$ax^2+\beta x+\gamma=0$, $a\neq 0$ Γεν. μορφη β' βαθμιας εξισωσης

Π: $a\neq 0$

Μεθοδος συμπληρωσης τετραγωνου

$$x^2+\frac{\beta}{a}\cdot x+\frac{\gamma}{a}=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2a}+\frac{\gamma}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{\beta}{2a}+\left(\frac{\beta}{2a}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{\gamma}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\frac{\beta^2}{4a^2}+\frac{\gamma}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2-\frac{\beta^2}{4a^2}+\frac{4a\gamma}{4a^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2=\frac{\beta^2-4a\gamma}{4a^2} \quad (1)$$

≥ 0 , > 0

ορίζω $\Delta=\beta^2-4a\gamma$ Διακρίνουσα

Διακρίνω τις 3 περιπτώσεις:

1η) Αν $\Delta<0$, η εξίσωση (1) είναι ΑΔΥΝΑΤΗ στο $\mathbb{R}$

2η $\Delta=0$

$$(1) \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{\beta}{2a}=0 \Leftrightarrow \boxed{x_0=-\frac{\beta}{2a}}$$

η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα

3η $\Delta>0$

$$(1) \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (\text{όλα θετικά}) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Leftrightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|2a|} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ή} \quad x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \qquad x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\sqrt{a}^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ή } a = -b$$

Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις

• $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1), $\alpha \neq 0$ Γενική μορφή δευτεροβάθμιας εξίσωσης

α: συντελεστής x^2, β: συντελεστής του x, γ: σταθερός όρος

ορίζω $\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$, διακρίνω τις 3 περιπτώσεις:

1η $\Delta > 0$ (θετική): η εξίσωση (1) έχει 2 πραγματικές ρίζες (λύσεις) άνισες.

τις x_1, x_2: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

2η $\Delta = 0$: η εξίσωση (1) έχει 1 διπλή πραγματική ρίζα: $x_0 = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

3η $\Delta < 0$ (αρνητική): η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες ή είναι ΑΔΥΝΑΤΗ στο $\mathbb{R}$

Πχ $x^2 - 5x + 6 = 0$

$a = 1$
$\beta = -5$
$\gamma = 6$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

έχω 2 πρ. ρίζες ανισες

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$+ \rightarrow \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = (3)$

$- \rightarrow \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = (2)$

• Ρίζες ενός Πολυωνύμου είναι οι τιμές που το μηδενίζουν

$2x - 3 = 5 \Longrightarrow$

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \overset{:2}{\Longrightarrow} x = 4$

λύση

$x^2 - 5x + 6 = 0 \ldots\ldots \rightarrow x_1 = 3$
$\rightarrow x_2 = 2$ ρίζες τις εξίσωσης

Πχ $25x^2 - 40x + 16 = 0$

$a = 25$
$\beta = -40$
$\gamma = 16$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-40)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 16 = 1600 - 1600 = 0$

Έχει μια διπλή πρ. ρίζα

$$x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-40)}{2 \cdot 25} = \frac{40}{50} = 4/5 \Longrightarrow \boxed{x_0 = 4/5}$$

$a \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow$
$a = 0$ ή $\beta = 0$

β' τρόπος: $25x^2 - 40x + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$(5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 4 + 4^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(5x-4)^2 = 0 \quad (*) \Leftrightarrow$

$5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$ (:5)

$\boxed{x = 4/5}$

α' τρόπος (*) $(5x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(5x-4)(5x-4) = 0 \Leftrightarrow$

$5x - 4 = 0$ ή $5x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{5x}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$ (:5) $\boxed{x = 4/5}$

$\frac{5x}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$ (:5) $\boxed{x = 4/5}$

Γιατί αν $\Delta = 0$: έχω 1 διπλή Πρ. ρίζα

πχ $3x^2 - 6x + 12 = 0$

$a = 3$
$\beta = -6$
$\gamma = 12$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 36 - 144 = -108 < 0$

Δεν ανήκει στο $\mathbb{R}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

πχ $3x^2 = 6x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$a = 3$
$\beta = -6$
$\gamma = 2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$
$(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$
$36 - 24 = 12 > 0$

Έχει 2 πραγματικές ρίζες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} =$

$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$ $\xrightarrow{+}$ $\frac{6 + \sqrt{12}}{6}$

$\frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$ $\xrightarrow{-}$ $\frac{6 - \sqrt{12}}{6}$

• $\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$ $\xrightarrow{+}$ $\frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$

$\frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$ $\xrightarrow{-}$ $\frac{6 - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$