

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i. $A = |\sqrt{6} + 3| + |\sqrt{5} - 3| - |1 - \sqrt{6}| + |2 - \sqrt{5}|$

ii. $B = |1 - \sqrt{2}| - |5 + \sqrt{2}| + |-x^2 - 2| - |x^2 + 4|, \quad x \in \mathbb{R}$

iii. $\Gamma = |5 - \pi| + |\sqrt{8} + \pi| - |-\sqrt{8} - 3|$

7. Αν $\alpha < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

i. $A = |\alpha - 2| - |2 - \beta|$ ii. $B = |\alpha - 2| + |\beta - 2|$ iii. $A = |\beta - \alpha| - 2|\alpha - \beta|$

8. Αν $x < 3$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $A = |x-3| - 2|x-4| + |x-5|$ και

$$B = 5|3-x| + |2x-7|$$

9. Αν $0 < x < 2$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις : $A = |x+1| + |x+2| + 2|x-2|$ και

$$B = |x-2| + |2x-5| + |3x|$$

10. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση : $A = |x+2| + |x-2|$ όταν :

i. $x < -2$ ii. $-2 \leq x < 2$ iii. $x > 2$

11. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

i. $A = |x-3|$ ii. $B = |x+2| + x$ iii. $\Gamma = 2x - |x-1|$

iv. $\Delta = x - |4-x|$ v. $E = x+1 - |2x-6|$ vi. $Z = 3 - |2-x|$

12. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i. $A = \frac{x^4 + 2|x^5|}{2|x|+1}$ ii. $B = \frac{x^2 + 2|x|}{|x|+2}$ iii. $\Gamma = \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x|+6}$ iv. $\Delta = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x|+2}$

v. $E = \frac{x^2 - 1}{|x|+1}$ vi. $Z = \frac{|x-1|}{|1-x|} + \frac{|2x+2|}{|-x-1|} + \frac{|x^2-1|}{|1-x^2|}$, $x \neq -1$ και $x \neq 1$

13. Να αποδείξετε ότι:

i. $|\alpha+1|^2 - 4\alpha = |\alpha-1|^2$

ii. $(|a| - |\beta|)^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2 + \beta^2$

iii. $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$ iv. $\alpha^2 - (|\alpha| - |\beta|)(|\alpha| + |\beta|) = \beta^2$

14. Αν $\alpha < 1 < \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $K = d(1, \alpha) + d(1, \beta) - d(\alpha, \beta)$.

15. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{|x+2| - |x-2|}{|x+2| + |x-2|}$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

16. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-3| < 1$

i. Να αποδείξετε ότι : $x \in (2, 4)$

ii. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K = \frac{|x-4| + |x-2|}{2} + |3x-6| + 3|x-5| + \left| \frac{x-1}{1-x} \right|$.

17. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{|2x-6|+1}{4x^2-49}$ για $x \in (-\infty, 3]$.

18. Αν η απόσταση του x από το y στον πραγματικό άξονα είναι 4, να γραφεί χωρίς απόλυτη τιμή η παράσταση : $A = |x-y| + |-3y+3x|$.

19. Αν $|x| < 1$ και $|y| < 2$ να δείξετε ότι : i. $|x+y| < 3$ ii. $|x-y| < 3$ iii. $-10 < 3x-2y-3 < 4$

20. Δίνεται η παράσταση : $A = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$.

- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
- Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
- Να λύσετε την ανίσωση : $A > 3$.

21. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x < 3$		
$ x \leq 4$		
$ x > 2$		
$ x \geq 5$		
		$x \in [-1, 1]$
		$x \in (-6, 6)$
		$x \in (-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$
		$x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$
	$d(x, 3) < 5$	
	$d(x, -4) \leq 7$	
	$d(x, -3) > 5$	
	$d(x, 1) \geq 3$	

Θέματα τράπεζας για την ενότητα : 2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1239

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

- για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$
- για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1258

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1272

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x, -2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$

(Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1303

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)
 β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1320

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

- α) Να αποδείξετε ότι: $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)
 β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1322

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

- α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$ (Μονάδες 12)
 β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1323

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$

- α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)
 β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1342

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$ (Μονάδες 15)
 β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $1, x, x^2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1366

- α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ (Μονάδες 15)
 β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1371

- α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (Μονάδες 15)
 β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 14617

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

- α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$. (Μονάδες 12)
 β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι —). (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1384

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14572

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4| < 2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14491

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y-3| < 1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14412

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 1429

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1428

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x + 2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x - 7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:
 $|x + 2| + |x - 7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1515

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:
 $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β . (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1525

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: • $|\alpha - 2| < 1$ • $|\beta - 3| \leq 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)