

ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1ΑΣΚ. Δίνονται οι παραστάσεις $A = (x+1)^2 - 2(x-1)^2 + (x+2)^2 - 5(2x+1)$ και

$$B = 2(x+1)(1-x) - (x+1)^2 + (x-1)^2 - 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = -2$ και $B = -2x^2 - 4x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A - B + 4 = 0$

ΛΥΣΗ

α) $A = (x+1)^2 - 2(x-1)^2 + (x+2)^2 - 5(2x+1)$

$$A = x^2 + 2x + 1 - 2(x^2 - 2x + 1) + x^2 + 4x + 4 - 10x - 5$$

$$A = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 4x - 2 + x^2 + 4x + 4 - 10x - 5 = -2$$

$$B = 2(x+1)(1-x) - (x+1)^2 + (x-1)^2 - 2 = 2(1-x^2) - (x^2 + 2x + 1) + x^2 - 2x + 1 - 2$$

$$B = 2 - 2x^2 - x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1 - 2 = -2x^2 - 4x$$

β) $A - B + 4 = 0$

$$-2 + 2x^2 + 4x + 4 = 0 \quad 2x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$2(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$2(x+1)^2 = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{διπλή ρίζα}$$

2ΑΣΚ.

Δίνεται η παράσταση $A = (x+1)^2 + (x-3)^2 + (x+3)(x-3)$

A1) Να κάνετε τις πράξεις και να δείξετε ότι $A = 3x^2 - 4x + 1$

A2) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$

ΛΥΣΗ

α) $A = (2x-3)^2 + x(7-3x) - 3 = 4x^2 - 12x + 9 + 7x - 3x^2 - 3 = x^2 - 5x + 6$

3ΑΣΚ. Αν $A = x^2 - 25$ και $B = x^2 - 5x$

α) Να λυθούν οι εξισώσεις $A=0$ και $B=0$

β) Να παραγοντοποιήσετε τα A και B Να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{A}{B}$ εφόσον ορίζεται

γ) Να λυθεί η εξίσωση $A+B = -27$

ΛΥΣΗ

α) $A=0$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$B=0$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$x=0 \quad \text{ή} \quad x-5=0$$

$$x = \pm 5$$

$$x=0 \text{ ή } x=5$$

$$\beta) \frac{A}{B} = \frac{x^2-25}{x^2-5x} = \frac{(x+5) \cdot (x-5)}{x \cdot (x-5)} = \frac{x+5}{x}$$

$$\gamma) .A+B= -27$$

$$x^2-25+x^2-5x=-27$$

$$x^2+x^2-5x-25+27=0$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$\alpha=2, \beta=-5 \quad \gamma=2 \quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4 \cdot 2 \cdot 2=25-16=9 \text{ έχει δύο λύσεις}$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{5-3}{4} \text{ ή } x = \frac{5+3}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = 2$$

$$4\text{ΑΣΚ. α) Να λυθεί η εξίσωση } 5x^2 - 45 = 0$$

β) Να λύσετε την ανίσωση $4x - 10 > 4 - 3x$ και να παραστήσετε τις λύσεις της ανίσωσης σε άξονα.

γ) Ποιες από τις λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος α) είναι και λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β);

ΛΥΣΗ

$$\alpha) 5x^2-45=0$$

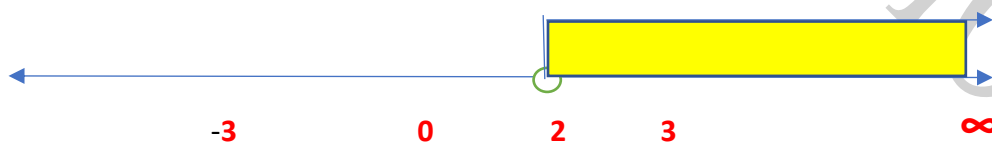
$$5x^2=45$$

$$\frac{5x^2}{5} = \frac{45}{5}$$

$$x = \pm \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$\beta) 4x - 10 > 4 - 3x \Leftrightarrow 4x + 3x > 4 + 10 \Leftrightarrow 7x > 14 \Leftrightarrow \frac{7x}{7} > \frac{14}{7} \Leftrightarrow x > 2$$



