

ΚΕΦ 3. §3.2 Λύση της Εξίσωσης $x^v = a$, όπου v φυσικός αριθμός

Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $x^v = a$ θα πρέπει να προσέξουμε αν το a είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν και το v αν είναι άρτιος ή περιττός φυσικός αριθμός.

Άρα συνολικά μπορούμε να βρούμε 5 δυνατές περιπτώσεις, όπως φαίνονται και στον πίνακα που ακολουθεί.

Τιμές του a	Τιμές του v	Πλήθος λύσεων	Γενική μορφή εξίσωσης	παράδειγμα
$a=0$	$v \in \mathbb{N}$	1	$x^v = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$x^5 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$a > 0$	v περιττός	1	$x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$	$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$
	v άρτιος	2	$x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$ ή $x = -\sqrt[v]{a}$	$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$
$a < 0$	v περιττός	1	$x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{ a }$	$x^5 = -32 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{ -32 } \Leftrightarrow x = -2$
	v άρτιος	0	$x^v = a$ αδύνατη	$x^2 = -4$ αδύνατη

Παραδείγματα εξισώσεων της μορφής $x^v = a$ **Παράδειγμα 1ο**

Να λυθεί η εξίσωση: $x^3 = 27$

Λύση

Παρατηρώ ότι έχει τη μορφή $x^v = a$ με $a=27>0$ και $v=3$ περιττός, άρα θα έχει μια λύση

Δηλ. $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$

Παράδειγμα 2ο

Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - 16 = 0$

Λύση

Η εξίσωση γίνεται $x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 16$

Παρατηρώ ότι έχει τη μορφή $x^v = a$ με $a=16>0$ και $v=4$ άρτιος, άρα θα έχει δύο λύσεις

Δηλ. $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Παράδειγμα 3ο

Να λυθεί η εξίσωση: $(x-2)^3 - 8 = 0$

Λύση

Η εξίσωση γίνεται $(x-2)^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 8$

Παρατηρώ ότι έχει τη μορφή $x^n = a$ με $a=8>0$ και $n=3$ περιττός, άρα θα έχει μια λύση

Δηλ. $(x-2)^3 = 8 \Leftrightarrow (x-2) = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Παράδειγμα 4ο

Να λυθεί η εξίσωση: $(x + \sqrt{x})^4 = -8$

Λύση

Παρατηρώ ότι έχει τη μορφή $x^n = a$ με $a=-8<0$ και $n=4$ άρτιος, άρα δεν θα έχει καμία λύση

Δηλ. η εξίσωση $(x + \sqrt{x})^4 = -8$ είναι αδύνατη

Παράδειγμα 5ο

Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 + x = 0$

Λύση

Παρατηρώ ότι δεν έχει τη μορφή $x^n = a$ αρχικά, όμως μετά από παραγοντοποίηση γίνεται

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = -1$$

Όπου για τη $x^3 = -1$ έχουμε $a=-1<0$ και $n=3$ περιττός, άρα θα έχει μια λύση

$$\text{Δηλ. } x^3 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

Τελικά η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x=0$ ή $x=-1$