

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Α. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

$$αβ + αγ = α(β + γ) .$$

Χρησιμοποιείται ανεξάρτητα από το πλήθος των όρων της παράστασης .

1. Ο κοινός παράγοντας των συντελεστών των όρων είναι ο Μ.Κ.Δ. τους .
2. Ο κοινός παράγοντας μιας κοινής μεταβλητής είναι η μικρότερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται η μεταβλητή αυτή στους όρους της παράστασης .
3. Ο κοινός παράγοντας μιας κοινής παρένθεσης είναι η μικρότερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται η παρένθεση αυτή στους όρους της παράστασης .

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:

i) $12x^2y^3 + 16x^3yz$

Το παραπάνω πολυώνυμο αποτελείται από δύο όρους. Ψάχνουμε να βρούμε τον κοινό παράγοντα των δύο όρων.

- ✓ Ο ΜΚΔ των συντελεστών 12 και 16 είναι το 4.
- ✓ Οι δύο όροι έχουν κοινές μεταβλητές το x και το y.
- ✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά το x είναι η μικρότερη δύναμη του x στους δύο όρους δηλαδή το x^2 .
- ✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά το y είναι η μικρότερη δύναμη του y στους δύο όρους δηλαδή το y.
- ✓ Συνεπώς συνολικά ο κοινός παράγοντας είναι το: $4x^2y$.

Αν βγάλουμε το $4x^2y$ κοινό παράγοντα τότε μέσα στην παρένθεση θα μείνει το πηλίκο της διαίρεσης του καθένα από τους δύο όρους με το $4x^2y$.

- ✓ Από το $12x^2y^3$ θα μείνει το $\frac{12x^2y^3}{4x^2y} = 3y^2$.
- ✓ Από το $16x^3yz$ θα μείνει το $\frac{16x^3yz}{4x^2y} = 4xz$.

Οπότε έχουμε:

$$12x^2y^3 + 16x^3yz = 4x^2y(3y^2 + 4xz)$$

ii) $3xy^2z^3 - 9x^2yz^2 + 18xy^3z^2$

Το πολυώνυμο έχει τρεις όρους. Ψάχνουμε να βρούμε τον κοινό παράγοντα των τριών όρων.

- ✓ Ο ΜΚΔ των συντελεστών 3, - 9 και 18 είναι το 3.
- ✓ Οι τρεις όροι έχουν κοινές μεταβλητές το x, το y και το z.
- ✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά το x είναι η μικρότερη δύναμη του x στους τρεις όρους δηλαδή το x.
- ✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά το y είναι η μικρότερη δύναμη του y στους τρεις όρους δηλαδή το y.
- ✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά το z είναι η μικρότερη δύναμη του z στους τρεις όρους δηλαδή το z^2 .
- ✓ Συνεπώς συνολικά ο κοινός παράγοντας είναι το: $3xyz^2$.

Αν βγάλουμε το $3xyz^2$ κοινό παράγοντα τότε μέσα στην παρένθεση θα μείνει το πηλίκο της διαίρεσης του καθένα από τους τρεις όρους με το $3xyz^2$.

✓ Από το $3xy^2z^3$ θα μείνει το $\frac{3xy^2z^3}{3xyz^2} = yz$.

✓ Από το $-9x^2yz^2$ θα μείνει το $\frac{-9x^2yz^2}{3xyz^2} = -3x$.

✓ Από το $18xy^3z^2$ θα μείνει το $\frac{18xy^3z^2}{3xyz^2} = 6y^2$

Οπότε έχουμε:

$$3xy^2z^3 - 9x^2yz^2 + 18xy^3z^2 = 3xyz^2(yz - 3x + 6y^2).$$

iii) $4x(a + 2\beta)^2 + 8x^2(a + 2\beta)$

Το πολυώνυμο έχει δύο όρους. Ψάχνουμε να βρούμε τον κοινό παράγοντα των δύο όρων.

✓ Ο ΜΚΔ των συντελεστών 4 και 8 είναι το 4.

✓ Οι δύο όροι έχουν κοινή μεταβλητή το x και κοινή παρένθεση την $(a + 2\beta)$.

✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά το x είναι η μικρότερη δύναμη του x στους δύο όρους δηλαδή το x .