γ) Η λύση $x=3$ της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης ενώ η $x=-3$ δεν είναι.

$$5\text{ΑΣΚ. Δίνονται οι ευθείες } \epsilon_1: x+\psi=7 \text{ και } \epsilon_2: 3x+\psi=11$$

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $(5,2)$ θα ανήκει στις ευθείες ϵ_1 ή ϵ_2 .

$$\beta) \text{Να λύσετε το παρακάτω σύστημα} \quad \begin{cases} x + \psi = 7 \\ 3x + \psi = 11 \end{cases}$$

γ) Να εξετάσετε αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 του ερωτήματος α) τέμνονται και αν ναι, να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού σημείου τους.

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστώ όπου $x=5$ και όπου $\psi=2$

$$\varepsilon_1: x+\psi=7$$

$$5+2=7$$

$7=7$ αληθεύει !!!,

άρα το σημείο ανήκει στην ευθεία ε_1 .

$$\varepsilon_2: 3x+\psi=11$$

$$3 \cdot 5 + 2 = 11$$

$$15 + 2 = 11$$

$$17 = 11 \quad \text{δεν αληθεύει, άρα το σημείο δεν ανήκει στην ευθεία } \varepsilon_2.$$

β) $x+\psi=7$ λύνω ως προς x και γίνεται $x=7-\psi$

αντικαθιστώ το x με $7-\psi$ στην δεύτερη εξίσωση και έχω

$$3x+\psi=11$$

$$3 \cdot (7-\psi) + \psi = 11$$

$$21 - 3\psi + \psi = 8$$

$$-3\psi + \psi = 11 - 21$$

$$-2\psi = -10$$

$$\psi = 5 \quad \text{αντικαθιστώ όπου } \psi \text{ το } 5 \text{ στην αρχική } x=7-\psi$$

$$\text{και γίνεται } x = 7 - 5$$

$$x = 2$$

άρα $x=2$ και $\psi=5$ η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος **(2,5)**

γ) Τέμνονται στο σημείο **(2,5)** γιατί το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών έχει λύση από το β) ερώτημα.

6ΑΣΚ. Α. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 11 \\ 3\beta - 4\gamma = 7 \end{cases}$$

Να λύσετε το σύστημα (με οποιαδήποτε μέθοδο) και να βρείτε ότι η λύση του είναι το ζεύγος

$$(\beta, \gamma) = (5, 2) .$$

Β. Να λύσετε την εξίσωση : $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου (β, γ) είναι η λύση του συστήματος του ερωτήματος (Α).

Α) $\beta+3\psi=11$ λύνω ως προς β και γίνεται $\beta=11-3\psi$

αντικαθιστώ το β με $11-3\psi$ στην δεύτερη εξίσωση και έχω

$$3\beta-4\psi=7$$

$$3 \cdot (11-3\psi) - 4\psi = 7$$

$$33 - 9\psi - 4\psi = 7$$

$$-9\psi - 4\psi = 7 - 33$$

$$-13\psi = -26$$

$$\psi = 2 \quad \text{αντικαθιστώ όπου } \psi \text{ το } 2 \text{ στην αρχική } \beta = 11 - 3\psi$$

$$\text{και γίνεται } \beta = 11 - 3 \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \beta = 11 - 6 \quad \text{ή} \quad \beta = 5$$

η λύση του είναι το ζεύγος **(β, γ) = (5, 2)** .

