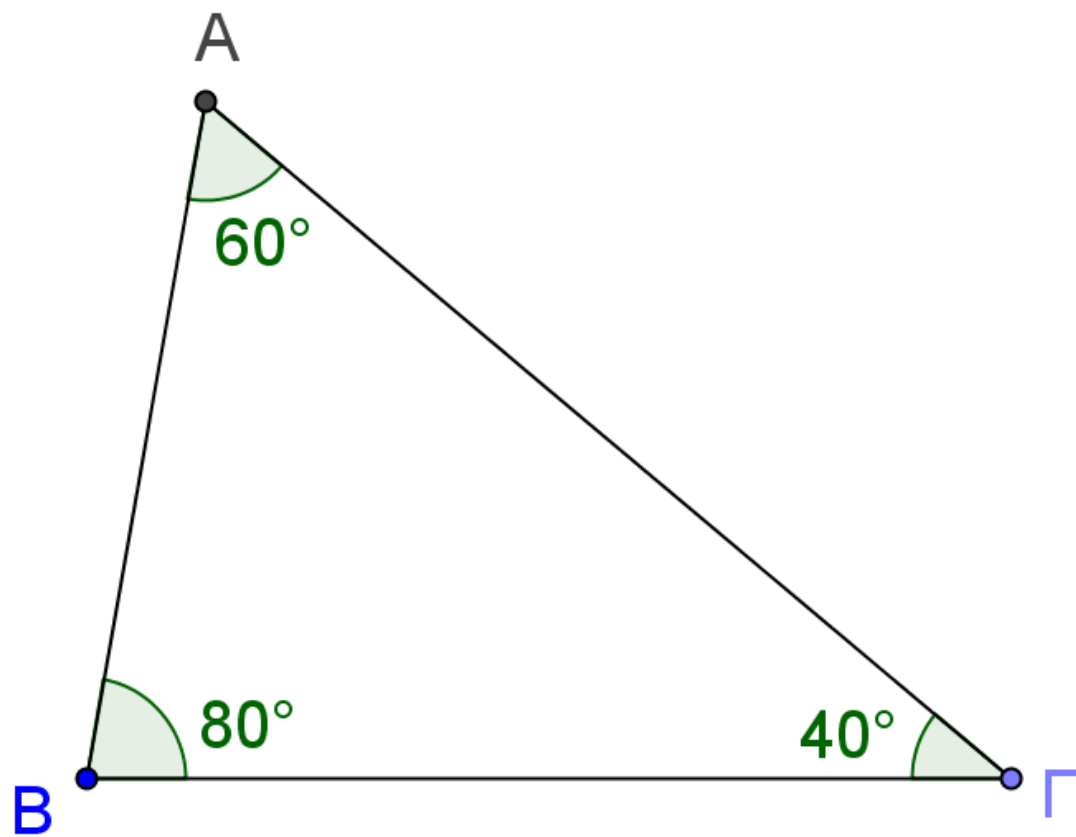
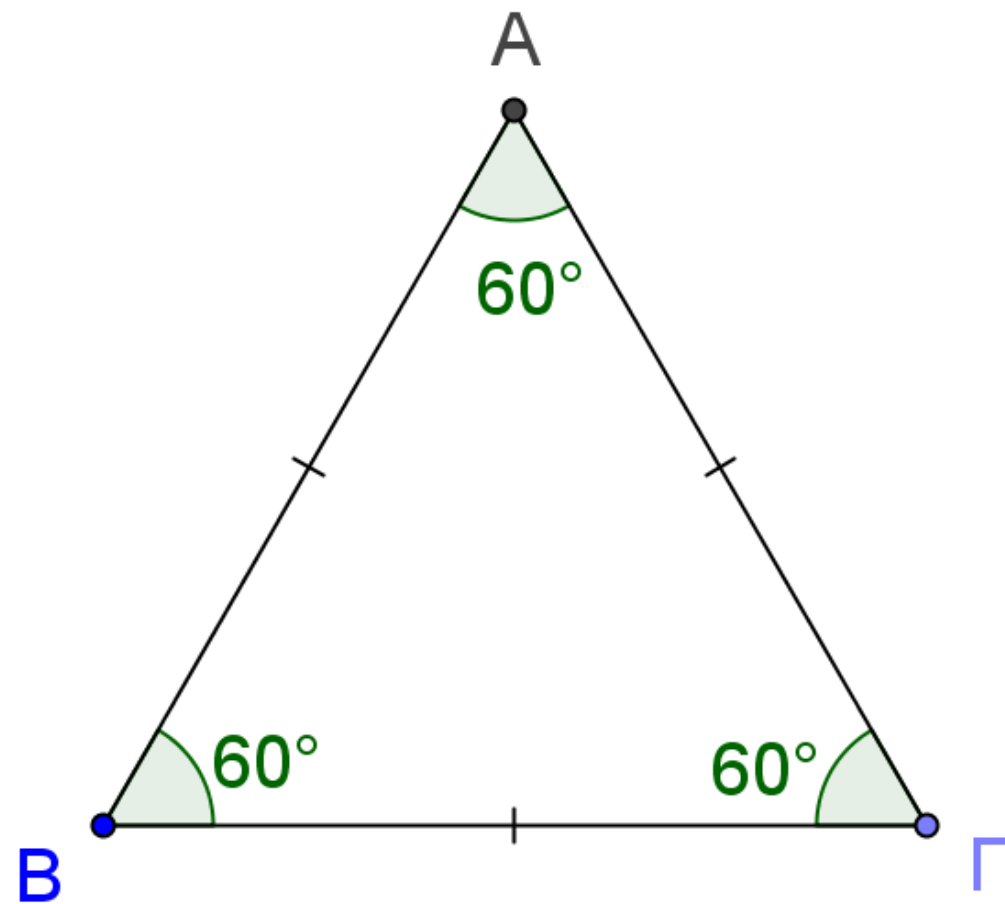


