Σύνολο ονομάζουμε μια συλλογή αντικείμενων τα οποία είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

π.χ.

1) Το σύνολο των μαθητών/τριων της τάξης. Οι μαθητές είναι καλά ορισμένοι (ξέρουμε ποιοί είναι) και διακρίνεται ο ένας απ- τον άλλο.

2) Το σύνολο των μαθητών/τριων της τάξης που είναι ψηλοί. Αυτό δεν είναι καλώς ορισμένο σύνολο αφού δεν είναι ορισμένο το τι εννοούμε ψηλός αφού για κάποιους είναι ψηλός >1.80 για άλλους οχι πχ. στο nba.

Πράξεις Συνόλων

1) $\in$ ανήκει $\notin$ δεν ανήκει.

π.χ.

Αν $A=\{1,2,3\}$, $1\in A$ (το 1 ανήκει στο A)

$4\notin A$ (το 4 δεν ανήκει στο A).

2) Ένωση $\cup$

π.χ.

Αν $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4\}$ $A\cup B=\{1,2,3,4\}$ (ενώνουμε τα σύνολα)

3) Τομή $\cap$

π.χ.

Αν $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ $A\cap B=\{2,3\}$ (τα κοινά)

Άσκηση 1

Αν $A = \{ x \in \mathbb{N} / x$ διαιρέτης του $16 \}$

χανήκει στους φυσικούς

ίσχύια ώστε

x διαιρέτης του 16

$B = \{ x \in \mathbb{N} / x$ διαιρέτες του $24 \}$

Βρείτε $A \cup B$ και $A \cap B$

Λύση

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$

$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$

Άσκηση 2

$A = \{$Τα φωνήεντα$\}$, $B = \{$Τα σύμφωνα$\}$

Βρείτε $A \cup B$, $A \cap B$

Λύση

$A \cup B = \{$Τα φωνήεντα, Τα σύμφωνα$\} = \{$όλη η αλφαβήτα$\}$

$A \cap B =$ Τίποτα. Δεν υπάρχει γράμμα που να είναι και φωνήεν και σύμφωνο. Στα μαθηματικά αυτό το συμβολίζουμε με $\emptyset$ δηλαδή $A \cap B = \emptyset$.

Πράξεις πραγματικών αριθμών

• Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ είναι οι ρητοί μαζί με τους άρρητους. Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν ως κλάσμα π.χ. $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{-3}, \frac{1}{-3}$ κ.ο.κ (ρητοί)

Άρρητοι π.χ. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pi$ κ.ο.κ. (άρρητοι)

Πράξεις

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Παραδείγματα επιμεριστικής

1) $2\cdot(x+1) = 2\cdot x + 2\cdot 1 = 2x+2$

2) $x\cdot(x+2) = x\cdot x + x\cdot 2 = x^2+2x$

3) $x\cdot(x-1) = x\cdot x - x\cdot 1 = x^2 - x$

4) $(x+1)\cdot(x+2) = x\cdot x + x\cdot 2 + 1\cdot x + 2 = x^2+2x+x+2$

$= x^2+3x+2$

5) $(+1-x)\cdot(-x-2) = -x-2+x^2+2x = x^2+x-2$

Επιπλέον παραδείγματα στην επιμεριστική

π.χ.

1) $-x \cdot (+x-2) = -x^2 + 2x$

$- \cdot + = -$ $- \cdot - = +$

πλην επι + = πλην   πλην επί πλην = +

2) $(x-1)(x-1) = x^2 - x - x + 1 = x^2 - 2x + 1$

3) $(x+1)\cdot(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$

4) $(x+1)\cdot(x-1) = x^2 \cancel{-x} \cancel{+x} - 1 = x^2 - 1$

5) $x^2(x-1) = x^3 - x^2$

6) $x^3(x-1) = x^4 - x^3$

7) $x^4(x-1) = x^5 - x^4$

δηλαδή

$x^\alpha \cdot x = x^{\alpha+1}$

8) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

9) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

10) $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Ταυτότητες

SOS!! SOS!!
SOS!! SOS!!
SOS!! SOS!!

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

Απόδειξη 1ης

$\alpha\beta = \beta\alpha$

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη 2ης

$\alpha\beta = \beta\alpha$

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη 3ης

$$(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \cancel{\alpha\beta} - \cancel{\alpha\beta} - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}$, ii) $\dfrac{(\alpha^2-\alpha)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}$

Λύση

i) $$\frac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\cancel{\alpha}(\alpha^2-2\alpha+1)}{\cancel{\alpha}(\alpha-1)}=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{\alpha^2-2\alpha\cdot 1+1^2}{\alpha-1}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)\cdot\cancel{(\alpha-1)}}{\cancel{\alpha-1}}=\alpha-1$$

ii) $$\frac{(\alpha^2-\alpha)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)+2\cdot(\alpha-1)}{(\alpha-1)\cdot(\alpha+1)}=\frac{\cancel{(\alpha-1)}\cdot(\alpha+2)}{\cancel{(\alpha-1)}\cdot(\alpha+1)}=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

Άσκηση 2

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}$$

Λύση

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}=\left(\frac{\overset{\alpha}{\alpha}}{1}-\frac{\overset{1}{1}}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha(\alpha^2+\alpha)}{(\alpha+1)^3}=\left(\frac{\alpha^2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha\cdot\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)^3}$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha+1)^3}=\frac{(\alpha^2-1)\cdot\alpha^2\cdot(\alpha+1)}{\alpha\cdot(\alpha+1)^3}=\frac{(\alpha-1)\cdot\cancel{(\alpha+1)}\cdot\alpha\cdot\cancel{\alpha}\cdot\cancel{(\alpha+1)}}{\cancel{\alpha}\cdot\cancel{(\alpha+1)}\cdot\cancel{(\alpha+1)}\cdot(\alpha+1)}$$

$$=\frac{(\alpha-1)\cdot\alpha}{\alpha+1}$$

Θέμα 2 (14646)

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$

β) Αν $(\alpha+\beta)^2=4\alpha\beta$ τότε $\alpha=\beta$

Λύση

α) $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

ταυτότητα

β) $(\alpha+\beta)^2=4\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=4\alpha\beta \Rightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta+\beta^2=0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2=0$

$\Rightarrow \alpha=\beta$.

Άσκηση 2

Για τους αριθμούς $2\alpha+1$ και $\beta+1$ ισχύει ότι $(2\alpha+1)\cdot(\beta+1)=1$, να δείξετε ότι:

α) $2\alpha+\beta+2\alpha\beta=0$

β) Οι αριθμοί $x=\alpha(2+\beta)$ και $y=\beta(\alpha+1)$ είναι αντίθετοι

Λύση

α)

Δεδομένο	Ζητούμενο
$(2\alpha+1)\cdot(\beta+1)=1$	$2\alpha+\beta+2\alpha\beta=0$

$(2\alpha+1)\cdot(\beta+1)=1 \Rightarrow 2\alpha\beta+2\alpha+\beta+1=1 \Rightarrow 2\alpha\beta+2\alpha+\beta=1-1=0$

άρα $2\alpha+\beta+2\alpha\beta=0$

β) $x=\alpha(2+\beta)$, $y=\beta(\alpha+1)$

$x+y=\alpha(2+\beta)+\beta(\alpha+1)=$

$=2\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta=2\alpha+2\alpha\beta+\beta=0$

άρα αντίθετοι.