να αποχώρησε καγκουρό γιατί αν ήταν δράκος, τότε το ζώο που αποχώρησε την 19^η μέρα είπε ψέματα (αυτά που έμειναν θα ήσαν δράκοι και τα δύο). Όμοια θα ήταν δράκος το ζώο που αποχώρησε την 17^η μέρα γιατί είπε ψέματα (μετά από αυτό υπάρχουν 4 δράκοι) και έτσι πηγαίνοντας προς τα πίσω θα είχαμε δράκους την 15^η, 13^η και λοιπά έως την πρώτη μέρα. Δηλαδή όλα τα ζώα θα ήσαν δράκοι, που αποκλείεται. Συμπεραίνουμε ότι την 21^η μέρα αποχώρησε καγκουρό. Άρα και την 19^η μέρα αποχώρησε καγκουρό γιατί είπε την αλήθεια (μετά από αυτό υπήρχε ο δράκος της 20^{ης} μέρας και το καγκουρό της 21^{ης}). Όμοια, πηγαίνοντας προς τα πίσω, είπαν αλήθεια τα ζώα που αποχώρησαν την 17^η, 15^η, και λοιπά μέχρι την 1^η μέρα. Συνοψίζοντας, τα καγκουρό και οι δράκοι είχαν την εξής διάταξη:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
																				

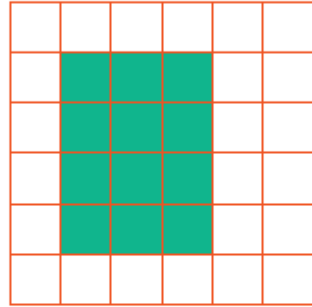
Ερώτηση 5

14) Ένα κυκλικό χαλί τοποθετείται σε ένα πάτωμα το οποίο αποτελείται από τετράγωνα πλακάκια. Όλα τα πλακάκια των οποίων το εσωτερικό τους έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με το χαλί έχουν χρωματιστεί πράσινα. Ποια από τις παρακάτω εικόνες δεν μπορεί να είναι σωστή;

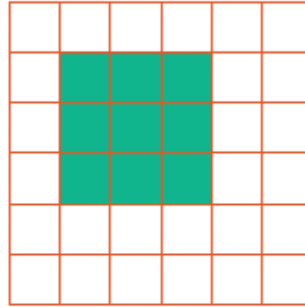
A)



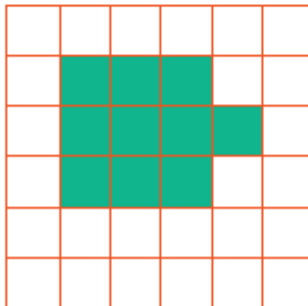
B)



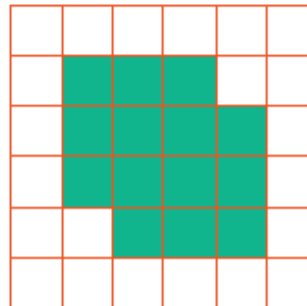
Γ)



Δ)

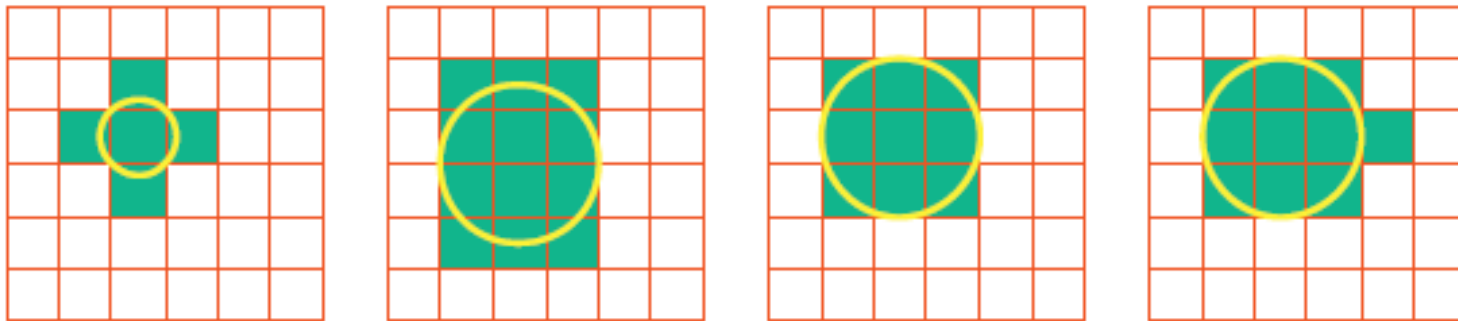


Ε)



14) E)

Οι εικόνες δείχνουν τη θέση του κυκλικού χαλιού στις περιπτώσεις (Α) (Β), (Γ) και (Δ). Στη περίπτωση του (Ε) δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθεί κυκλικό χαλί που να περιέχει σημεία από όλα τα σημειωμένα τετράγωνα και να μη περιέχει κανένα σημείο από τα υπόλοιπα.