# Κανονικά πολύγωνα

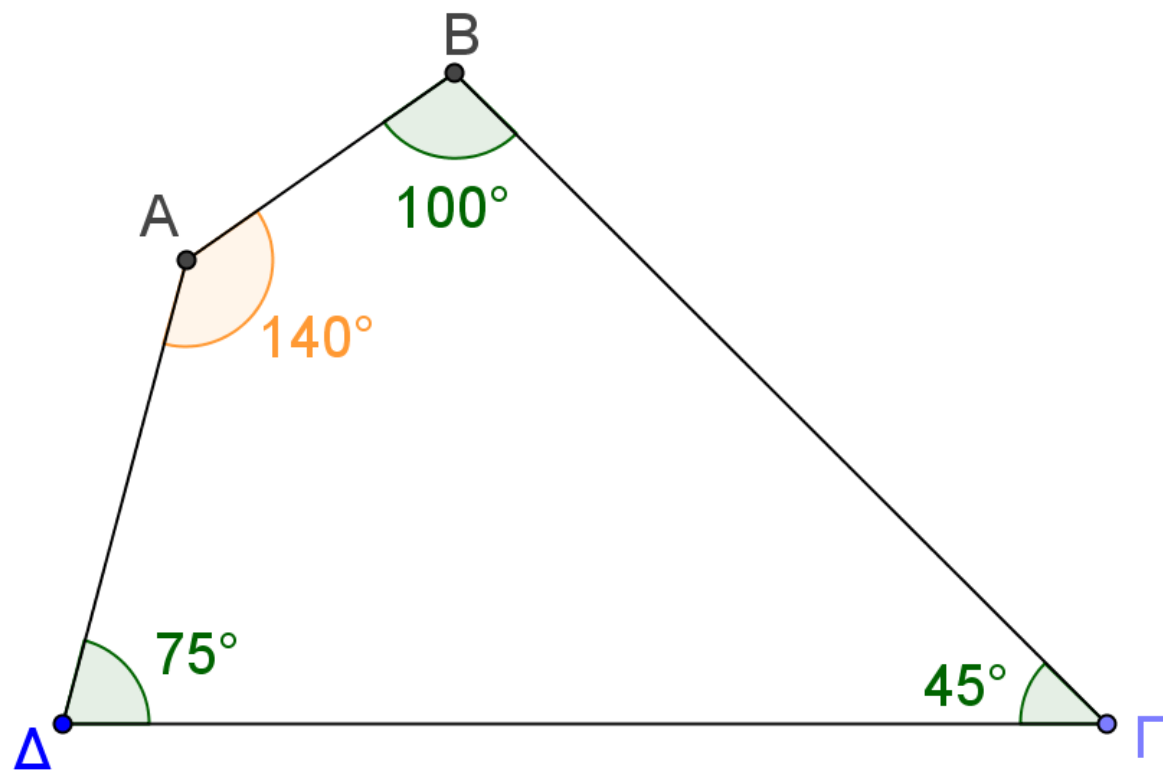
ΣΚΑΛΗΝΟ



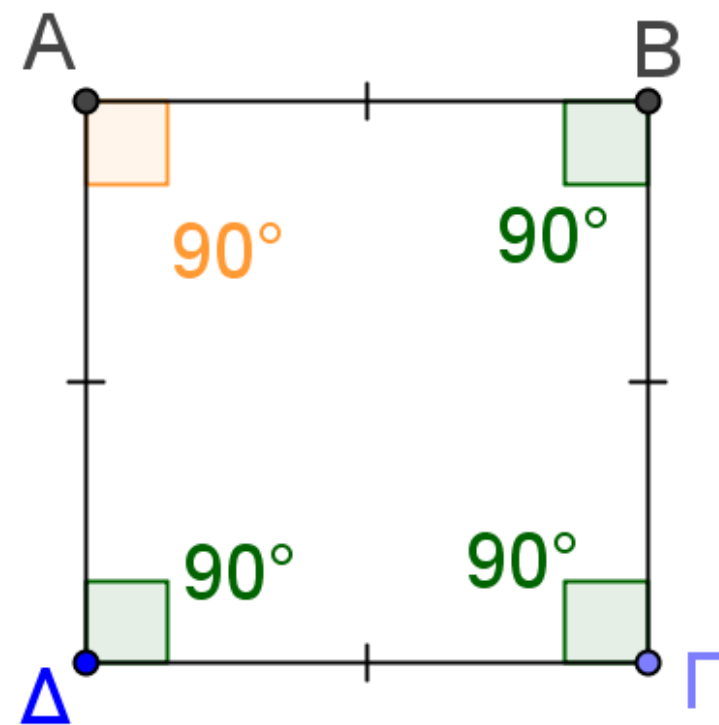
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ



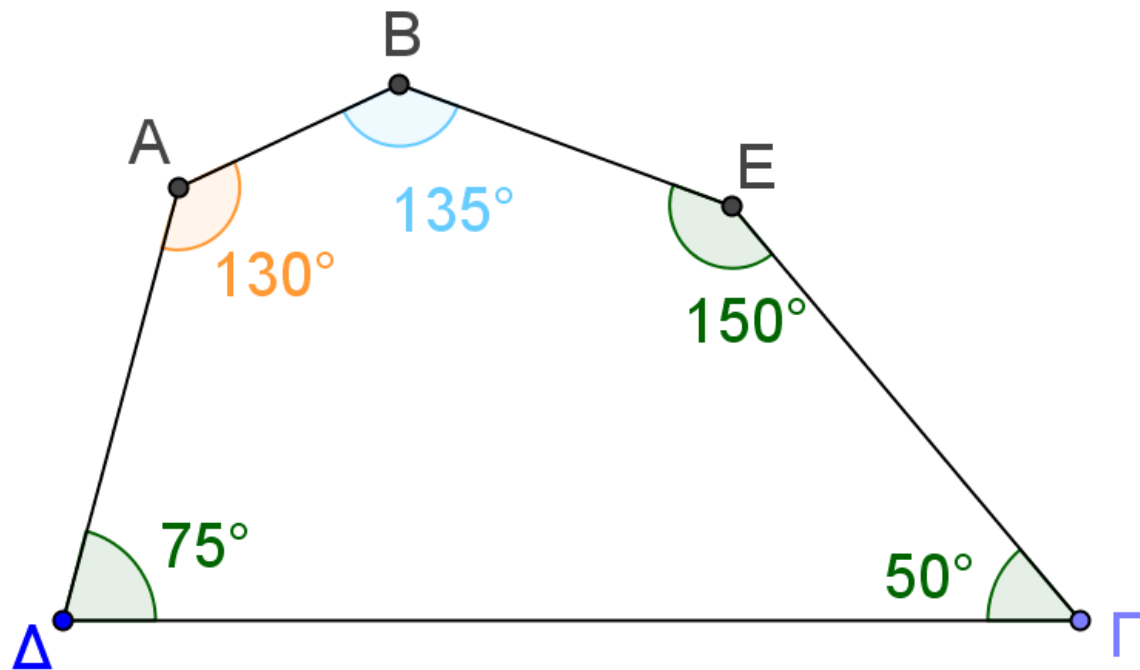
Τετράπλευρο



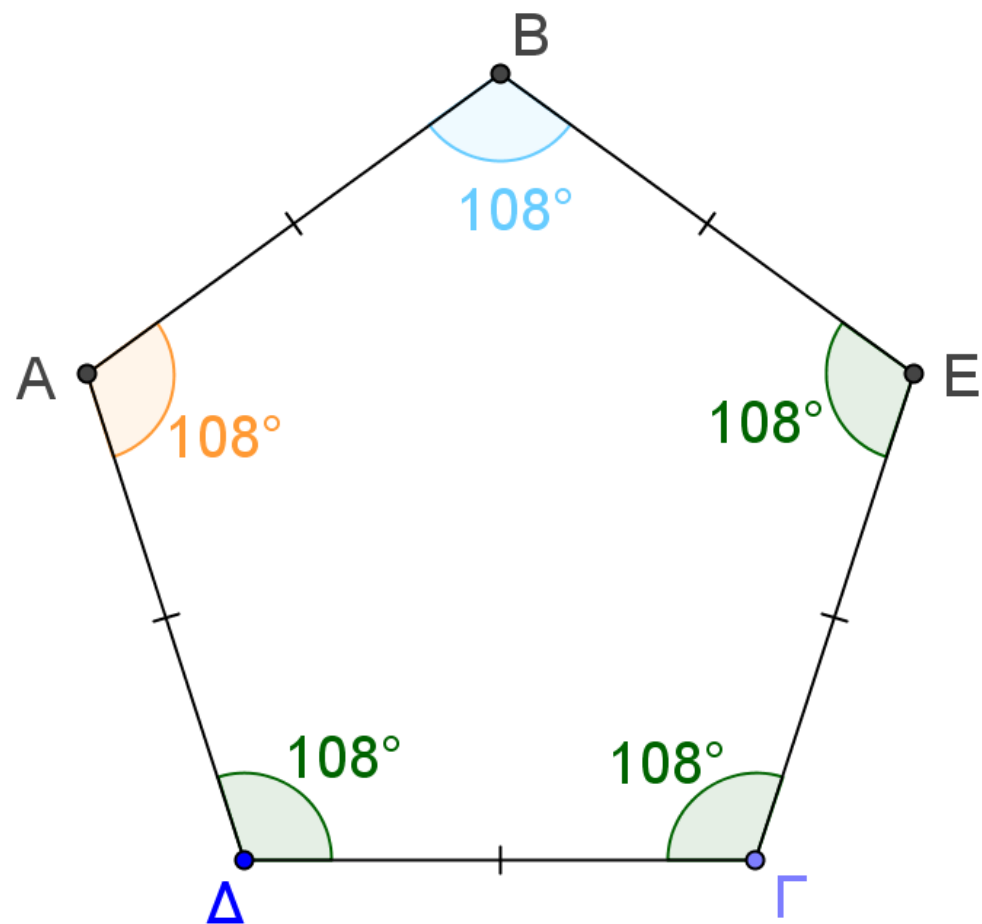
Τετράγωνο



Πεντάγωνο



Κανονικό Πεντάγωνο



# Ορισμός

- Ενα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει :
- **1.** όλες τις πλευρές του ίσες και
- **2.** όλες τις γωνίες του ίσες.