✓ Ο κοινός παράγοντας που αφορά την κοινή παρένθεση $(a + 2\beta)$ είναι η μικρότερη δύναμη της $(a + 2\beta)$ στους δύο όρους δηλαδή η $(a + 2\beta)$.

✓ Συνεπώς συνολικά ο κοινός παράγοντας είναι το: $4x(a + 2\beta)$.

Αν βγάλουμε το $4x(a + 2\beta)$ κοινό παράγοντα τότε μέσα στην παρένθεση θα μείνει το πηλίκο της διαίρεσης του καθένα από τους τρεις όρους με το $4x(a + 2\beta)$.

✓ Από το $4x(a + 2\beta)^2$ θα μείνει το $\frac{4x(a+2\beta)^2}{4x(a+2\beta)} = a + 2\beta$.

✓ Από το $8x^2(a + 2\beta)$ θα μείνει το $\frac{8x^2(a+2\beta)}{4x(a+2\beta)} = 2x$.

Οπότε έχουμε:

$$4x(a + 2\beta)^2 + 8x^2(a + 2\beta) = 4x(a + 2\beta)(a + 2\beta + 2x)$$

Β. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Με λόγια:

Διαφορά δύο τετραγώνων = (άθροισμα των βάσεων) επί (διαφορά των βάσεων).

Χρησιμοποιείται όταν η παράσταση έχει δύο όρους.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:

i) $x^2 - 9$

✓ Έχοντας ένα τετράγωνο, το x^2 , και διαφορά δύο όρων ελέγχουμε αν μπορούμε να μετατρέψουμε τον άλλο όρο, δηλαδή το 9 σε τετράγωνο.

✓ Το 9 γράφεται ως: 3^2 .

✓ Συνεπώς το πολυώνυμο γράφεται στη μορφή: $x^2 - 9 = x^2 - 3^2$.

✓ Έχουμε λοιπόν τη μορφή: $a^2 - b^2$, όπου στη θέση του a έχουμε το x και στη θέση του b έχουμε το 3.

- ✓ Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής:

$$\begin{array}{c} \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3) \end{array}$$

ii) $25x^2 - 16y^4$

- ✓ Έχοντας διαφορά δύο όρων, ελέγχουμε αν μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφορά δύο τετραγώνων.
- ✓ Παρατηρούμε ότι στον πρώτο όρο: $25x^2$, έχουμε ένα τετράγωνο, το x^2 , ενώ ο συντελεστής του, το 25, μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο δηλαδή $25 = 5^2$. Οπότε συνολικά έχουμε: $25x^2 = 5^2x^2 = (5x)^2$.
- ✓ Παρατηρούμε επίσης ότι στον δεύτερο όρο: $16y^4$, η άρτια δύναμη y^4 μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο δηλαδή: $y^4 = (y^2)^2$. Επίσης ο συντελεστής, το 16, μπορεί να γραφτεί ως τετράγωνο δηλαδή $16 = 4^2$. Οπότε συνολικά έχουμε: $16y^4 = 4^2(y^2)^2 = (4y^2)^2$.
- ✓ Συνεπώς το πολυώνυμο γράφεται στη μορφή: $25x^2 - 16y^4 = (5x)^2 - (4y^2)^2$.
- ✓ Έχουμε λοιπόν τη μορφή: $\alpha^2 - \beta^2$, όπου στη θέση του α έχουμε το $5x$ και στη θέση του β έχουμε το $4y^2$.
- ✓ Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής:

$$\begin{array}{c} \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 25x^2 - 16y^4 = (5x)^2 - (4y^2)^2 = (5x + 4y^2)(5x - 4y^2) \end{array}$$

iii) $(x - 2y)^2 - 9x^2y^2$

- ✓ Έχοντας διαφορά δύο όρων, ελέγχουμε αν μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφορά δύο τετραγώνων.
- ✓ Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι ήδη τετράγωνο: $(x - 2y)^2$
- ✓ Παρατηρούμε επίσης ότι στον δεύτερο όρο: $9x^2y^2$, έχουμε δύο τετράγωνα τα x^2 και το y^2 , ενώ ο συντελεστής μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο αφού είναι: $9 = 3^2$. η άρτια δύναμη y^4 μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο δηλαδή: $y^4 = (y^2)^2$. Οπότε συνολικά έχουμε: $9x^2y^2 = 3^2x^2y^2 = (3xy)^2$.
- ✓ Συνεπώς το πολυώνυμο γράφεται στη μορφή: $(x - 2y)^2 - 9x^2y^2 = (x - 2y)^2 - (3xy)^2$
- ✓ Έχουμε λοιπόν τη μορφή: $\alpha^2 - \beta^2$, όπου στη θέση του α έχουμε το $(x - 2y)$ και στη θέση του β έχουμε το $(3xy)$.
- ✓ Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής:

