ΘΕΩΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο – ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

1. Τι λέμε συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β ;

Απάντηση

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μία διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β .

2. Πως ορίζεται η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$, όπου f , g δύο συναρτήσεις ορισμένες και οι δύο σε ένα σύνολο Α ;

Απάντηση

Είναι $R(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α . Τι λέγεται γραφική παράσταση ή καμπύλη της f και ποια είναι η εξίσωσή της;

Λύση

- Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.
- Η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f είναι η $y = f(x)$.

4. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

6. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

7. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη;

Απάντηση

Μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

8. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν ισχύει

$$f(x) \leq f(x_1)\ ,\ \text{για κάθε } x \text{ που ανήκει σε μία περιοχή του } x_1$$

9. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$;

Απάντηση

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_2 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν ισχύει

$$f(x) \geq f(x_2)\ ,\ \text{για κάθε } x \text{ που ανήκει σε μία περιοχή του } x_2$$

10. Τι λέγονται ακρότατα μιας συνάρτησης;

Απάντηση

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης τοπικά ή ολικά λέγονται **ακρότατα της** συνάρτησης.

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ σχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

12. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο x_0 ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

13. Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε ποια είναι η ταχύτητά του και ποια είναι η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t ;

Απάντηση

- Η ταχύτητά του είναι $\upsilon(t) = x'(t)$.
- Η επιτάχυνσή του είναι $\alpha(t) = \upsilon'(t)$ ή $\alpha(t) = x''(t)$.

14. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγήσιμη στο x_0 , τότε με τι ισούται ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ ισούται με την $f'(x_0)$.

15. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Τι λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f ;

Απάντηση

Έστω B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Παράγωγος της f λέγεται η συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

16. Τι λέγεται δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται δεύτερη παράγωγος της f .

17. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x) = c$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^\rho$, ρ θετικός ρητός , $f_4(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$,

$f_5(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f_6(x) = ημx$, $f_7(x) = συνx$, $f_8(x) = εφx$.

Απάντηση

Ισχύουν οι επόμενοι τύποι για τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων.

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
- $(ημx)' = συνx$
- $(συνx)' = -ημx$
- $(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2x}$

18. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x)$, όπου c πραγματική σταθερά , $f(x)+g(x)$,

$f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, με $g(x) \neq 0$, $f(g(x))$

Απάντηση

Ισχύουν οι επόμενοι τύποι για τους κανόνες παραγώγισης.

- $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Β. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

19. Έστω $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός.
Να αποδείξετε ότι $(c)' = 0$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.

Επομένως $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Άρα $(c)' = 0$.

20. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$ και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$. Άρα $(x)'=1$.

21. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=2x$.

Απόδειξη

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$,

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$. Άρα $(x^2)'=2x$.

22. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$, $x\in\Delta$.

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\left(f(x+h)-f(x)\right)$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$.

Άρα $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$

Απόδειξη

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)$

$$=\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right)$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$

Άρα $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o} – ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Α. ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

31. Τι λέγεται πληθυσμός;

Απάντηση

Πληθυσμός λέγεται το σύνολο του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία ως προς ένα η περισσότερα χαρακτηριστικά.

32. Τι λέγονται μεταβλητές ενός πληθυσμού;

Απάντηση

Μεταβλητές λέγονται τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό.

33. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποιοτικές ή κατηγορικές;

β. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές και σε τι διακρίνονται;

Απάντηση

α. Ποιοτικές ή κατηγορικές λέγονται οι μεταβλητές, των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.

β. Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές , των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

i. Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές.

ii. Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος (α, β) .

34. Πότε ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό;

Απάντηση

Ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

35. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ;

Απάντηση

Συχνότητα ν_i (απόλυτη) της τιμής x_i είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

36. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν $(\kappa \leq \nu)$, να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τη σχετική συχνότητα;

Απάντηση

Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i είναι το πηλίκο της διαίρεσης της συχνότητας ν_i με το μέγεθος του δείγματος ν. Δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, \kappa$$

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $0 \leq f_i \leq 1$

ii. $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$

37. Σε ποιες μεταβλητές χρησιμοποιούμε τις αθροιστικές συχνότητες N_i και τι εκφράζουν;

Απάντηση

Οι αθροιστικές συχνότητες N_i χρησιμοποιούνται όταν έχουμε ποσοτικές μεταβλητές και εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

38. Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και ποια είναι τα κυριότερα;

Απάντηση

- Τα μέτρα θέσης που μας δίνουν τη θέση του "κέντρου" των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.
- Τα κυριότερα μέτρα θέσης είναι: η μέση τιμή ή αριθμητικός μέσος, ο σταθμικός μέσος και η διάμεσος.

39. Σε ποιες μεταβλητές χρησιμοποιούμε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i και τι εκφράζουν;

Απάντηση

Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i χρησιμοποιούνται όταν έχουμε ποσοτικές μεταβλητές και εκφράζουν το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

40. Πως ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων;

Απάντηση

Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων δια του πλήθους των παρατηρήσεων.

41. α. Αν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

β. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής Χ είναι οι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ αντίστοιχα και ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων. Πως ορίζεται η μέση τιμή $\bar{x}$;

Απάντηση

α. Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$$

β. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μίας μεταβλητής Χ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ αντίστοιχα, τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \ldots + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i$$

42. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Απάντηση

Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

43. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Απάντηση

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

44. Τι μας δίνουν τα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας και ποια είναι τα κυριότερα;

Απάντηση

- Τα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας μας δίνουν τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το "κέντρο" τους.
- Τα κυριότερα μέτρα διασποράς είναι το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

45. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς εύρος ή κύμανση.

Απάντηση

Το εύρος ή κύμανση ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη.

Το εύρος συμβολίζεται με το R, οπότε

$$R = (\text{Μεγαλύτερη παρατήρηση}) - (\text{Μικρότερη παρατήρηση})$$

46. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X.

Απάντηση

Διακύμανση ή διασπορά των παρατηρήσεων t_1, t_2, ..., t_ν μιας μεταβλητής X καλείται ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους $\bar{x}$ και ορίζεται από τη σχέση

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu}$$

47. Τι λέμε τυπική απόκλιση;

Απάντηση

Τυπική απόκλιση s λέμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης s^2 και δίνεται από τη σχέση $s = \sqrt{s^2}$.

48. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X , αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Απάντηση

Ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας CV ορίζεται από το λόγο:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Αν $\bar{x} < 0$, τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $|\bar{x}|$.

Β. ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

49. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν , όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Να αποδείξετε ότι:

α. $0 \leq f_i \leq 1$ **για i = 1, 2, ..., κ.**

β. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$.

Απόδειξη

α. Είναι $0 \leq f_i \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \nu_i \leq \nu$, που ισχύει.

β. Έχουμε

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

50. Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι παρατηρήσεις μίας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$, τότε ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_1 - \bar{x}$, $t_2 - \bar{x}$, ... , $t_\nu - \bar{x}$ είναι ίσος με μηδέν.

Απόδειξη

Είναι

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + ... + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{(t_1 + t_2 + ... + t_\nu) - (\bar{x} + \bar{x} + ... + \bar{x})}{\nu}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} - \frac{\nu\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$