Σε ένα κανονικό  $n$ -γωνο:

Καθεμιά από τις ίσες **πλευρές** του την συμβολίζω με  $\lambda_n$   
και

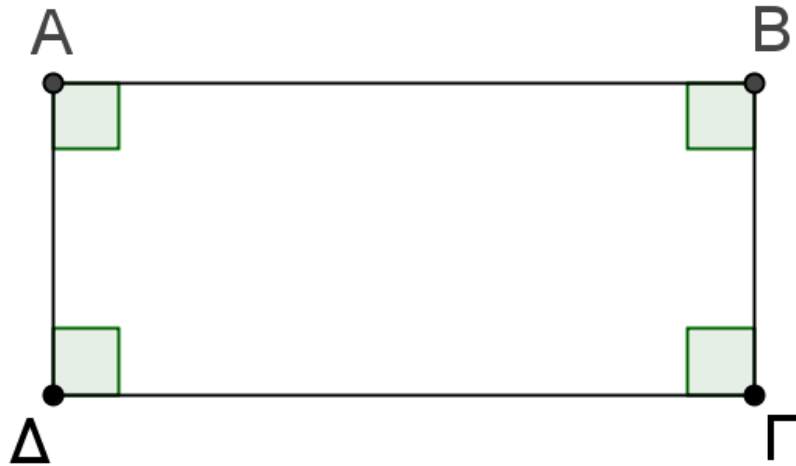
καθεμιά από τις ίσες **γωνίες** του με  $\phi_n$ .

- Γνωρίζουμε ότι αν ένα τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες τότε θα έχει και όλες του τις γωνίες ίσες, και
- αντίστροφα
- Αν ένα τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες τότε θα έχει και όλες τις πλευρές του ίσες.

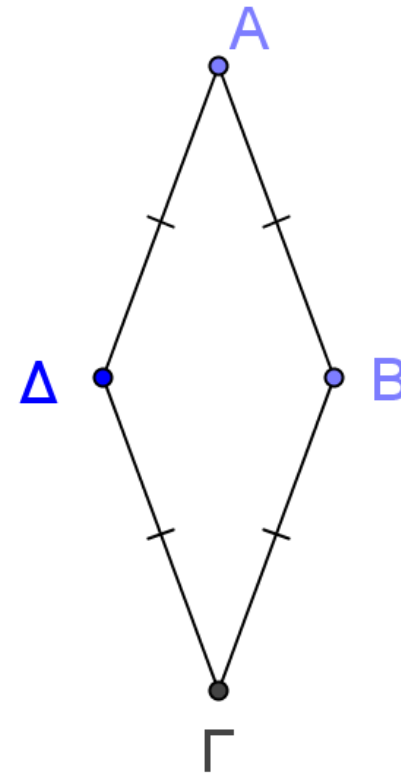
- Ισως λοιπόν κάποιος αναρωτηθεί:
- Μήπως αυτό ισχύει και σε ένα οποιοδήποτε πολύγωνο, και τελικά μήπως ο ορισμός του κανονικού πολυγώνου θα μπορούσε να είναι:
- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει :
- όλες τις πλευρές του ίσες
- ή
- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει:
- όλες τις γωνίες του ίσες.

- Η απάντηση στην απορία είναι όχι: (ούτε για τα τετράπλευρα δεν ισχύει...)

Το ορθογώνιο είναι ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες αλλά δεν είναι κανονικό

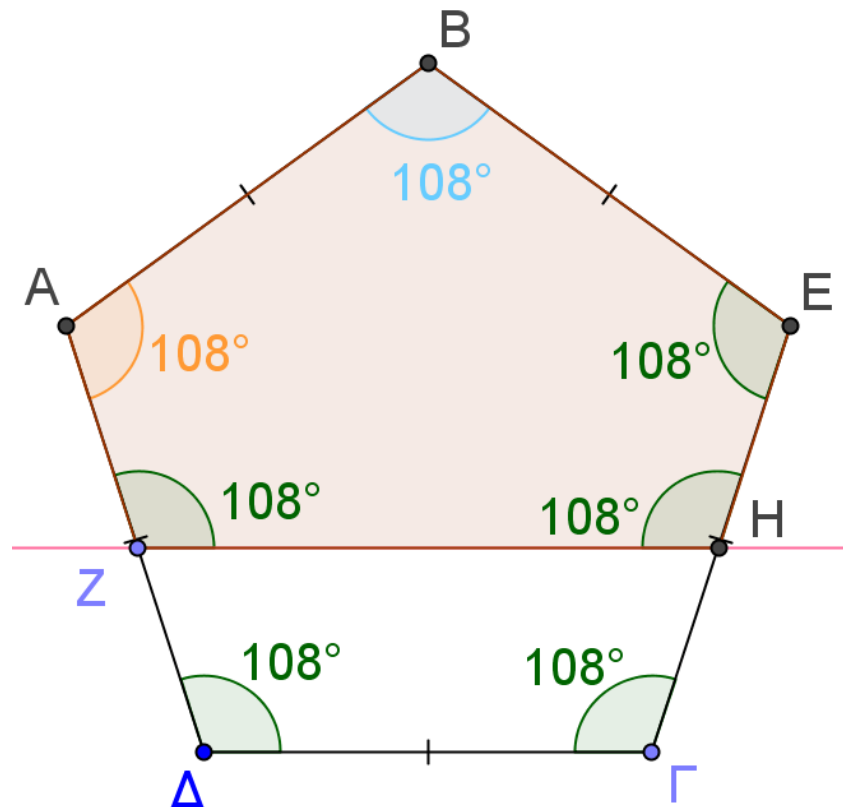


Από την άλλη ο ρόμβος είναι ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες αλλά δεν είναι κανονικό

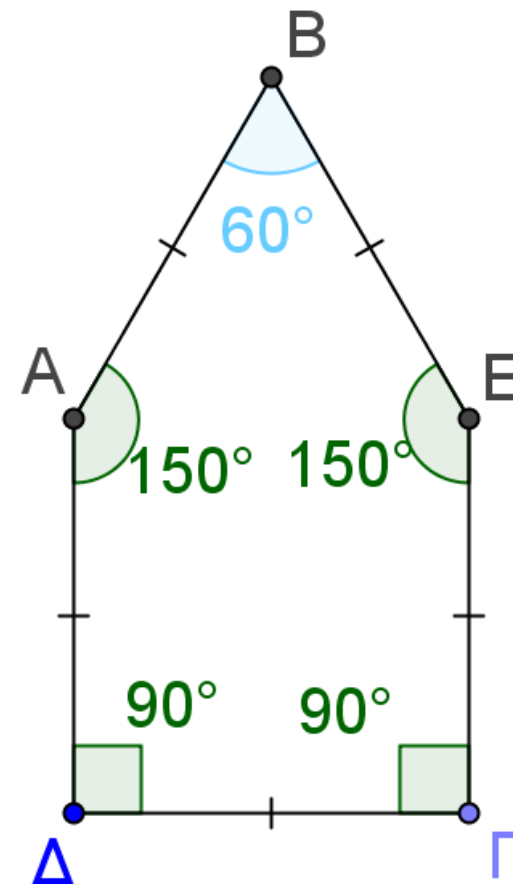




Πεντάγωνο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες αλλά δεν είναι κανονικό



Πεντάγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες αλλά δεν είναι κανονικό



# Γωνία του κανονικού πολυγώνου

- Υπάρχει ένας τύπος που μας δίνει καθεμιά από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού  $n$ -γώνου συναρτήσει του  $n$ .
- Αυτός είναι:

$$\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{Ισόπλευρο: } \varphi_3 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{3} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Τετράγωνο: } \varphi_4 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{4} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Αρα για τα κανονικά πολύγωνα που είμαστε εξοικειωμένοι ο τύπος ισχύει.

- Ας δούμε και για κάποια άλλα κανονικά πολύγωνα τι δίνει ο τύπος

$$\text{Κανονικό πεντάγωνο: } \varphi_5 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$\text{Κανονικό εξάγωνο: } \varphi_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

# Απόδειξη του τύπου:

Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής:

Από τυχαία κορυφή ενός  $n$ -γώνου (οποιοδήποτε όχι κανονικού) φέρνουμε όλες τις διαγώνιες. Σχηματίζονται τότε  $(n-2)$  τρίγωνα.

Διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του  $n$ -γώνου είναι ίδιο με το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων αυτών.