$$\begin{array}{c} \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (x - 2y)^2 - 9x^2y^2 = (x - 2y)^2 - (3xy)^2 = (x - 2y + 3xy)(x - 2y - 3xy) \end{array}$$

Γ. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Χρησιμοποιείται όταν η παράσταση έχει τρεις όρους .

Παραδείγματα

i) $x^2 + 4x + 4$

- ✓ Ελέγχουμε αρχικά αν έχουμε δύο τετράγωνα στην παράσταση. Παρατηρούμε ότι έχουμε το x^2 , ενώ το 4 γράφεται ως τετράγωνο, δηλαδή $4 = 2^2$. Οπότε η παράσταση γράφεται ως: $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 2^2$.
- ✓ Στη συνέχεια ελέγχουμε αν το διπλάσιο γινόμενο των βάσεων των δύο τετραγώνων ισούται με τον τρίτο όρο. Έχουμε ότι: $2 \cdot x \cdot 2 = 4x$. Οπότε η παράσταση γράφεται ως εξής: $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 2^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$
- ✓ Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του αναπτύγματος τετραγώνου για να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 2^2 = \overset{\downarrow}{x^2} + \overset{\downarrow}{2 \cdot x} \cdot \overset{\downarrow}{2} + \overset{\downarrow}{2^2} = \overset{\downarrow}{(x + 2)}^2$$

ii) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

- ✓ Ελέγχουμε αρχικά αν έχουμε δύο τετράγωνα στην παράσταση. Παρατηρούμε ότι έχουμε το x^4 το οποίο γράφεται ως $x^4 = (x^2)^2$, καθώς και το y^4 που γράφεται ως $y^4 = (y^2)^2$. Οπότε η παράσταση γράφεται ως: $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2$
- ✓ Στη συνέχεια ελέγχουμε αν το διπλάσιο γινόμενο των βάσεων των δύο τετραγώνων ισούται με τον τρίτο όρο, κάτι που ισχύει.
- ✓ Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του αναπτύγματος τετραγώνου για να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = \overset{\downarrow}{(x^2)^2} - \overset{\downarrow}{2x^2} \cdot \overset{\downarrow}{y^2} + \overset{\downarrow}{(y^2)^2} = \overset{\downarrow}{(x^2 - y^2)}^2$$

iii) $9x^2 + 12xy^2 + 4y^4$

- ✓ Ελέγχουμε αρχικά αν έχουμε δύο τετράγωνα στην παράσταση. Παρατηρούμε ότι έχουμε το $9x^2$ το οποίο γράφεται ως $9x^2 = (3x)^2$, καθώς και το $4y^4$ που γράφεται ως $4y^4 = (2y^2)^2$. Οπότε η παράσταση γράφεται ως: $9x^2 + 12xy^2 + 4y^4 = (3x)^2 + 12xy^2 + (2y^2)^2$
- ✓ Στη συνέχεια ελέγχουμε αν το διπλάσιο γινόμενο των βάσεων των δύο τετραγώνων ισούται με τον τρίτο όρο. Έχουμε ότι: $2 \cdot 3x \cdot 2y^2 = 12xy^2$. Οπότε η παράσταση γράφεται ως εξής: $9x^2 + 12xy^2 + 4y^4 = (3x)^2 + 12xy^2 + (2y^2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y^2 + (2y^2)^2$
- ✓ Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του αναπτύγματος τετραγώνου για να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$9x^2 + 12xy^2 + 4y^4 = \overset{\downarrow}{(3x)^2} + \overset{\downarrow}{2 \cdot 3x} \cdot \overset{\downarrow}{2y^2} + \overset{\downarrow}{(2y^2)^2} = \overset{\downarrow}{(3x + 2y^2)}^2$$

Δ. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΟΡΩΝ

Υπάρχουν δύο τρόποι για να ομαδοποιήσουμε τέσσερις όρους.

