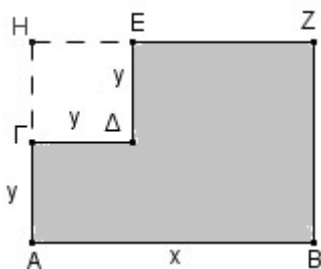


ΘΕΜΑ 2

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $L=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = L$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)