Αρα άθροισμα γωνιών  $n$ -γώνου

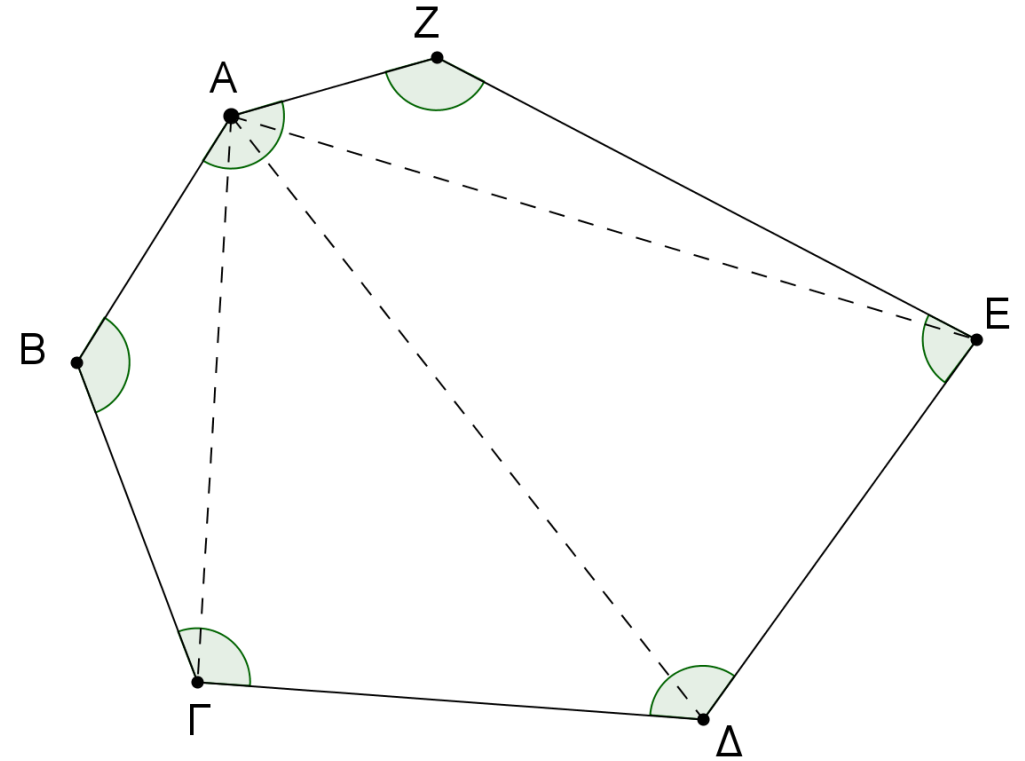
$$(n - 2) \cdot 180^\circ \quad (1)$$

Σε ένα κανονικό  $n$ -γωνο έχουμε επιπλέον ότι αφού οι γωνίες του είναι ίσες (έστω  $\phi_n$  καθεμιά), τότε το άθροισμα των γωνιών του είναι  $n \cdot \phi_n$

$$n \cdot \phi_n \quad (2)$$

Εξισώνοντας τις εκφράσεις (1) και (2) που καθεμιά εκφράζει το άθροισμα των γωνιών του κανονικού  $n$ -γώνου έχουμε:

$$n \cdot \phi_n = (n - 2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow n \cdot \phi_n = 180 \cdot n - 360^\circ \Leftrightarrow \frac{\cancel{n} \cdot \phi_n}{\cancel{n}} = \frac{180 \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}} - \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow \boxed{\phi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}$$



# Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

- Εχουμε κυρίως επικεντρωθεί στην ομοιότητα τριγώνων όμως ο ορισμός της ομοιότητας είναι γενικότερος και αφορά σε ευθύγραμμα σχήματα γενικά
- Ορισμός (§ 8.1)
- Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **όμοια**, αν έχουν
- i) τις πλευρές τους ανάλογες και
- ii) Τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

## Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια

- Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κανονικά πολύγωνα  $AB\Gamma\dots T$ ,  $A'B'\Gamma'\dots T'$
- Αφού  $AB=B\Gamma=\dots=TA$  και  $A'B'=B'\Gamma'=\dots=T'A'$
- Θα ισχύει:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dots = \frac{TA}{T'A'}$$

*Αφού οι αριθμητές είναι όλοι ίσοι και οι παρονομαστές όλοι ίσοι τα κλάσματα είναι ίσα.*

► Γνωρίζουμε ότι η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των πλευρών σύμφωνα με τον τύπο:

$$\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Αρα οι γωνίες των δύο κανονικών  $n$ -γώνων είναι ίσες. Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό όμοιων σχημάτων είναι όμοια.

**Πόρισμα:** Σε δύο κανονικά  $n$ -γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

- Όπως δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες έτσι και δύο κανονικά  $n$ -γωνα (που όπως δείξαμε είναι όμοια) θα έχουν τα στοιχεία τους (πλευρά, ακτίνα, απόστημα) ανάλογα .

$$\frac{\lambda_v}{\lambda'_v} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_v}{\alpha'_v} = \lambda \text{ (λόγος ομοιότητας)}$$

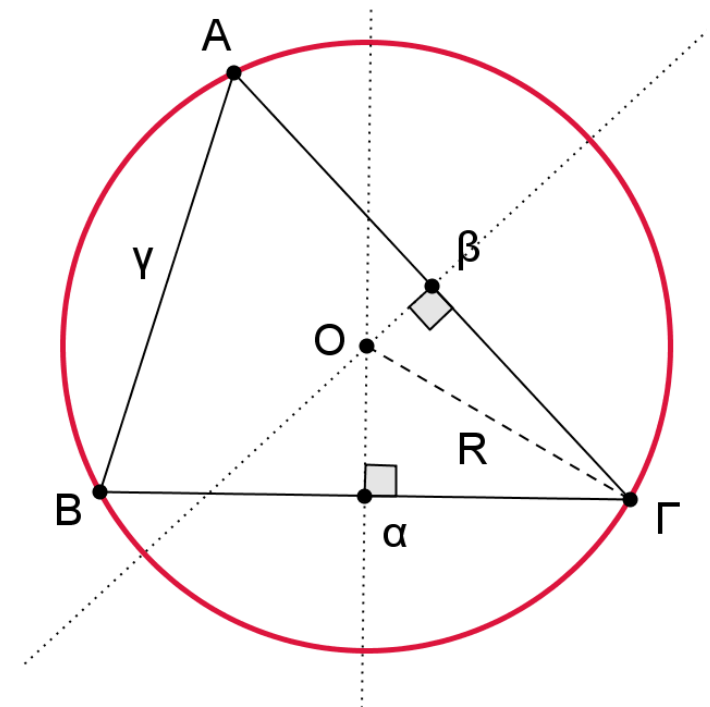
► Επιπλέον όπως έχουμε μάθει ο λόγος των εμβαδών τους θα είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

$$\frac{E_v}{E'_v} = \lambda^2 = \left( \frac{\lambda_v}{\lambda'_v} \right)^2 = \left( \frac{R}{R'} \right)^2 = \left( \frac{\alpha_v}{\alpha'_v} \right)^2$$