α) Σε δύο ομάδες των δύο όρων η κάθε ομάδα .

1. Αρχικά χωρίζουμε τους τέσσερις όρους σε δύο ομάδες, με δύο όρους η καθεμία.
2. Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε την κάθε ομάδα είτε 'βγάζοντας' κοινό παράγοντα, είτε χρησιμοποιώντας την μέθοδο της διαφοράς τετραγώνων.
3. Εμφανίζεται κοινός παράγοντας μία παρένθεση, οπότε και παραγοντοποιούμε την παράσταση 'βγάζοντας' κοινό παράγοντα την παρένθεση.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω πολυώνυμα:

i) $5ax - 4\beta x + 5ay - 4\beta y$

1. Χωρίζουμε τους τέσσερις όρους σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία. Συχνά υπάρχουν δύο διαφορετικές ομαδοποιήσεις, οι οποίες οδηγούν στην τελική παραγοντοποίηση. Οδηγός συνήθως είναι οι συντελεστές των όρων της παράστασης. Εδώ θα επιλέξουμε να ομαδοποιήσουμε τους όρους με τον ίδιο συντελεστή. Οπότε έχουμε:

$$5ax - 4\beta x + 5ay - 4\beta y = (5ax + 5ay) + (-4\beta x - 4\beta y)$$

2. Παραγοντοποιούμε την κάθε ομάδα ξεχωριστά. Από την πρώτη ομάδα δηλαδή την $(5ax + 5ay)$, θα 'βγάλουμε' κοινό παράγοντα το $5a$. Από τη δεύτερη ομάδα δηλαδή την $(-4\beta x - 4\beta y)$, θα βγάλουμε κοινό παράγοντα το -4β . Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} 5ax - 4\beta x + 5ay - 4\beta y &= (5ax + 5ay) + (-4\beta x - 4\beta y) = \\ &= 5a(x + y) - 4\beta(x + y) \end{aligned}$$

3. Οι δύο όροι έχουν κοινό παράγοντα την παρένθεση $(x + y)$, οπότε 'βγάζοντας' την κοινό παράγοντα έχουμε:

$$\begin{aligned} 5ax - 4\beta x + 5ay - 4\beta y &= (5ax + 5ay) + (-4\beta x - 4\beta y) = \\ &= 5a(x + y) - 4\beta(x + y) = (x + y)(5a - 4\beta) \end{aligned}$$

ii) $\alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 + 2\beta$

1. Χωρίζουμε τους τέσσερις όρους σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία. Δεν μπορούμε να πάρουμε σε μία ομάδα τους δύο πρώτους όρους και στην άλλη ομάδα τους δύο τελευταίους όρους γιατί, με αυτό τον τρόπο η πρώτη ομάδα θα έχει μόνο τη μεταβλητή α και η δεύτερη ομάδα θα έχει μόνο τη μεταβλητή β με αποτέλεσμα να μην μπορεί να γίνει καμία παραγοντοποίηση στη συνέχεια. Αν πάρουμε σε μία ομάδα τον πρώτο και τον τελευταίο όρο και στην άλλη ομάδα τους άλλους δύο όρους δεν μπορούμε να τις παραγοντοποιήσουμε τις δύο ομάδες. Συνεπώς η μοναδική δυνατή ομαδοποίηση είναι: η μία ομάδα να αποτελείται από τον πρώτο και τον τρίτο όρο και η άλλη ομάδα από τους δύο άλλους όρους. Συνεπώς έχουμε:

$$\alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 + 2\beta = (\alpha^2 - \beta^2) + (-2\alpha + 2\beta)$$

2. Η πρώτη ομάδα είναι διαφορά τετραγώνων, ενώ από τη δεύτερη ομάδα μπορεί να 'βγει' κοινός παράγοντας το -2 . Συνεπώς η παράσταση γίνεται:

$$\alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 + 2\beta = (\alpha^2 - \beta^2) + (-2\alpha + 2\beta) = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - 2(\alpha - \beta)$$

3. Οι δύο όροι που έχουν σχηματιστεί, ο $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ και ο $2(\alpha - \beta)$, έχουν κοινό παράγοντα την παρένθεση: $(\alpha - \beta)$. Οπότε η παράσταση γίνεται:
- $$\alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 + 2\beta = (\alpha^2 - \beta^2) + (-2\alpha + 2\beta) = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - 2(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2)$$

β) Σε δύο ομάδες των τριών και ενός όρου η κάθε μία

Προκειμένου η παραπάνω ομαδοποίηση να μπορεί να οδηγήσει σε παραγοντοποίηση απαιτείται οι τρεις από τους τέσσερις όρους της παράστασης να είναι ή να μπορούν να γίνουν τετράγωνα, εκ των οποίων τα δύο να είναι ομόσημα και το τρίτο ετερόσημο.