γ) Η εξίσωση $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta = 5$ και $\gamma = 2$ γίνεται $2x^2 + 5x + 2 = 0$

Το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 2$ έχει $a = 2, \beta = 5, \gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4a \cdot \gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5x + 2 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$
$$= \begin{cases} \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-2}{4} = -0,5 \text{ η λύση } x^1 \\ \frac{-5 - 3}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \text{ η λύση } x^2 \end{cases}$$

7ΑΣΚ. Δίνεται γωνία ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, για την οποία ισχύει

$$\sigmaυν\omega = -\frac{4}{5}$$

A. Να εξετάσετε αν η γωνία ω είναι οξεία ή αμβλεία.

B. Να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

Γ. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu(180^\circ - \omega)$ και $\sigmaυν(180^\circ - \omega)$

ΛΥΣΗ

A. Επειδή το $\sigmaυν\omega < 0$ (αρνητικό) άρα η γωνία είναι αμβλεία.

B. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigmaυν^2\omega = 1$ αντικαθιστώ το $\sigmaυν\omega$ και έχουμε:

$$(\eta\mu\omega)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (\eta\mu\omega)^2 + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow (\eta\mu\omega)^2 = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow (\eta\mu\omega)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{ή } \eta\mu\omega = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{3}{5} \quad \text{Επειδή } 0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ \text{ είναι } \psi \geq 0 \text{ άρα } \eta\mu\omega \geq 0$$

$$\text{άρα } \eta\mu\omega = \frac{3}{5}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigmaυν\omega} = \frac{+\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Γ. } \eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega = \frac{3}{5}, \quad \sigmaυν(180^\circ - \omega) = -\sigmaυν\omega = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

8ΑΣΚ.

Δίνεται το σύστημα

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{\psi}{4} &= 1 \\ (x+1)^2 - \psi &= (x-1)^2 + 2 \end{aligned} \right\}$$

B1) Να κάνετε τις πράξεις και να αποδείξετε ότι το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

B2) Να λύσετε το σύστημα.

B3) Αν οι ευθείες $\epsilon_1 : 2x + y = 4$, $\epsilon_2 : 4x - y = 2$ και $\epsilon_3 : 4x + 3y = \lambda$ διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε να βρείτε την τιμή του λ .

ΛΥΣΗ

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{\psi}{4} &= 1 \\ (x+1)^2 - \psi &= (x-1)^2 + 2 \end{aligned} \right\}$$

B1)

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \cdot \frac{\psi}{4} &= 4 \cdot 1 \\ (x^2 + 2x + 1) - \psi &= (x^2 - 2x + 1) + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot \frac{x}{2} + 4 \cdot \frac{\psi}{4} &= 4 \cdot 1 \\ x^2 + 2x + 1 - \psi &= x^2 - 2x + 1 + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x + \psi &= 4 \\ x^2 + 2x - \psi - x^2 + 2x &= -1 + 1 + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} 2x + \psi = 4 \\ 4x - \psi = 2 \end{cases}$$

B2) Τα ψ είναι αντιθετα άρα (μεθοδος αντιθέτων) προσθέτοντας κατά μελη τα παραπαμω έχω

$$\begin{cases} 2x + \psi = 4 \\ 4x - \psi = 2 \end{cases}$$

προσθέτοντας κατά μελη τα έχω

$$+ \quad 2x + 4x + \psi - \psi = 4 + 2 \quad \text{ή} \quad 6x = 6 \quad \text{ή} \quad x = 1$$

2x+ψ=4 για $x=1$ έχουμε $2 \cdot 1 + \psi = 4$ ή $2 + \psi = 4$

ή $\psi = 4 - 2$ ή $\psi = 2$

η λύση του είναι το ζεύγος $(x, \psi) = (1, 2)$

B3)

Οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με $\epsilon_1 : 2x + y = 4$, $\epsilon_2 : 4x - y = 2$ τέμνονται στο σημείο με συντεταγμένες $M(1, 2)$. Οι συντεταγμένες του σημείου M επαληθεύουν και την $\epsilon_3 : 4x + 3y = \lambda$ αφού διέρχεται και αυτή από το σημείο M . για $x=1$ και $\psi=2$ στην $4x + 3y = \lambda$ έχουμε $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = \lambda$ ή $\lambda = 10$

9ΑΣΚ. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις :

$$A = x^2 - 36 \quad B = x^2 - 12x + 36 \quad \text{και} \quad \Gamma = 2x - 12$$

α. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης $\frac{B-\Gamma}{2}$ $x = -2$.

β. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και Γ.

γ. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{A}{\Gamma}$ και $\frac{B}{A}$.

ΛΥΣΗ

α) α' τρόπος

$$\text{για } x=-2 \quad B = x^2 - 12x + 36 = (-2)^2 - 12(-2) + 36 = 4 + 24 + 36 = 64$$

$$\Gamma = 2x - 12 = 2(-2) - 12 = -4 - 12 = -16$$

Άρα

$$\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{64 - (-16)}{2} = \frac{64 + 16}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

β' τρόπος

$$\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{(x^2 - 12x + 36) - (2x - 12)}{2} = \frac{x^2 - 12x + 36 - 2x + 12}{2} = \frac{x^2 - 14x + 48}{2}$$

για $x=-2$ έχουμε :

$$\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{x^2 - 14x + 48}{2} = \frac{(-2)^2 - 14(-2) + 48}{2} = \frac{4 + 28 + 48}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

β)

$$A = x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6) \cdot (x-6)$$

$$B = x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = (x-6)^2$$

$$\Gamma = 2x - 12 = 2 \cdot (x-6)$$

$$\gamma) \quad \frac{A}{\Gamma} = \frac{(x+6) \cdot \cancel{(x-6)}}{2 \cdot \cancel{(x-6)}} = \frac{x+6}{2}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\cancel{(x-6)}^2}{(x+6) \cdot \cancel{(x-6)}} = \frac{x-6}{x+6}$$

10ΑΣΚ. Δίνεται η παράσταση $A = (2x - 3)^2 + x(7 - 3x) - 3$

α) Να αποδείξετε ότι $A = x^2 - 5x + 6$

β) Να λυθεί η εξίσωση $A=0$

γ) Να απλοποιήσετε τη παράσταση $B = \frac{A+x-6}{A+5x-22}$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \quad A = (2x - 3)^2 + x(7 - 3x) - 3 =$$

$$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - 7x + 3x^2 - 3 =$$

$$= 4x^2 - 12x + 9 + 7x - 3x^2 - 3 =$$

$$= 4x^2 - 3x^2 - 12x + 7x + 9 - 3 = x^2 - 5x + 6$$

β) $A = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ έχει $\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 5x + 6 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 & \text{η λύση } x_1 \\ \frac{5-1}{2} = 2 & \text{η λύση } x_2 \end{cases}$$

$$\gamma) B = \frac{A+x-6}{A+5x-22} = \frac{x^2-5x+6+x-6}{x^2-5x+6+5x-22} = \frac{x^2-4x}{x^2-16} = \frac{x \cdot (\cancel{x-4})}{(x+4) \cdot (\cancel{x-4})} = \frac{x}{x+4}$$

11ΑΣΚ. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x και το εμβαδόν του πατώματος.

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του E είναι:

$$E = x(x + 1) = x^2 + x, \text{ με } x > 0.$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E &= 90 \Leftrightarrow \\ x^2 + x &= 90 \Leftrightarrow \\ x^2 + x - 90 &= 0. \end{aligned}$$

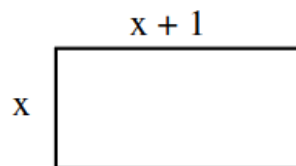
Το τριώνυμο $x^2 + x - 90$ έχει $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -90$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361 > 0$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + x - 90 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 & \text{η } x_1 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 & \text{η } x_2 \end{cases}$$

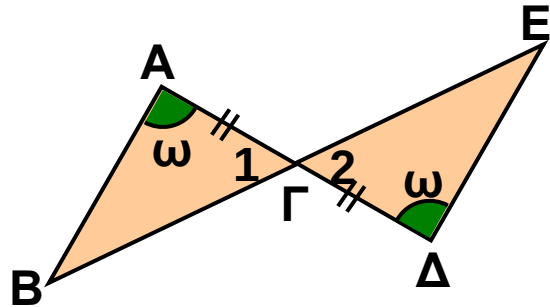


Η λύση $x = -10$ απορρίπτεται αφού $x > 0$.