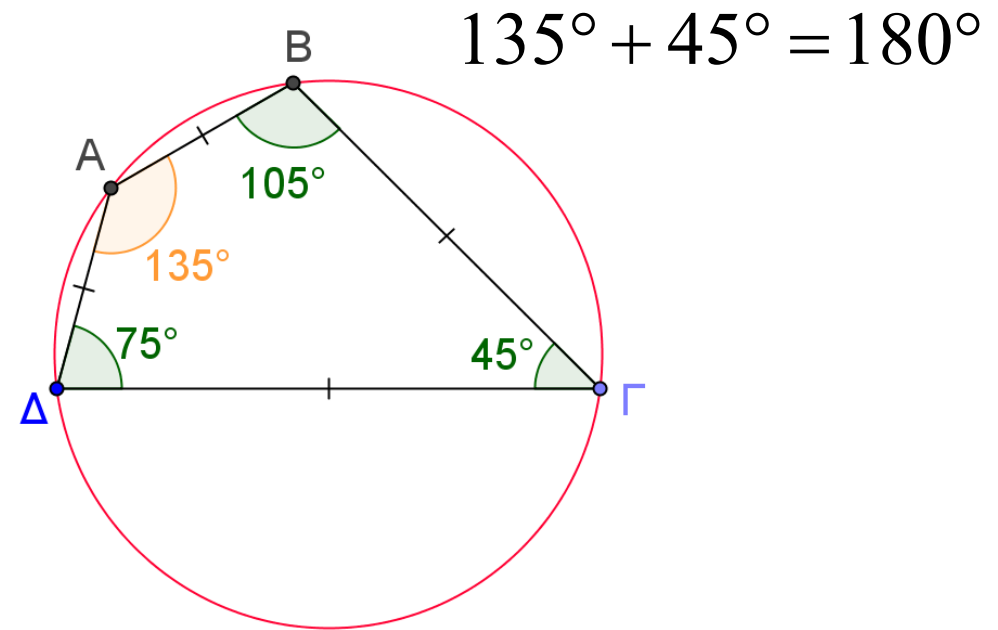
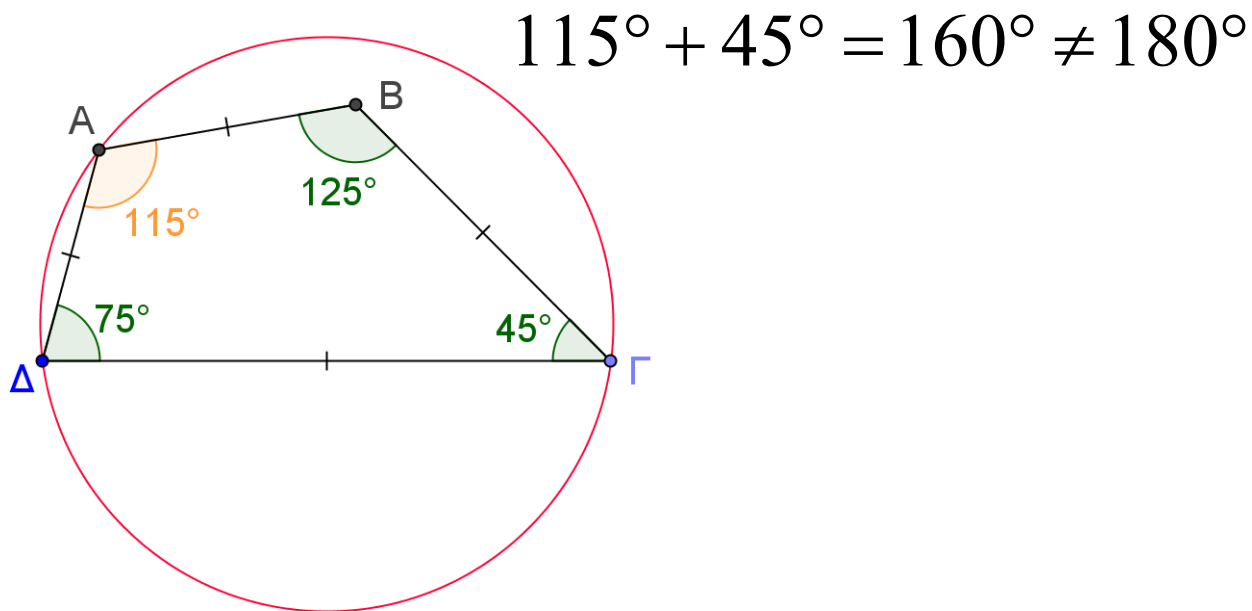
# Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

- Γνωρίζουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του.
- Για να σκεδιάσουμε τον κύκλο φέρνουμε τις μεσοκαθέτους
- δύο πλευρών. Αν με κέντρο το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων και ακτίνα την απόστασή του από οποιάδήποτε κορυφή φέρουμε κύκλο, τότε αυτός είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου



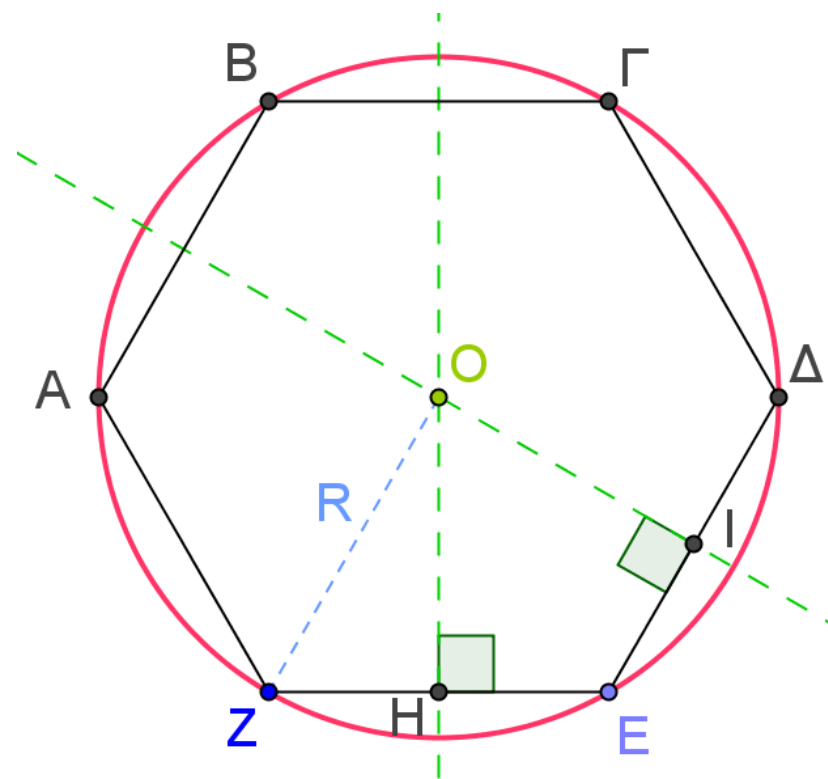
# Τι ισχύει για τα τετράπλευρα;

- Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στα τρίγωνα, δεν υπάρχει περιγεγραμμένος κύκλος για κάθε τετράπλευρο.
- Πρέπει να πληρούνται κάποια κριτήρια, κάποιες προϋποθέσεις
- το πιο χρήσιμο ίσως είναι ότι αν ένα τετράπλευρο έχει δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές τότε είναι εγγράψιμο.



## Κατασκευή περιγεγραμμένου κύκλου κανονικού $n$ -γώνου

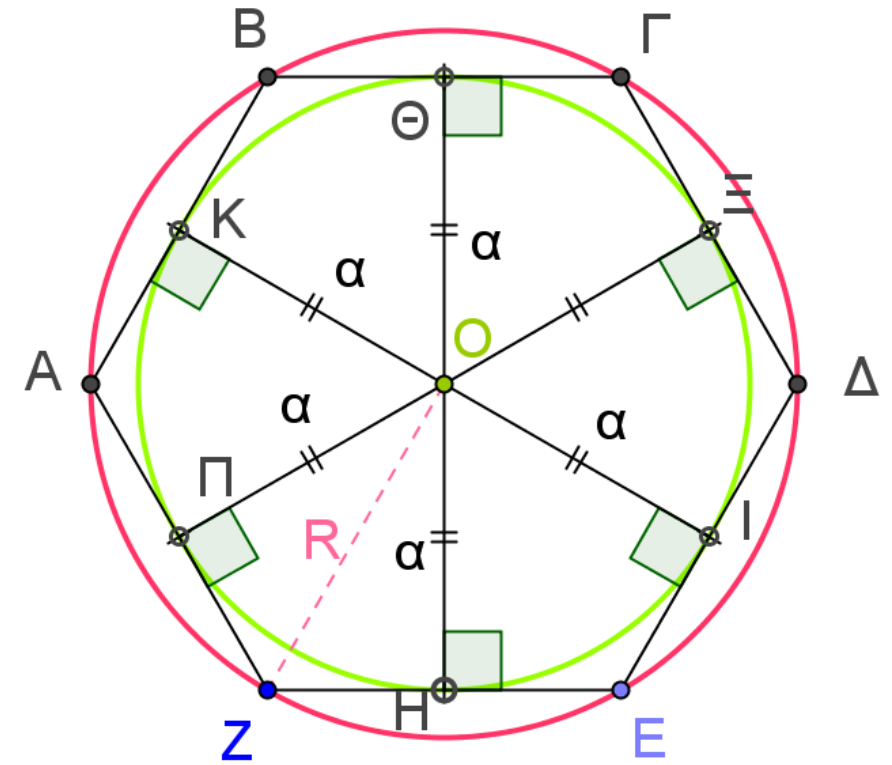
- Για ένα οποιοδήποτε κανονικό  $n$ -γωνο, αποδεικνύεται ότι υπάρχει περιγεγραμμένος κύκλος.
- Για να τον σχεδιάσουμε:
  - i) φέρνουμε τις μεσοκαθέτους δύο (μή παράλληλων) πλευρών και έστω  $O$  το σημείο τομής των.
  - ii) Με κέντρο το  $O$  και ακτίνα την απόσταση  $R$  του  $O$  από οποιαδήποτε κορυφή σχεδιάζουμε κύκλο που είναι ο ζητούμενος.



