

A.2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΥ ΙΩΑΝΝΑ

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση με έναν άγνωστο λέμε την εξίσωση που ο μεγαλύτερος εκθέτης του είναι ο αριθμός 2.

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι η $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

- Οι αριθμοί a, b, c λέγονται συντελεστές της εξίσωσης
- Ο αριθμός c λέγεται σταθερός όρος της εξίσωσης

Ο αριθμός r λέγεται λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού όταν την επαληθεύει. Δηλαδή, όταν ισχύει η ισότητα $ar^2 + br + c = 0$.

Επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων**Επίλυση εξίσωσης της μορφής $ax^2 + bx = 0$**

Βήμα 1^ο: Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1^ο μέλος της εξίσωσης.

Βήμα 2^ο: Αναλύουμε το 1^ο μέλος σε γινόμενο παραγόντων.

Βήμα 3^ο: Κάνουμε χρήση της ιδιότητας $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$, και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης.

Επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + c = 0$ με $a \neq 0$

Η εξίσωση $x^2 + a = 0$	
$a > 0$	Έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt{a}$ και $x = -\sqrt{a}$
$a = 0$	Έχει μία λύση, την $x=0$ (διπλή)
$a < 0$	Δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

Επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ με χρήση τύπου

Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ γράφεται ισοδύναμα και ως $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, όπου η παράσταση $b^2 - 4ac$ λέγεται διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ και συμβολίζεται με Δ . Δηλαδή, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$	
$\Delta > 0$	Έχει δύο λύσεις τις $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2a}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Έχει μία λύση, την $x = \frac{-\beta}{2a}$ (διπλή)
$\Delta < 0$	Δεν έχει λύσεις (αδύνατη)

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Έστω το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις ρ_1 και ρ_2 και το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ γράφεται ως $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
- Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα την $\rho = \frac{-\beta}{2a}$ και το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ γράφεται ως $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho)^2$

Παρατήρηση: Σε αυτή την περίπτωση το τριώνυμο είναι ανάπτυγμα τετραγώνου με $a > 0$.

- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει καμία ρίζα και το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων.

Άσκηση 1: Να λύσετε τις εξισώσεις:

- $2x^2 + 3x + 1 = 0$
- $6x^2 = x + 1$
- $5x = 3x^2 + 2$
- $3x^2 + 18x - 21 = 0$
- $5x^2 = 40x - 40$

Άσκηση 2: Να λύσετε τις εξισώσεις

- $x^2 - 2(x - 1) = 2x - 1$
- $7x^2 - (3x - 1)^2 = x + 2$
- $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = 0$
- $x - \frac{x^2 - 2}{3} = -3$

Άσκηση 3: Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

- $x^2 + 6x + 9 = 0$
- $x^2 - 6x + 9 = 0$
- $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- $10x^2 - x - 2 = 0$
- $5x^2 + x - 4 = 0$