

Α' Λυκείου
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ
Επιλογή από την Τράπεζα Θεμάτων

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 1265

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1311

Οι αριθμοί $\kappa - 2$, 2κ και $7\kappa + 4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2^ο όρο, τον 5^ο και τον 4^ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1

(Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1339

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

ΘΕΜΑ 1392

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1394

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_v το πλήθος των βακτηρίων v ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($v \leq 5$).

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_v των βακτηρίων συναρτήσει του v .

(Μονάδες 6)

iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1498

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί α, E, β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β .

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α, β .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1519

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:
 $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρεθούν ο πρώτος όρος α_1 και ο λόγος λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

(Μονάδες 8)