Συνεπώς οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $x = 9$ μέτρα και $x + 1 = 10$ μέτρα.

12ΑΣΚ. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = \hat{D} = \omega$ και $AG = GD$.

Να αποδείξετε ότι $AB = DE$



ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα **ΒΑΓ** και **ΓΔΕ** έχουν:

i) $AG = GE$ (από υπόθεση)

ii) $\hat{G}_1 = \hat{G}_2$ (ως γωνίες κατακορυφήν)

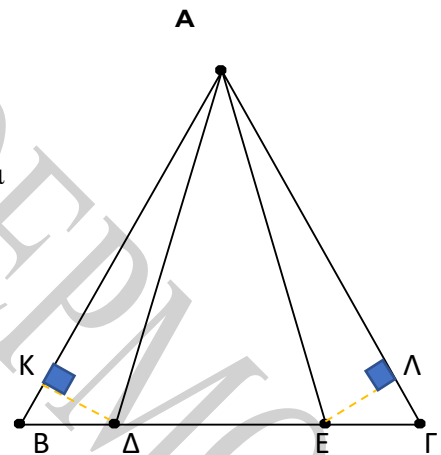
iii) $\hat{A} = \hat{D} = \omega$ (από υπόθεση)

Άρα από κριτήριο **Γ-Π-Γ** τα τρίγωνα είναι ίσα (έχουν από μία πλευρά ίση και από δύο προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μια προς μία) και επομένως και όλα τα στοιχεία τους θα είναι αντίστοιχα ίσα. δηλαδή **$AB = DE$**

13ΑΣΚ.

Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$. Στη βάση $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E έτσι ώστε $B\Delta = E\Gamma$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Γ1)** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ και να αποδείξετε ότι είναι ίσα.
Γ2) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.
Γ3) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των Δ και E από τις AB και AG αντίστοιχα, είναι ίσες.



ΛΥΣΗ

Γ1) Τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΑΓΕ** έχουν:

i) $AB = AG$ (Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)

ii) $B\Delta = GE$ (από υπόθεση – Κατασκευή)

iii) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (Ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.)

Άρα από κριτήριο **Π-Γ-Π** τα τρίγωνα είναι ίσα (έχουν από δύο πλευρές ίσες μια προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση)

και επομένως και όλα τα στοιχεία τους θα είναι αντίστοιχα ίσα δηλαδή **$AB = DE$**

Γ2) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG\epsilon$ είναι ίσα και όλα τα στοιχεία τους θα είναι αντίστοιχα ίσα δηλαδή **$AD = AE$** άρα το $A\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές.

Γ3) Φέρνω τις αποστάσεις ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΕΛ κάθετη στην ΑΓ. Αρκεί να δείξω ότι ΔΚ=ΕΛ. Πράγματι:

Τα ορθογώνια τρίγωνα **ΒΚΔ** και **ΓΛΕ** έχουν:

i) **ΒΔ=ΓΕ** (από υπόθεση – Κατασκευή)

ii) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (Ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.)

iii) $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$ (Ως αποστάσεις) άρα είναι ίσα και επομένως και όλα τα στοιχεία τους θα είναι αντίστοιχα ίσα δηλαδή **ΔΚ=ΕΛ**

14ΑΣΚ. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' του σχήματος με **ΑΓ = Α'Γ'** και **ΑΒ = Α'Β'**. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β'Δ' είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = \hat{A}'$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα **ΑΒΔ** και **ΑΒΔ'** έχουν:

i) **ΑΒ=ΑΒ'** (από υπόθεση – δεδομένα)

ii) **ΒΔ=ΒΔ'** (από υπόθεση, οι διάμεσοι είναι ίσες)

iii) **ΑΔ=Α'Δ'** (Ως μισά τμήματα των ίσων πλευρών αφού ΑΓ=Α'Γ' και Δ , Δ' μέσα αντίστοιχα)