1. Αρχικά παίρνουμε μαζί σε μία ομάδα τα δύο ομόσημα τετράγωνα με τον τέταρτο όρο, και αφήνουμε μόνο του το ετερόσημο τετράγωνο ως δεύτερη ομάδα.
2. Η ομάδα των τριών όρων πρέπει να είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.
3. Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε τις δύο ομάδες με χρήση της ταυτότητας της διαφοράς τετραγώνων.

Παραδείγματα

i) $4\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 4\alpha\beta$

1. Αρχικά παρατηρούμε ότι η παράσταση περιέχει τρεις όρους, τους $4\alpha^2$, β^2 και γ^2 οι οποίοι είναι τετράγωνα ή μπορούν να γίνουν τετράγωνα, με τους δύο πρώτους να είναι ομόσημα (θετικά) και το τρίτο είναι ετερόσημο (αρνητικό). Οπότε έχουμε της εξής ομαδοποίηση:
$$4\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 4\alpha\beta = (4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2) - \gamma^2$$
2. Ελέγχουμε αν η ομάδα των τριών όρων είναι ανάπτυγμα τετραγώνου. Έχουμε ότι:
$$4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = (2\alpha)^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 = (2\alpha - \beta)^2$$

και η παράσταση γίνεται:

$$4\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 4\alpha\beta = (4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2) - \gamma^2 = [(2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot \beta + \beta^2] - \gamma^2 = (2\alpha - \beta)^2 - \gamma^2$$
3. Η τελευταία μορφή είναι διαφορά τετραγώνων, οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:
$$4\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 4\alpha\beta = (4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2) - \gamma^2 = [(2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot \beta + \beta^2] - \gamma^2 = (2\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 = (2\alpha - \beta + \gamma)(2\alpha - \beta - \gamma)$$

ii) $9\alpha^2 - 4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma$

1. Αρχικά παρατηρούμε ότι η παράσταση περιέχει τρεις όρους, τους $9\alpha^2$, $4\beta^2$ και $25\gamma^2$ οι οποίοι είναι τετράγωνα ή μπορούν να γίνουν τετράγωνα, με τους δύο τελευταίους να είναι ομόσημα (αρνητικά) και το πρώτο είναι ετερόσημο (θετικό). Οπότε έχουμε της εξής ομαδοποίηση:
$$9\alpha^2 - 4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma = 9\alpha^2 + (-4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma)$$

Επειδή τα τετράγωνα στην ταυτότητα του αναπτύγματος τετραγώνου πρέπει να είναι θετικά, 'βγάζουμε' το '-' κοινό παράγοντα από τη δεύτερη παρένθεση και η παράσταση γίνεται:

$$9\alpha^2 - 4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma = 9\alpha^2 + (-4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma) = 9\alpha^2 - (4\beta^2 + 20\beta\gamma + 25\gamma^2)$$

2. Ελέγχουμε αν η ομάδα των τριών όρων είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

Έχουμε ότι:

$$4\beta^2 + 20\alpha\beta + 25\gamma^2 = (2\beta)^2 + 20\beta\gamma + (5\gamma)^2 = (2\beta)^2 + 2 \cdot 2\beta \cdot 5\gamma + (5\gamma)^2 = (2\beta + 5\gamma)^2$$

και η παράσταση γίνεται:

$$9\alpha^2 - 4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma = 9\alpha^2 + (-4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma) = 9\alpha^2 - (4\beta^2 + 20\beta\gamma + 25\gamma^2) = 9\alpha^2 - (2\beta + 5\gamma)^2$$