## Εγγεγραμμένος κύκλος κανονικού ν-γώνου

Εχοντας φέρει τον περιγεγραμμένο κύκλο  $(O,R)$ , του κανονικού πολυγώνου, οι πλευρές του είναι πλέον ίσες χορδές του κύκλου  $(O,R)$ , επομένως και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα, (έστω με  $\alpha$ )

Επομένως, ο κύκλος  $(O,\alpha)$  εφάπτεται στις πλευρές του  $AB\Gamma\dots Z$ , άρα υπάρχει **εγγεγραμμένος** κύκλος του κανονικού πολυγώνου. Λέμε επίσης ότι το πολύγωνο είναι **περιγράψιμο** σε κύκλο



Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος  $(O,R)$  και ο εγγεγραμμένος κύκλος  $(O,\alpha)$  του πολυγώνου είναι **ομόκεντροι**.

# Στοιχεία κανονικού πολυγώνου

- **Κέντρο** του κανονικού πολυγώνου λέγεται το κοινό κέντρο του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του.
- **Ακτίνα** ενός κανονικού πολυγώνου ονομάζεται η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
- **Απόστημα** ενός κανονικού πολυγώνου ονομάζεται η απόσταση του κέντρου του από μια πλευρά του.

# Κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου

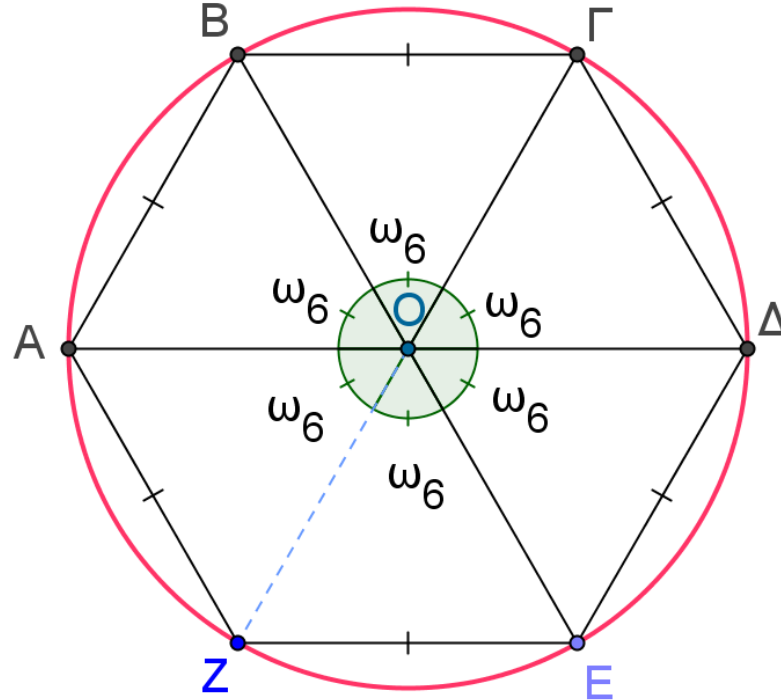
- Σε ένα κανονικό εξάγωνο έχουμε φέρει τον περιγεγραμμένο κύκλο και φέρνουμε και τις ακτίνες που ενώνουν το κέντρο του κύκλου με τις κορυφές του κανονικού εξαγώνου.

Τα τρίγωνα που σχηματίζονται έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μία προς μία άρα από το κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα, οπότε και όλες οι επίκεντρες γωνίες θα είναι ίσες. Καθεμιά από αυτές τις γωνίες ονομάζεται **κεντρική γωνία** του κανονικού εξαγώνου και συμβολίζεται με  $\omega_6$ . Είναι προφανές ότι

$$\omega_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Γενικεύοντας για ένα τυχαίο κανονικό  $n$ -γωνο έχουμε ότι

$$\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$$



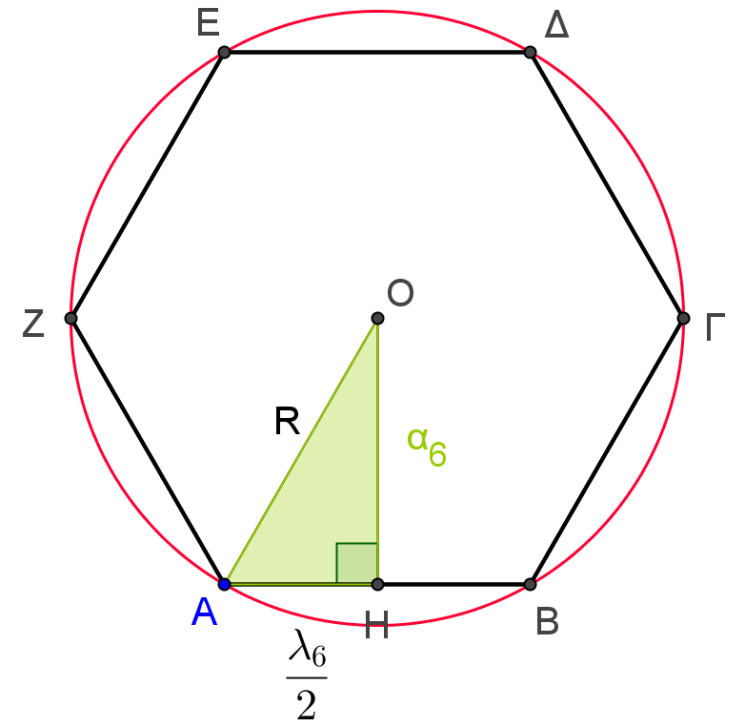
# ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (βασικές σχέσεις των στοιχείων κανονικού πολυγώνου)

- Εστω ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, R η ακτίνα του, λ<sub>6</sub> η πλευρά του και αν το απόστημά του.
- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΟΑ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\alpha_6^2 + \left(\frac{\lambda_6}{2}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_6^2 + \frac{\lambda_6^2}{4} = R^2$$

$$P_6 = 6 \cdot \lambda_6$$

$$E_6 = 6 \cdot (OAB) = 6 \cdot \frac{1}{2} \lambda_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} (6\lambda_6) \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} P_6 \cdot \alpha_6$$



- Γενικεύοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα για οποιοδήποτε κανονικό  $\nu$ -γωνο (απλώς στην θέση του 6 βάζουμε  $\nu$ ) έχουμε:

$$\alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$$

$$P_\nu = 6 \cdot \lambda_\nu$$

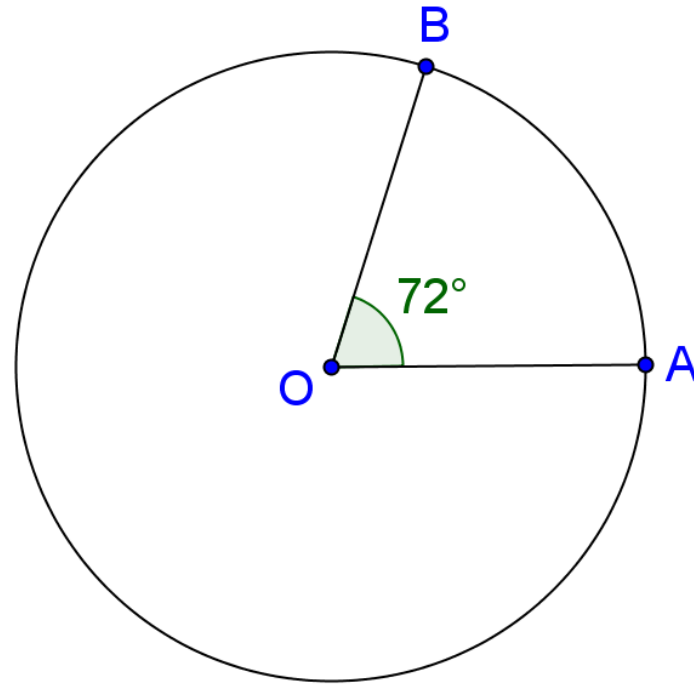
$$E_\nu = \nu \cdot (\text{OAB}) = \nu \cdot \frac{1}{2} \lambda_\nu \cdot \alpha_\nu = \frac{1}{2} (\nu \lambda_\nu) \cdot \alpha_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu$$