Άρα από κριτήριο **Π-Π-Π** τα τρίγωνα είναι ίσα (έχου νόλες τις πλευρές ίσες μια προς μία)

και επομένως και όλα τα στοιχεία τους θα είναι αντίστοιχα ίσα δηλαδή οι γωνίες $\hat{A} = \hat{A}'$

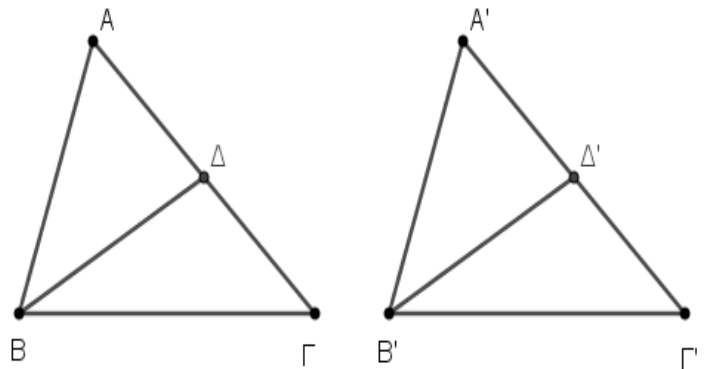
β) Τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και **Α'Β'Γ'** έχουν:

i) **ΑΒ=ΑΒ'** (από υπόθεση)

ii) **ΑΓ=Α'Γ'** (από υπόθεση)

iii) $\hat{A} = \hat{A}'$ (από α) . ερώτημα)

Άρα από κριτήριο **Π-Γ-Π** τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα (έχουν από δύο πλευρές ίσες μια προς μία και την περιχόμενη γωνία τους ίση)



15ΑΣΚ. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{\Gamma} = \hat{A}$, $\Delta\Gamma = 9\text{cm}$ και $\Delta E = 6\text{cm}$.

- α). Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta\Gamma E$ και AEB είναι όμοια .
- β). Να γράψετε τους λόγους των πλευρών των δυο τριγώνων
- γ) Να υπολογιστεί το AB αν $EB = 3\text{ cm}$

ΛΥΣΗ

α). $\widehat{\Delta E \Gamma} = \widehat{A E B}$ γιατί είναι γωνίες κατακορυφήν
 $\hat{\Gamma} = \hat{A}$ από υπόθεση

Επειδή τα τρίγωνα AEB και $\Delta E \Gamma$ έχουν από δύο γωνίες ίσες αντιστοίχα άρα είναι όμοια.

β) Επειδή είναι όμοια οι ομόλογες πλευρές τους είναι ανάλογες και θα ισχύει

$$\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{BE}{\Delta E} = \frac{AE}{\Gamma E} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{AB}{9} = \frac{3}{6} \quad \text{και} \quad \text{άρα } 6AB = 9 \cdot 3\text{cm} \quad \text{και} \quad AB = 4,5\text{cm}$$

16ΑΣΚ.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = A\Gamma = 10\text{cm}$ και $B\Gamma = 14\text{cm}$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σε αυτή σημείο E ώστε $AE = 5\text{cm}$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει την ΓA στο Δ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια
- β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΔE και $A\Delta$
- γ) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα BAD και ΓAE και να αποδείξετε ότι $BD = \Gamma E$

ΛΥΣΗ

α). $A_1 = A_3$ γιατί είναι γωνίες κατακορυφήν

$B_1 = E_1$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$.