3. Η τελευταία μορφή είναι διαφορά τετραγώνων, οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} 9\alpha^2 - 4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma &= 9\alpha^2 + (-4\beta^2 - 25\gamma^2 - 20\beta\gamma) = \\ &= 9\alpha^2 - (4\beta^2 + 20\beta\gamma + 25\gamma^2) = 9\alpha^2 - (2\beta + 5\gamma)^2 = \\ &= (3\alpha)^2 - (2\beta + 5\gamma)^2 = [3\alpha + (2\beta + 5\gamma)] \cdot [3\alpha - (2\beta + 5\gamma)] = \\ &= (3\alpha + 2\beta + 5\gamma)(3\alpha - 2\beta - 5\gamma) \end{aligned}$$

Ε. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΕΝΟΣ ΟΡΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΟΡΟΥΣ

Θα δούμε δύο περιπτώσεις διάσπασης ενός όρου.

α) Τριώνυμο της μορφής $x^2 + kx + \lambda$ (που δεν είναι ανάπτυγμα τετραγώνου)

1. Βρίσκουμε δύο αριθμούς α και β τέτοιους ώστε : $\alpha + \beta = k$ και $\alpha\beta = \lambda$.
2. Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε το τριώνυμο ως εξής :

$$\begin{aligned} x^2 + kx + \lambda &= x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = (x^2 + \alpha x) + (\beta x + \alpha\beta) = \\ &= x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) = (x + \alpha)(x + \beta) . \end{aligned}$$

Παραδείγματα

i) $x^2 + 7x + 12$

1. Βρίσκουμε δύο αριθμούς α , β τέτοιους ώστε: $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha \cdot \beta = 12$. Προκειμένου να βρούμε τους δύο αυτούς αριθμούς προσδιορίζουμε όλα τα ζευγάρια που έχουν γινόμενο 12. Αυτά είναι τα: (1, 12), (-1, -12), (2, 6), (-2, -6), (3, 4), (-3, -4). Από τα παραπάνω ζευγάρια εντοπίζουμε εκείνο που έχει άθροισμα 7. Αυτό είναι το (3, 4).
2. Διασπούμε το $+7x$ σε $+3x + 4x$, οπότε το τριώνυμο γίνεται:

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12.$$
3. Παραγοντοποιούμε τους τέσσερις όρους ομαδοποιώντας τους σε δύο ομάδες των δύο όρων, η μία ομάδα αποτελείται από τους δύο πρώτους όρους και η δεύτερη ομάδα από τους δύο τελευταίους όρους. Οπότε έχουμε:

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$$

ii) $x^2 - 5x + 6$

1. Βρίσκουμε δύο αριθμούς α , β τέτοιους ώστε $\alpha + \beta = -5$ και $\alpha \cdot \beta = 6$. Προκειμένου να βρούμε τους δύο αυτούς αριθμούς προσδιορίζουμε όλα τα ζευγάρια που έχουν γινόμενο 6. Αυτά είναι τα: (1, 6), (-1, -6), (2, 3), (-2, -3). Από τα παραπάνω ζευγάρια εντοπίζουμε εκείνο που έχει άθροισμα -5. Αυτό είναι το (-2, -3).
2. Διασπούμε το $-5x$ σε $-2x - 3x$, οπότε το τριώνυμο γίνεται:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6.$$

3. Παραγοντοποιούμε τους τέσσερις όρους ομαδοποιώντας τους σε δύο ομάδες των δύο όρων, η μία ομάδα αποτελείται από τους δύο πρώτους όρους και η δεύτερη ομάδα από τους δύο τελευταίους όρους. Οπότε έχουμε:
- $$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3).$$

β) Παράσταση τριών όρων στους οποίους η απόλυτη τιμή του μεγαλύτερου συντελεστή ισούται με το άθροισμα των απόλυτων τιμών των δύο άλλων συντελεστών.

1. Διασπούμε τον όρο με τον μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή συντελεστή σε άθροισμα δύο όρων, που έχουν συντελεστές τους συντελεστές των δύο άλλων όρων.
2. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ομαδοποίηση τεσσάρων όρων σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία, προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση.

