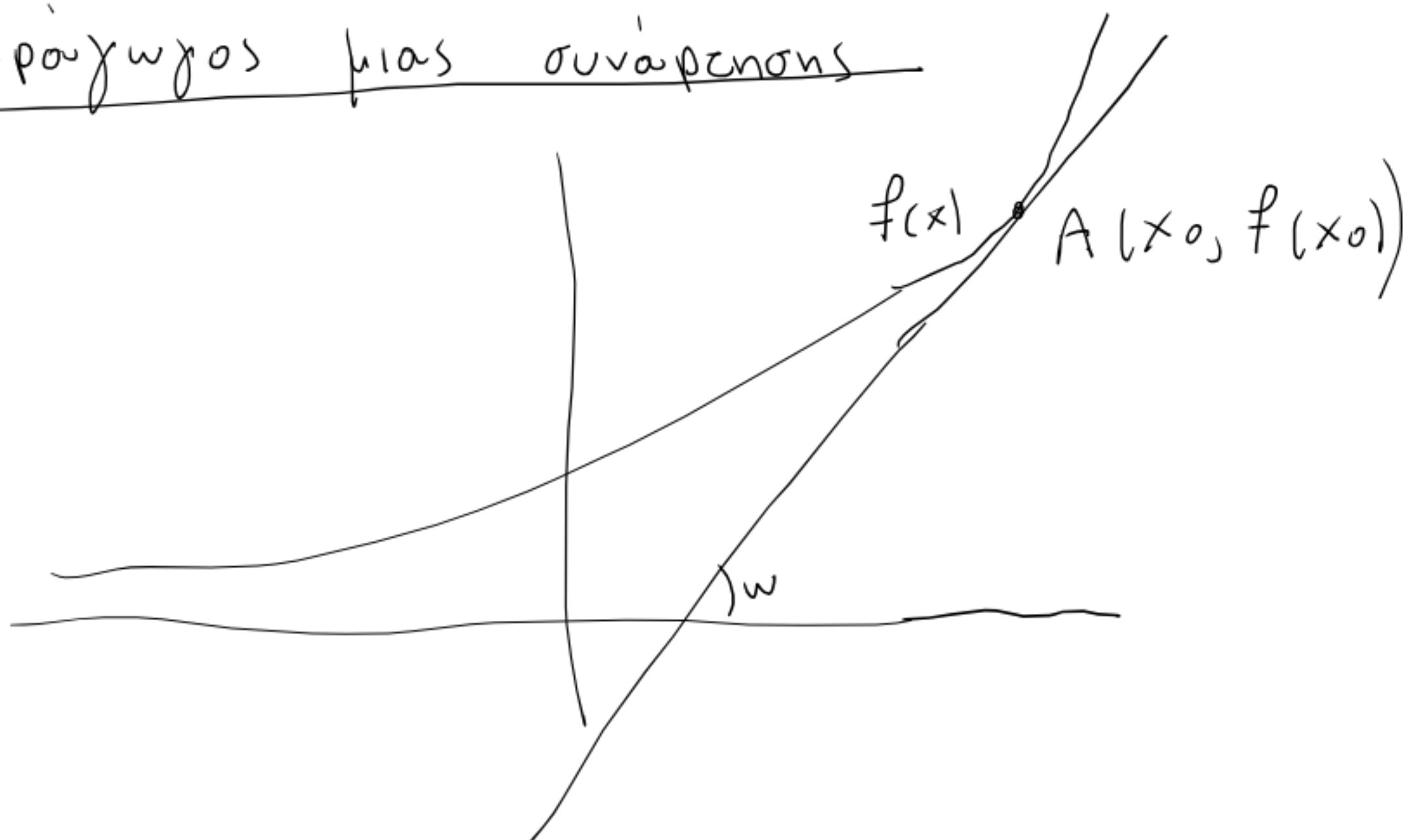


Παράγωγος μιας συνάρτησης



Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$ και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
Μας ενδιαφέρει να βρούμε την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο A .

Η κλίση δίνεται από το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} := \Delta w$

Ορισμός

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$. Το όριο το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 και το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$.

Σχόλιο

$A \cup f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πρώτη παράγωγο της f στο $x \in A$ ορίζουμε το όριο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Πρόταση

1) Αν $f(x) = C$ τότε $f'(x) = 0$

2) Αν $f(x) = x$ τότε $f'(x) = 1$

3) Αν $f(x) = x^2$ τότε $f'(x) = 2x$

Απόδειξη

1) Αν $f(x) = C \Rightarrow f(x+h) = C \Rightarrow f(x+h) - f(x) = C - C = 0$

άρα $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$

2) Αν $f(x) = x \Rightarrow f(x+h) = x+h \Rightarrow f(x+h) - f(x) = x+h - x = h$

άρα $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$

3) Αν $f(x) = x^2 \Rightarrow f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \Rightarrow$

$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$ άρα

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x+0 = 2x$$

Υπόλογισμοι κανόνες (χωρίς απόδειξη)

$$(x^v)' = v x^{v-1}$$

$$(\eta \mu x)' = \sigma \omega x$$

$$\left(\frac{1}{x^v}\right)' = (x^{-v})' = -v x^{-v+1} = \frac{-v}{x^{v+1}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sigma \omega x)' = -\eta \mu x$$

Πρόταση

Αν $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε

$$1) (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$2) (\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$$

Απόδειξη

$$1) (f(x) + g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} +$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

$$2) (\lambda f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda (f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lambda f'(x)$$

Υπόλοιποι κανόνες παραγώγισης (χωρίς απόδειξη)

$$1) (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad 3) (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$2) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Πινάκας Τριγωνομετρίας

ω	0	$30^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{6}$	$45^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{4}$	$60^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{3}$	$90^\circ \text{ ή } \frac{\pi}{2}$	$120^\circ \text{ ή } \frac{2\pi}{3}$	$135^\circ \text{ ή } \frac{3\pi}{4}$	$150^\circ \text{ ή } \frac{5\pi}{6}$	$180^\circ \text{ ή } \pi$
$\sin \omega$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$
$\cos \omega$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\tan \omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Κλίση Ευθείας

Οι ευθείες έχουν τις εξής δύο μορφές:

$$1) y = \alpha x + \beta$$

Για να την σχεδιάσουμε κάνουμε το εξής:

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & \beta & \alpha + \beta \end{array}$$

Βάζουμε δύο τιμές στα x και βρίσκουμε τα y .

Ενείπε βρίσκουμε τα δύο σημεία $(0, \beta)$, $(1, \alpha + \beta)$.

Τα τοποθετούμε στο επίπεδο και τα ενώνουμε.

$$2) x = \text{σταθερό}$$

Βρίσκουμε στον άξονα των x την σταθερά και φέρνουμε παράλληλη στον $y'x$.

Σημείωση

Εμάς μας απασχολούν ευθείες της $1^{\text{ης}}$ μορφής. Το α λέγεται κλίση της ευθείας και $f'(x_0) = \alpha$.

Όταν έχουμε μια συνάρτηση

$f(x)$ και ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$

Η εφαπτόμενη ευθεία στο A έχει

κλίση $f'(x_0)$. Άρα $\alpha = f'(x_0)$

$$y = \alpha \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = f'(x_0) \cdot x + \beta$$

Αντικαθιστούμε το σημείο οπότε

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + \beta \Leftrightarrow \beta = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \quad \text{άρα}$$

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \Leftrightarrow$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Παραδείγματα και Ασκήσεις

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 3$. Να βρείτε την παράγωγο της f στο x_0 .

Λύση

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 \cdot (3+h) + 1) - (3 \cdot 3 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{9} + 3h + \cancel{1} - \cancel{9} - \cancel{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω $g(x) = x^2 + 5$, $x_0 = -2$. Να βρείτε την παράγωγο της g στο x_0 .

Λύση

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(-2+h)^2 + 5] - [(-2)^2 + 5]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4} - 4h + h^2 + \cancel{5} - \cancel{4} - \cancel{5}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = 0 - 4 = -4. \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Το μήκος ενός κύκλου ακτίνας r είναι $L = 2\pi r$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του L ως προς r όταν $r = 3$.

Λύση

$$L(r) = 2\pi r$$

$$L'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(3+h) - L(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi(3+h) - 2\pi \cdot 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2\pi \cdot 3} + 2\pi h - \cancel{2\pi \cdot 3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\pi h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2\pi = 2\pi$$

Άσκηση 4

Το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας r είναι $E = \pi r^2$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r όταν $r = 2$.

Λύση

$$E(r) = \pi r^2$$

$$E'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(2+h) - E(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot (2+h)^2 - \pi \cdot 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi[(2+h)^2 - 2^2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot (\cancel{2} + h - \cancel{2})(2+h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot h \cdot (4+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \pi(4+h) = 4\pi$$

Άσκηση 5

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς x , όταν $x=5$

Λύση

$$E'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(5+h) - E(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h} =$$

$$E(x) = x^2 \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5+h-5)(5+h+5)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10+h) = 10+0 = 10.$$

Άσκηση 6

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου πλευράς x , όταν $x=10$.

Λύση

$$V(x) = x^3 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \Rightarrow V'(10) = 3 \cdot 10^2 =$$

$$= 3 \cdot 100 = 300.$$

Άσκηση 7

Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της

$$f(x) = x^2 \text{ στο } A(3, f(3))$$

Λύση

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$y - 9 = 6 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$$

$$y = 6x - 9.$$

Άσκηση 8

Έστω $f(x) = 2\sqrt{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση

εφαπτομένης της f στο $A(4, f(4))$

Λύση

$$f(4) = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot (\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$y - f(4) = f'(4) (x - 4) \Leftrightarrow y - 4 = \frac{1}{2} (x - 4) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x + 4 - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$