Ερώτηση 6

3) Ένα πρίσμα έχει συνολικά 2013 έδρες. Πόσες ακμές έχει το πρίσμα αυτό; (Στην εικόνα φαίνεται ένα πρίσμα που δεν είναι της ερώτησης.)

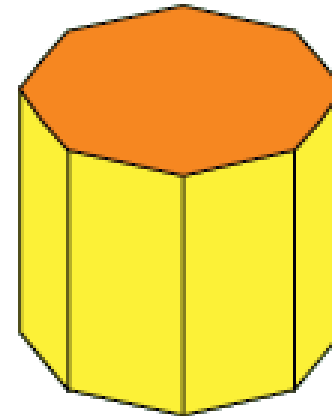
A) 2011

B) 2013

Γ) 4022

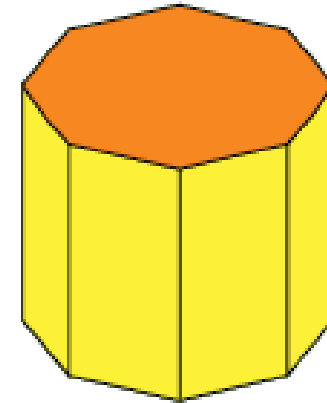
Δ) 4024

E) 6033



3) E) 6033

Αφού το πρίσμα έχει 2013 έδρες από τις οποίες οι δύο είναι βάσεις, οι υπόλοιπες 2011 είναι στο πλάι. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι οι βάσεις είναι πολύγωνα με 2011 πλευρές το καθένα. Οι ακμές του σχήματος είναι α) 2011 στη κάτω βάση, β) 2011 στη πάνω βάση και γ) 2011 στο πλάι. Σύνολο 6033.



Ερώτηση 7

15) Σε ένα κουτί υπάρχουν άσπρα και πράσινα χαρτάκια. Στο κάθε χαρτάκι είναι σημειωμένος από ένας φυσικός αριθμός. Ο Διόφαντος ισχυρίστηκε ότι σε κάθε άσπρο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι άρτιος. Αν ο Διόφαντος κάνει λάθος, πιο από τα παρακάτω είναι σίγουρα σωστό για τα χαρτάκια αυτά;

- A)** Σε κάθε άσπρο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.
- B)** Σε κάθε πράσινο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι άρτιος.
- Γ)** Σε κάθε πράσινο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.
- Δ)** Υπάρχει άσπρο χαρτί στο οποίο ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.
- Ε)** Υπάρχει πράσινο χαρτί στο οποίο ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.

15) Δ) Υπάρχει άσπρο χαρτί στο οποίο ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός.

Αν ο Διόφαντος κάνει λάθος όταν ισχυρίζεται ότι σε κάθε άσπρο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι άρτιος, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία εξαίρεση σε αυτό που λέει. Δηλαδή σίγουρα υπάρχει άσπρο χαρτί στο οποίο ο σημειωμένος αριθμός δεν είναι άρτιος, που σημαίνει ότι είναι περιττός. Με άλλα λόγια ισχύει το (Δ). Ας σχολιάσουμε και τις υπόλοιπες απαντήσεις: Η (Α) «Σε κάθε άσπρο χαρτί ο σημειωμένος αριθμός είναι περιττός» δεν είναι σίγουρα σωστή. Ο Διόφαντος θα έκανε λάθος και με έναν περιττό σε άσπρο χαρτί, ενώ δεν είναι ανάγκη να είναι σε όλα περιττοί. Επίσης, το τι περιέχουν τα πράσινα χαρτιά δεν μας αφορά. Είτε περιέχουν άρτιο είτε περιττό αριθμό, δεν είναι αρκετό για να είμαστε βέβαιοι ότι ο αριθμός στα άσπρα χαρτιά είναι ή δεν είναι άρτιος. Έτσι οι απαντήσεις (Β), (Γ) και (Ε) δεν είναι η σωστή απάντηση στο πρόβλημά μας.

Ερώτηση 8

22) Σε κάποιες εκλογές πήραν μέρος 5 υποψήφιοι. Συνολικά οι ψήφοι ήταν 36 και ο κάθε υποψήφιος είχε διαφορετικό αριθμό ψήφων από οποιονδήποτε από τους υπόλοιπους. Αυτός που ήρθε πρώτος είχε 12 ψήφους και ο τελευταίος είχε 4. Πόσους ψήφους είχε αυτός που βγήκε δεύτερος;

A) οπωσδήποτε 7

B) ή 8 ή 9

Γ) οπωσδήποτε 10

Δ) ή 10 ή 11

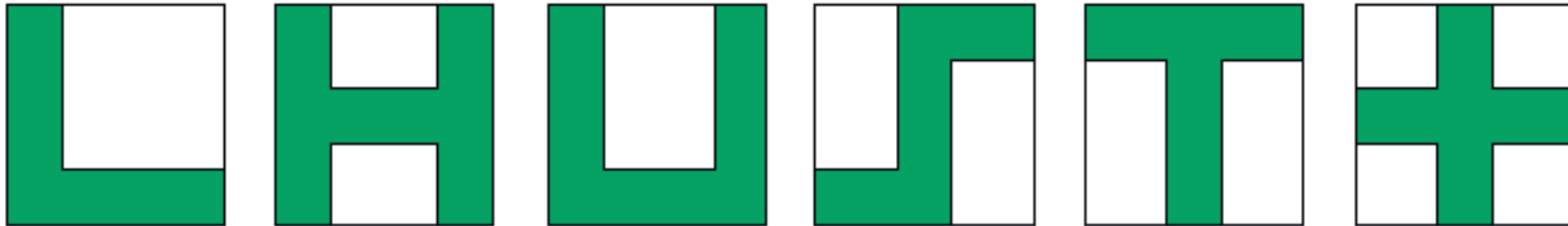
E) οπωσδήποτε 11

22) B) ή 8 ή 9

Ο πρώτος και ο τελευταίος μαζί έχουν $12 + 4 = 16$ ψήφους, οπότε οι υπόλοιποι έχουν $36 - 16 = 20$ ψήφους. Ο δεύτερος έχει περισσότερους από 7 ψήφους γιατί αν είχε 7 ή λιγότερους, τότε ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος μαζί θα είχαν το πολύ $7 + 6 + 5 = 18$ ψήφους ενώ ξέρουμε ότι έχουν 20. Άρα αυτή η περίπτωση δεν υπάρχει. Επίσης ο δεύτερος έχει λιγότερες από 10 ψήφους γιατί αν είχε 10 ή περισσότερες τότε ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος μαζί θα είχαν τουλάχιστον $10 + 5 + 6 = 21$ ψήφους ενώ ξέρουμε ότι έχουν 20. Άρα ούτε αυτή η περίπτωση δεν υπάρχει. Συνεπώς ο δεύτερος έχει ή 8 ή 9 ψήφους. Ας προσθέσουμε ότι και οι δύο αυτές εκδοχές είναι πιθανές. Για παράδειγμα οι ψήφοι θα μπορούσαν να ήταν $12 + 9 + 6 + 5 + 4 = 32$ ή $12 + 8 + 7 + 5 + 4 = 32$.

Ερώτηση 9

2) Η Άρτεμις ζωγράφισε κάποια σχήματα σε έξι ολόγεια άσπρα τετράγωνα φύλλα χαρτιού, όπως δείχνει η εικόνα. Πόσα από αυτά τα σχήματα έχουν περίμετρο ίση με την περίμετρο του χαρτιού που το περιέχει;