Παραδείγματα .

i) $3x^2 - 5x + 2$

1. Η παραπάνω παράσταση δεν είναι τριώνυμο γιατί το x^2 έχει συντελεστή διάφορο του 1. Παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος συντελεστής κατά απόλυτη τιμή είναι ίσος με 5, με τους δύο μικρότερους συντελεστές να έχουν άθροισμα $3 + 2 = 5$.
2. Διασπούμε το $- 5x$ σε δύο όρους, σε $- 3x - 2x$, οπότε η παράσταση γίνεται: $3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 - 3x - 2x + 2$.
3. Παραγοντοποιούμε τους τέσσερις όρους ομαδοποιώντας τους σε δύο ομάδες αποτελούμενες η μεν πρώτη από τους δύο όρους με συντελεστή το 3 η δε δεύτερη από τους δύο όρους με συντελεστή το 2. Οπότε έχουμε:
 $3x^2 - 5x + 2 = 3x^2 - 3x - 2x + 2 = 3x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(3x - 2).$

ii) $4x^2 - 7xy + 3y^2$

1. Παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος συντελεστής κατά απόλυτη τιμή είμαι ίσος με 7, με τους δύο μικρότερους συντελεστές να έχουν άθροισμα $4 + 3 = 7$.
2. Διασπούμε το $- 7xy$ σε δύο όρους, σε $- 4xy - 3xy$, οπότε η παράσταση γίνεται: $4x^2 - 7xy + 3y^2 = 4x^2 - 4xy - 3xy + 3y^2$.
3. Παραγοντοποιούμε τους τέσσερις όρους ομαδοποιώντας τους σε δύο ομάδες αποτελούμενες η μεν πρώτη από τους δύο όρους με συντελεστή το 4 η δε δεύτερη από τους δύο όρους με συντελεστή το 3. Οπότε έχουμε:
 $4x^2 - 7xy + 3y^2 = 4x^2 - 4xy - 3xy + 3y^2 = 4x(x - y) - 3y(x - y) = (x - y)(4x - 3y).$

ΣΤ. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΝΤΕ ΟΡΩΝ

Μία παράσταση με πέντε όρους παραγοντοποιείται ομαδοποιώντας την σε δύο ομάδες των τριών και δύο όρων η κάθε μία.

1^η περίπτωση Απαιτείται να υπάρχουν στην παράσταση τουλάχιστον δύο ομόσημα τετράγωνα.

1. Η ομάδα των τριών όρων αποτελείται από τα δύο ομόσημα τετράγωνα και έναν ακόμη όρο, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν ανάπτυγμα τετραγώνου .
2. Οι υπόλοιποι δύο όροι , που αποτελούν τη δεύτερη ομάδα, παραγοντοποιείται είτε ‘βγάζοντας’ κοινό παράγοντα είτε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων .
3. Στη συνέχεια η παράσταση παραγοντοποιείται, έχοντας μία παρένθεση κοινό παράγοντα

2^η περίπτωση

1. Η ομάδα των τριών όρων είναι τριώνυμο .
2. Οι υπόλοιποι δύο όροι, που αποτελούν τη δεύτερη ομάδα, παραγοντοποιείται είτε ‘βγάζοντας’ κοινό παράγοντα είτε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων.
3. Στη συνέχεια η παράσταση παραγοντοποιείται, έχοντας μία παρένθεση κοινό παράγοντα.

Παραδείγματα

i)
$$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2xy = (x^2 - 2xy + y^2) + (2x - 2y) = (x - y)^2 + 2(x - y) = (x - y)(x - y + 2)$$

ii)
$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - 5x - 4y + 6 &= (x^2 - 5x + 6) + (-2xy - 4y) = \\ &= (x^2 - 3x - 2x + 6) - 2y(x - 2) = [x(x - 3) - 2(x - 3)] - 2y(x - 2) = \\ &= (x - 3)(x - 2) - 2y(x - 2) = (x - 2)(x - 3 - 2y) \end{aligned}$$

Ζ. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΙ ΟΡΩΝ

Μία παράσταση με έξι όρους παραγοντοποιείται ομαδοποιώντας την είτε σε δύο ομάδες των τριών όρων η καθεμία είτε σε τρεις ομάδες των δύο όρων η κάθε μία.

α) Σε τρεις ομάδες των δύο όρων η κάθε ομάδα

1. Αρχικά χωρίζουμε τους έξι όρους σε τρεις ομάδες με δύο όρους η καθεμία.
2. Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε την κάθε ομάδα είτε ‘βγάζοντας’ κοινό παράγοντα, είτε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαφοράς παραγόντων.
3. Εμφανίζεται κοινός παράγοντας μία παρένθεση, οπότε και παραγοντοποιούμε

Παραδείγματα

$$\text{i)} \quad a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = (a^5 + a^4) + (a^3 + a^2) + (a + 1) = \\ a^4(a + 1) + a^2(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)(a^4 + a^2 + 1).$$

β) Σε δύο ομάδες των τριών η κάθε μία

Απαιτείται να υπάρχουν στην παράσταση τέσσερα τετράγωνα, δύο θετικά και δύο αρνητικά.