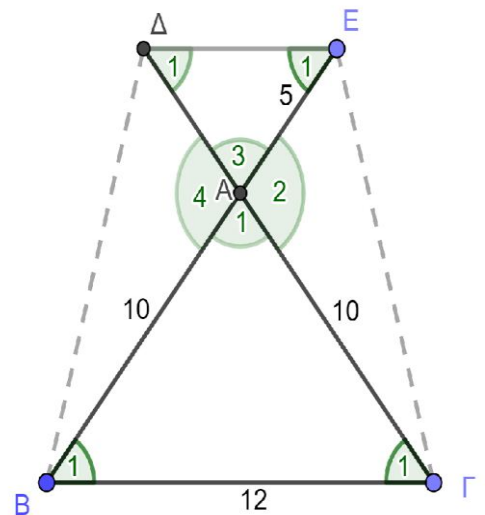
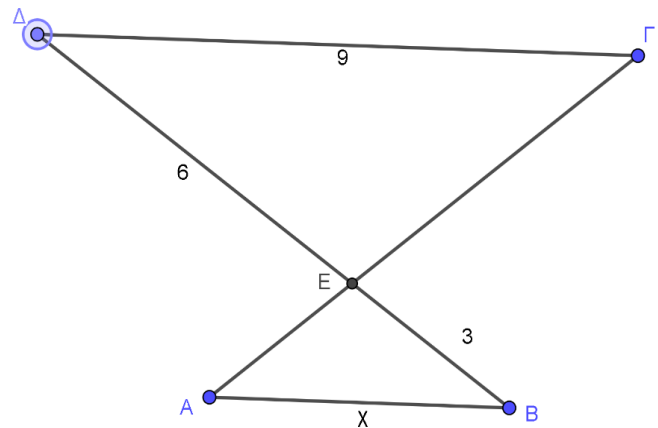
Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν από δύο γωνίες ίσες αντιστοίχα άρα είναι όμοια.

β) Επειδή είναι όμοια οι ομόλογες πλευρές τους είναι ανάλογες και θα ισχύει

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AE}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{A\Delta}{10} = \frac{5}{10} \quad \text{και} \quad \frac{\Delta E}{12} = \frac{5}{10} \quad \text{άρα } A\Delta = 5\text{cm} \quad \text{και} \quad \Delta E = 6\text{cm}$$

γ). Τα τρίγωνα BAD και ΓAE έχουν:



i) $A_2=A_4$ γιατί είναι γωνίες κατακορυφήν

ii) $AD=AE=5\text{cm}$ από ii) ερώτημα

iii) $AB=AF=10$ από υπόθεση

Άρα από κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως και όλα τα στοιχεία τους θα είναι αντίστοιχα ίσα δηλαδή $BD=FE$

17ΑΣΚ.

A) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος
$5x^2\psi^3$	5	$x^2\psi^3$
$-7x^2$	-7	x^2

B) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να την μεταφέρεται στο γραπτό σας

i) ο μονώνυμο $9x^2\psi^3$ είναι όμοιο με το :

α. $9x\psi$ β. $10x^2\psi^3$ γ. $9x^3\psi^2$ δ. $10x^2$

ii) Το ανάπτυγμα $(x-3) \cdot (x+3)$ είναι:

α. x^2-3 β. $9-x^2$ γ. $x-9$ δ. x^2-9

iii) Το ανάπτυγμα $(x+5)^2$ είναι:

α. x^2+25 β. $x^2+10x+25$ γ. $x+25$ δ. x^2+5

Γ) Να συμπληρώσετε τις ισότητες στο γραπτό σας κάνοντας πράξεις

i) $4x^2 + 6x^2 = 6x^2$

ii) $4x^2 \cdot 6x^2 = 24x^4$

iii) $(x-10)^2 - 2x \cdot (x-10) + (x+10) \cdot (x-10) = (x^2 - 20x + 100) - 2x^2 + 20x + (x^2 - 100) = x^2 - 2x^2 + x^2 - 20x + 20x + 100 - 100 = 0$

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : ΓΙΑΝΝΟΚΩΣΤΑΣ ΦΩΤΙΟΣ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΘΕΡΜΟΥ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΘΕΡΜΟΥ