

Όρια

Το όριο μιας συνάρτησης το συμβολίζουμε με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

• Αυτό σημαίνει το όριο της $f(x)$ όταν το x πλησιάζει το x_0 .

• Λέμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 , αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι αριθμός πραγματικός.

• Ιδιότητες : Αν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ τότε

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \cdot l_1$

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$

4) Αν $l_2 \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$

5) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = l_1^v$

6) Αν $l_1 \geq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[v]{f(x)} = \sqrt[v]{l_1}$

• Η f λέγεται συνεχής στο x_0 , αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Προσοχή αυτὰ
δεν τὰ ἔχει
σωστὰ στο
βιβλίο ηλεκτρονικά.

Ασκήσεις

1) Να υπολογίσεις τα όρια

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{3x + 3}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 6x^2}{4x - 12}$$

Λύση

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \cdot \cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{3x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \cdot \cancel{(x+1)}}{3 \cdot \cancel{(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \cdot \cancel{(x-2)}}{3 \cdot \cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{3} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 6x^2}{4x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 \cdot \cancel{(x-3)}}{4 \cdot \cancel{(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2}{4}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^2}{4} = \frac{2 \cdot 9}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = \frac{4}{3}$$

2) Να υπολογίσετε τα όρια

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x - 1}{3x^2 - 3}$$

Λύση

i). Για το $x^2 - 2x = x \cdot (x - 2)$

Για το $3x^2 - 5x - 2$ κάνουμε Höpner

3	-5	-2	
3	+1	0	
	6	2	

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2) \cdot (3x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{3x + 1}$$

$$= \frac{2}{6 + 1} = \frac{2}{7}$$

ii) Κάνουμε Höpner για το $x^3 - 5x + 2$

1	0	-5	2	
1	2	-1	0	
	2	4	-2	

$$x^3 - 5x + 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 1)}{(x - 2) \cdot (3x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 1} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 1}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{4 + 4 - 1}{6 + 1} = \frac{7}{7} = 1$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x^3 + 8}$$

Κάνουμε Hörner για το $x^3 + 8$

1	0	0	8	-2
1	-2	4	-8	
1	-2	4	0	

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2 - 2x + 4} = \frac{-2-2}{(-2)^2 - 2(-2) + 4}$$

$$= \frac{-4}{4+4+4} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{3 \cdot (x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)}{3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)}$$

2	0	0	-1	-1	1
2	2	2	2	1	
2	2	2	1	0	

$$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{7}{2}$$

3) Να υπολογίσετε τα όρια

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+3}-2}{2x^2+x-1}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}-1}{x-1}$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x^2-3x+4}$$

Λύση

i) Βάζουμε $x^2+3 = f(x)$ άρα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{f(x)}-2) \cdot (\sqrt{f(x)}+2)}{(x-1) \cdot (\sqrt{f(x)}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$= \frac{1+1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ii) Έστω $f(x) = 2x^2-2x+1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{f(x)}-1)(\sqrt{f(x)}+1)}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2x}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{f(x)}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\sqrt{f(x)}+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{f(1)}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

iii) Έστω $f(x) = 4x^2 + 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(\sqrt{f(x)} - 2) \cdot (\sqrt{f(x)} + 2)}{(2x^2 + x - 1) \cdot (\sqrt{f(x)} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{f(x) - 4}{(2x^2 + x - 1)(\sqrt{f(x)} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{4x^2 - 1}{(2x^2 + x - 1)(\sqrt{f(x)} + 2)}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 0 & -1 & \\ \hline 1/2 & 2 & 1 & \\ \hline 4 & 2 & 0 & \end{array} \quad 1/2 \quad 4x^2 - 1 = (x - 1/2) \cdot (4x + 2)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & -1 & \\ \hline 1/2 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & 0 & \end{array} \quad 1/2 \quad 2x^2 + x - 1 = (x - 1/2)(2x + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(x - 1/2)(4x + 2)}{(x - 1/2)(2x + 2) \cdot (\sqrt{f(x)} + 2)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} + 2}{(2 \cdot \frac{1}{2} + 2) \cdot (\sqrt{f(\frac{1}{2})} + 2)}$$

$$= \frac{4}{3 \cdot (\sqrt{4 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 3} + 2)} = \frac{4}{3 \cdot (\sqrt{4} + 2)} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}$$

iv) Έστω $f(x) = 3x^2 + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{f(x)} - 2) \cdot (\sqrt{f(x)} + 2)}{(x^2 - 5x + 4) \cdot (\sqrt{f(x)} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{(x^2 - 5x + 4) \cdot (\sqrt{f(x)} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{(x^2 - 5x + 4)(\sqrt{f(x)} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{f(x)} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot (x+1)}{(x-4)(\sqrt{f(x)} + 2)}$$

$$= \frac{3 \cdot (1+1)}{(1-4)(\sqrt{f(1)} + 2)} = \frac{3 \cdot 2}{-3 \cdot (\sqrt{4} + 2)} = \frac{2 \cdot 2}{-3 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

Σημαντική Σημείωση

Σε όλα τα παραπάνω αν
αντικαταστήσουμε θα βγεί $\frac{0}{0}$
που ονομάζεται απροσδιοριστία.