1. Αρχικά παίρνουμε μαζί σε μία ομάδα, τα δύο θετικά τετράγωνα με έναν ακόμη όρο ώστε όλοι μαζί να δημιουργούν ανάπτυγμα.
2. Τα δύο αρνητικά τετράγωνα με τον άλλο όρο, αποτελούν την άλλη ομάδα, οι οποίοι δημιουργούν επίσης ανάπτυγμα τετραγώνου.
3. Στη συνέχεια παραγοντοποιούμε με χρήση της ταυτότητας της διαφοράς τετραγώνων.

Παραδείγματα

$$\text{i)} \quad \beta^2 - x^2 + 8\beta - 2xy + 16 - y^2 = (\beta^2 + 8\beta + 16) + (-x^2 - 2xy - y^2) = \\ (\beta^2 + 8\beta + 4^2) - (x^2 + 2xy + y^2) = (\beta + 4)^2 - (x + y)^2 = \\ [(\beta + 4) + (x + y)][(\beta + 4) - (x + y)] = (\beta + 4 + x + y)(\beta + 4 - x - y).$$

γ) Μετατροπή πέντε όρων σε έξι με διάσπαση ενός όρου

Παραδείγματα

$$\text{i)} \quad x^2 - y^2 - 2x - 10y - 24 = x^2 - y^2 - 2x - 10y + 1 - 25 = \\ (x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 10y + 25) = (x - 1)^2 - (y + 5)^2 = \\ [(x - 1) - (y + 5)][(x - 1) + (y + 5)] = (x - 1 - y - 5)(x - 1 + y + 5) = \\ (x - y - 6)(x + y + 4).$$

Η. Συνδυασμός των παραπάνω μεθόδων.

Σε πολλές περιπτώσεις αρχικά χρειάζεται να παραγοντοποιήσουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κοινού παράγοντα και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε μια από τις υπόλοιπες μεθόδους.

ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΟΡΩΝ

Ανάλογα με το πλήθος των όρων της παράστασης χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες μεθόδους, όπως αναφέρονται παρακάτω. Ο έλεγχος της εφαρμογής τους γίνεται χρονικά με τη σειρά που δίνονται παρακάτω. Ενδεχομένως να μπορεί να γίνει εφαρμογή περισσότερων της μιας μεθόδου ή να χρειαστεί να γίνει διαδοχική εφαρμογή δύο μεθόδων.

ΔΥΟ ΟΡΟΙ

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ
2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΤΡΕΙΣ ΟΡΟΙ

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ
2. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ
3. ΤΡΙΩΝΥΜΟ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $x^2 + κx + λ$ (που δεν είναι ανάπτυγμα τετραγώνου)
4. ΤΡΕΙΣ ΟΡΟΙ ΣΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΛΛΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ (διάσπαση του όρου με τον μεγαλύτερο συντελεστή).

ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΟΡΟΙ

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ
2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΟΡΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΕΝΟΣ ΟΡΟΥ Η ΚΑΘΕ ΜΙΑ
3. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΟΡΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΟΡΩΝ Η ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑ

ΠΕΝΤΕ ΟΡΟΙ

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ
2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΝΤΕ ΟΡΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΔΥΟ ΟΡΩΝ Η ΚΑΘΕ ΜΙΑ (δύο τρόποι)
3. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΕΝΤΕ ΟΡΩΝ ΣΕ ΕΞΙ ΜΕ ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΕΝΟΣ ΟΡΟΥ

ΕΞΙ ΟΡΟΙ

1. ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ
2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΙ ΟΡΩΝ ΣΕ ΔΥΟ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ Η ΚΑΘΕ ΜΙΑ
3. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΙ ΟΡΩΝ ΣΕ ΤΡΕΙΣ ΟΜΑΔΕΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΟΡΩΝ Η ΚΑΘΕ ΟΜΑΔΑ