# Κατασκευή κανονικού πενταγώνου με χρήση μοιρογνωμονίου

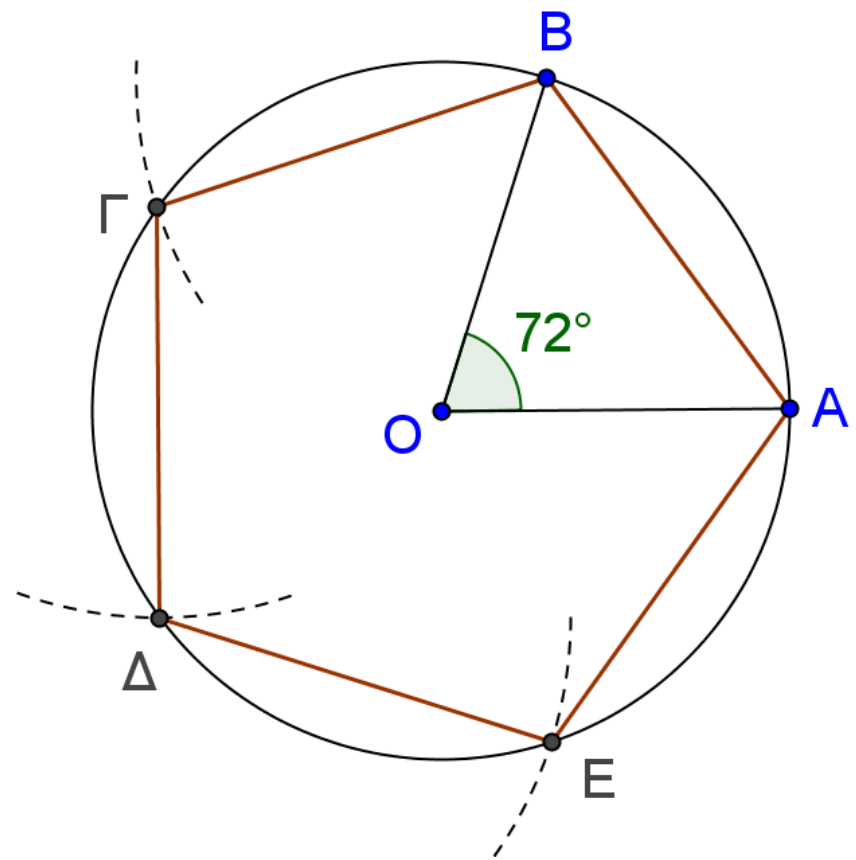
- Φέρνουμε έναν κύκλο  $(O,R)$  και μια ακτίνα του (έστω  $OA$ ).
- Υπολογίζουμε την κεντρική γωνία του πολυγώνου  $\omega_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ .

Με το μοιρογνωμόνιο και με μια πλευρά  $OA$ , σχεδιάζω επίκεντρη γωνία ίση με  $\omega_5$  και έστω  $B$  το σημείο τομής της δεύτερης πλευράς με τον κύκλο



$$\omega_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

- Με τον διαβήτη με κέντρο το Β, άνοιγμα όσο το ΑΒ χαράσσω τόξο (σε αντίθετη φορά του τόξου ΑΒ) που τέμνει τον κύκλο στο Γ.
- Ακολουθώντας με το ίδιο άνοιγμα του διαβήτη και κέντρο το Γ, χαράσσω τόξο (ίδια φορά όπως προηγουμένως) που τέμνει τον κύκλο στο Δ.
- Συνεχίζω την διαδικασία ώσπου να διατρέξω όλον τον κύκλο
- Ενώνω τα σημεία που έχω βρεί διαδοχικά με ευθύγραμμα τμήματα

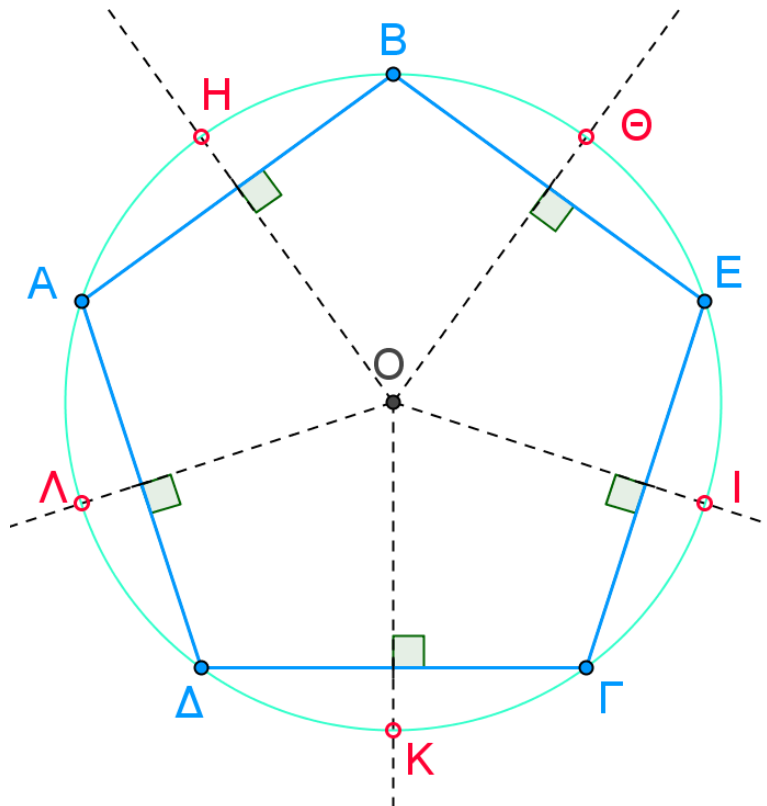


# Πώς κατασκευάζω από ένα κανονικό $n$ -γωνο ένα κανονικό $2n$ -γωνο.

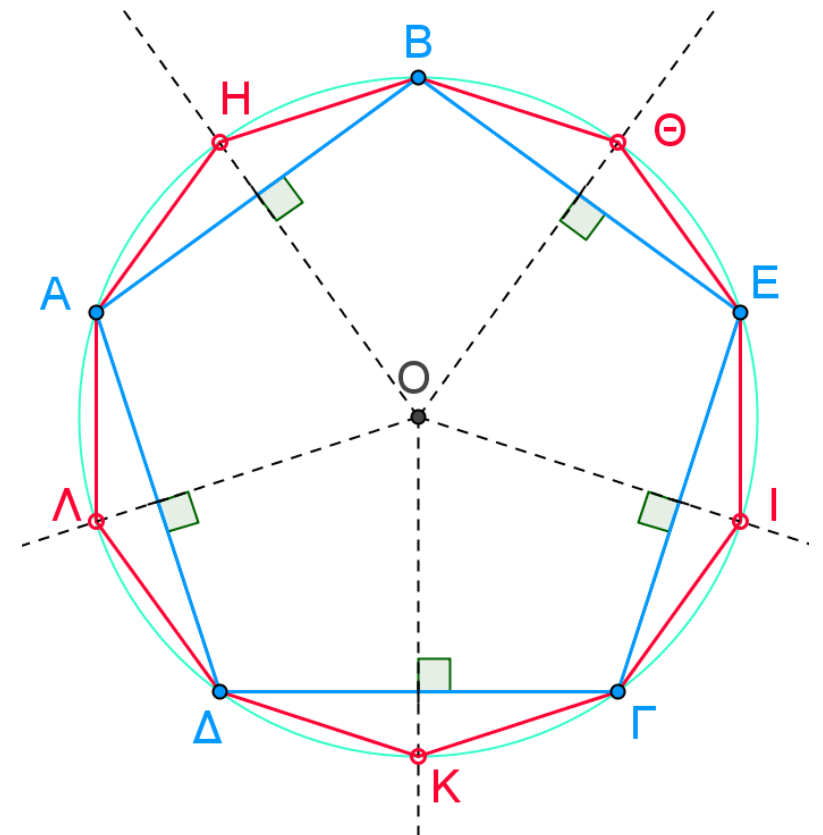
Από κανονικό 5-γωνο θα κατασκευάσουμε κανονικό 10-γωνο.