A) δύο

B) τρία

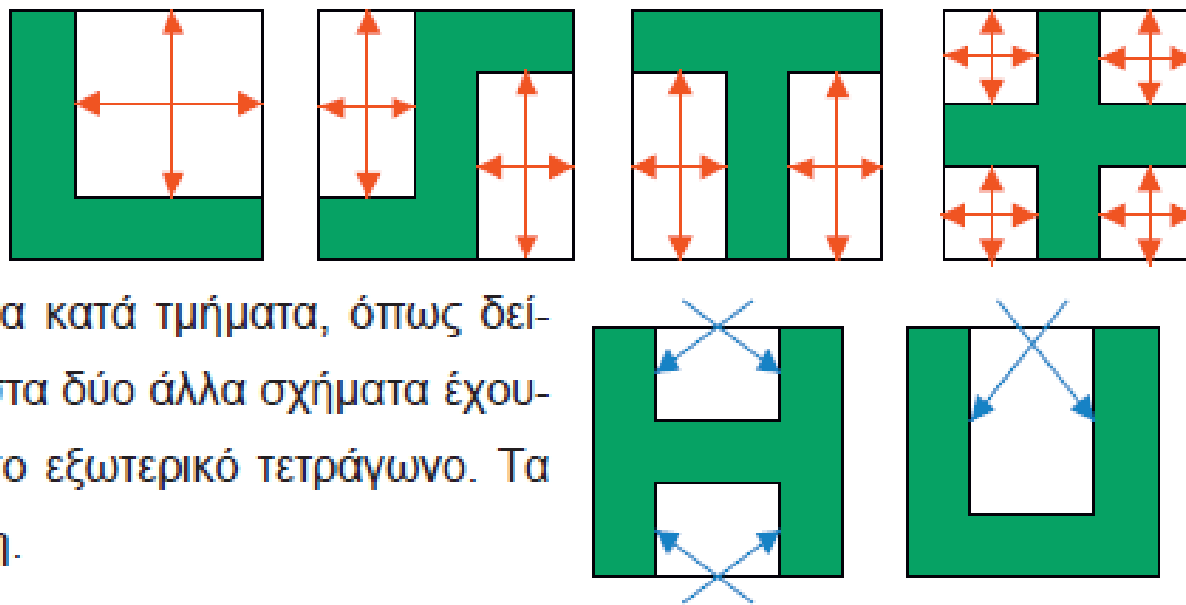
Γ) τέσσερα

Δ) πέντε

E) έξι

2) Γ) τέσσερα

Τα 4 σχήματα της εικόνας έχουν την ίδια περίμετρο με το εξωτερικό τετράγωνο. Δεν υπάρχει λόγος να βρούμε την περίμετρο καθενός, αλλά να παρατηρήσουμε ότι έχουμε ισότητα κατά τμήματα, όπως δείχνουν τα κόκκινα βελάκια. Αντίθετα, στα δύο άλλα σχήματα έχουμε μήκη που δεν έχουν αντίστοιχο στο εξωτερικό τετράγωνο. Τα γαλάζια βελάκια δείχνουν αυτά τα μήκη.



Ερώτηση 10

9) Στο δάσος υπάρχουν 20 καγκουρό που ζουν σε 6 φωλιές. Στη πρώτη φωλιά ζει 1 καγκουρό, στη δεύτερη 2 και στη τρίτη 3. Στη τέταρτη φωλιά ζούνε περισσότερα καγκουρό από ότι σε οποιαδήποτε από τις άλλες πέντε φωλιές. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από καγκουρό που μπορεί να ζουν στη τέταρτη φωλιά;

A) 7

B) 6

Γ) 5

Δ) 4

E) 3

9) B) 6

Αν στην τέταρτη φωλιά ζούσαν 5 καγκουρό ή λιγότερα τότε, αφού η φωλιά αυτή είναι η πολυπληθέστερη, στις δύο τελευταίες φωλιές θα ζούσαν το πολύ από 4. Αλλά τότε συνολικά τα καγκουρό θα ήσαν, κατά σειρά, το πολύ $1+2+3+4+4+5=19 < 20$. Άρα η τέταρτη φωλιά έχει τουλάχιστον 6 καγκουρό. Αυτός είναι και ο μικρότερος δυνατός αριθμός, αφού θα μπορούσαν για παράδειγμα να ζούσαν στις φωλιές, κατά σειρά, $1+2+3+6+4+4=20$ καγκουρό. Ας προσθέσουμε ότι υπάρχουν και άλλοι πιθανοί συνδυασμοί που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες όπως π.χ. $1+2+3+6+3+5=20$ ή $1+2+3+12+1+1=20$ και άλλες. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι δείξαμε ότι δεν γίνεται να ζουν 5 ή λιγότερα καγκουρό στην τέταρτη φωλιά και ότι η περίπτωση να ζουν 6 δεν είναι αδύνατη.