Η διαδικασία είναι ακριβώς ίδια από ένα  $n$ -γωνο να κατασκευάσουμε κανονικό  $2n$ -γωνο.

Εστω ένα κανονικό πεντάγωνο και ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Από το κέντρο του κύκλου φέρνουμε κάθετες προς τις πλευρές του πολυγώνου οι οποίες τέμνουν τον κύκλο στα **μέσα των τόξων** που ορίζονται από δύο διαδοχικές κορυφές.



Ενώνω διαδοχικά τα 5 αυτά μέσα με τις γειτονικές κορυφές του πενταγώνου και σχηματίζεται ένα κανονικό δεκάγωνο



# Κατασκευή κανονικού πολυγώνου με κανόνα και διαβήτη

- Γνωρίζουμε ότι οι Αρχαίοι γεωμέτρες είχαν την επιθυμία να κάνουν τις γεωμετρικές κατασκευές μόνο με κανόνα (χάρακα χωρίς υποδιαίρέσεις) και διαβήτη.
- Το 1796 ο μεγάλος μαθηματικός Gauss απέδειξε ότι με κανόνα και διαβήτη μπορούν να κατασκευαστούν μόνο τα κανονικά πολύγωνα που το πλήθος  $n$  των πλευρών τους είναι της μορφής:
- $n = 2^{\alpha} P_1 P_2 \dots P_k$  όπου  $\alpha$  φυσικός αριθμός και  $P_1, P_2, \dots, P_k$  είναι πρώτοι αριθμοί της μορφής  $P_{\lambda} = 2^{2^{\lambda}} + 1$ ,  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  (πρώτοι Fermat)
- Ο όρος  $2^{\alpha}$  εκφράζει ουσιαστικά ότι αν έχω κατασκευάσει ένα κανονικό  $n$ -γωνο μπορώ με κανόνα και διαβήτη να κατασκευάσω ένα κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό κορυφών (ένα  $2n$ -γωνο).
- Ετσι θα θεωρήσουμε ότι  $\alpha=0$ . Τότε  $n = P_1 P_2 \dots P_k$

- Με άλλα λόγια ένα κανονικό πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αν το πλήθος των κορυφών του είναι γινόμενο πρώτων αριθμών Fermat (και μιας δύναμης του 2)
- Οι αρχικοί πρώτοι Fermat είναι:
- Για  $\lambda=0$  :  $P_1 = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3$
- Για  $\lambda=1$  :  $P_1 = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5$
- Για  $\lambda=2$  :  $P_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$
- Για  $\lambda=3$  :  $P_2 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$  κλπ
- Συμπεραίνω ότι το κανονικό επτάγωνο δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη ούτε το κανονικό 11-γωνο.

Σχέση που συνδέει την **πλευρά** του κανονικού  $2\nu$ -γώνου και το **απόστημα** κανονικού  $\nu$ -γώνου

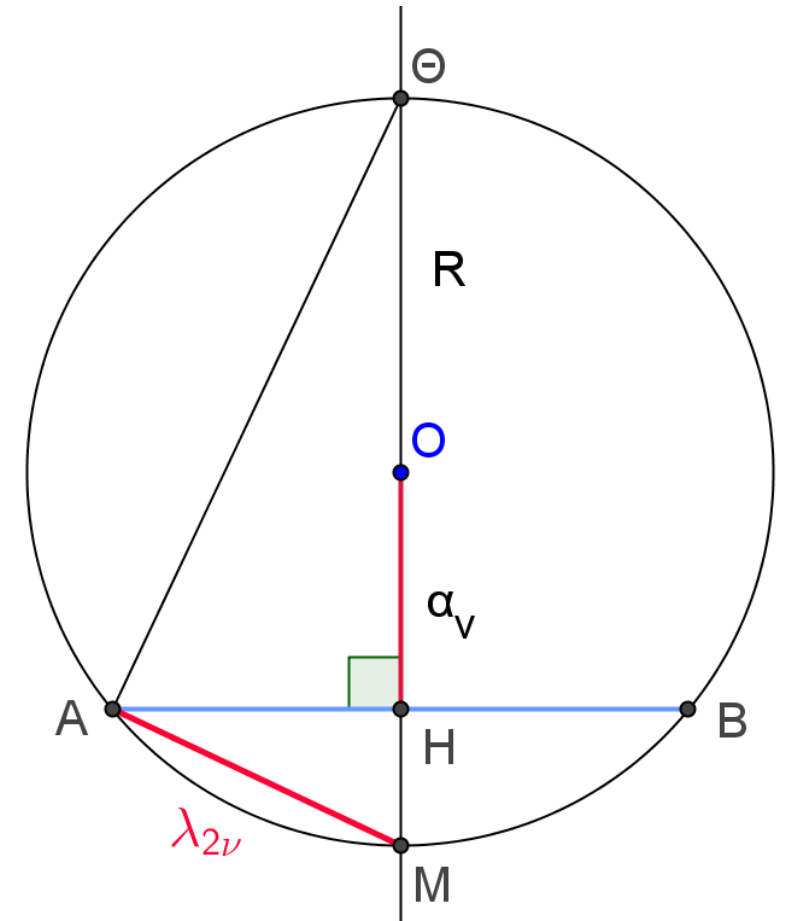
Από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού  $\nu$ -γώνου φέρνουμε κάθετη στην πλευρά του  $AB$  η οποία διέρχεται από τα μέσα  $M$  και  $\Theta$  των δύο τόξων με άκρα τα  $A$  και  $B$ .

Η γωνία  $MA\Theta$  είναι ορθή ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο οπότε το  $AM\Theta$  ορθογώνιο με ύψος  $AH$

Από το Θεώρημα I της παραγράφου § 9.2 έχουμε:

$$AM^2 = M\Theta \cdot MH \Leftrightarrow \lambda_{2\nu}^2 = 2R \cdot (OM - OH) \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$$



Σχέση που συνδέει την πλευρά του κανονικού  $2\nu$ -γώνου και την πλευρά του κανονικού  $\nu$ -γώνου

- Ίσως μας φαίνεται πιο ενδιαφέρουσα μια σχέση που να συνδέει την πλευρά του κανονικού  $2\nu$ -γώνου με την πλευρά του κανονικού  $\nu$ -γώνου. Πράγματι από την σχέση που δείξαμε προηγουμένως:

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R(R - \alpha_\nu)$$

Και δεδομένου ότι όπως έχουμε ήδη μάθει :

$$\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow 4\alpha_\nu^2 + \lambda_\nu^2 = 4R^2 \Leftrightarrow 4\alpha_\nu^2 = 4R^2 - \lambda_\nu^2 \Leftrightarrow \alpha_\nu^2 = \frac{4R^2 - \lambda_\nu^2}{4}$$

Έχουμε:

$$\lambda_{2\nu}^2 = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}\right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}}$$

## 11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους



- Όταν γνωρίζω σε μοίρες το τόξο να βρίσκω την χορδή και το απόστημα συναρτήση της ακτίνας **και αντίστροφα**:
- Όταν γνωρίζω τη χορδή ή το απόστημα (συναρτήση της ακτίνας) να βρίσκω το τόξο με βάση το πιο κάτω πίνακάκι)

	Κανονικό εξάγωνο	Τετράγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά $\lambda_n$ – Χορδή	$\lambda_6 = R$	$\lambda_6 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R\sqrt{3}$
Απόστημα	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$
Τόξο	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$
Εμβαδό			

The end...

Thanks for watching!!