

**ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**  
**ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ**

**1.  $8\alpha^2\beta^3 - 16\alpha^5\beta^2\gamma + 12\alpha^3\beta^4\gamma^2$**

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους. Αρχικά ελέγχουμε αν υπάρχει κοινός παράγοντας. Ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών είναι το 4, ενώ υπάρχουν κοινές μεταβλητές οι  $\alpha$  και  $\beta$ . Ο κοινός παράγοντας που αφορά το  $\alpha$  είναι η μικρότερη δύναμη του  $\alpha$  δηλαδή ο  $\alpha^2$ . Ο κοινός παράγοντας που αντιστοιχεί στον  $\beta$  είναι η μικρότερη δύναμη του  $\beta$  δηλαδή το  $\beta^2$ . Συνολικά ο κοινός παράγοντας είναι ο  $4\alpha^2\beta^2$ . Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$8\alpha^2\beta^3 - 16\alpha^5\beta^2\gamma + 12\alpha^3\beta^4\gamma^2 = 4\alpha^2\beta^2(2\beta - 4\alpha^3\gamma + 3\alpha\beta^2\gamma^2)$$

Η παράσταση που έμεινε μέσα στην παρένθεση δεν παραγοντοποιείται περαιτέρω.

**2.  $y^2 - 49$**

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους. Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κοινός παράγοντας. Έχουμε όμως ένα τετράγωνο το  $y^2$  και το 49 που γράφεται ως τετράγωνο αφού είναι  $49 = 7^2$ , οπότε έχουμε διαφορά τετραγώνων. Συνεπώς η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$y^2 - 49 = y^2 - 7^2 = (y + 7)(y - 7)$$

**3.  $x^2 - 8x + 16$**

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους. Δεν υπάρχει κοινός παράγοντας. Ελέγχουμε αν υπάρχουν δύο τετράγωνα. Υπάρχουν το  $x^2$  και το 16 που γράφεται ως  $16 = 4^2$ . Οπότε ελέγχουμε αν έχουμε ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x - 4)^2$$

**4.  $2\alpha\mu^2 - 8\alpha\nu^2 - 3\mu^2 + 12\nu^2$**

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους. Δεν υπάρχει κοινός παράγοντας. Επίσης δεν υπάρχουν τρία τετράγωνα για να ομαδοποιήσουμε σε δύο ομάδες των τριών και του ενός όρου. Κατά συνέπεια προχωράμε σε ομαδοποίηση δύο ομάδων των δύο όρων η καθεμία. Αν επιλέξουμε ως μία ομάδα τους δύο πρώτους όρους παρατηρούμε ότι έχουν κοινό παράγοντα το  $2\alpha$ . Οι δύο τελευταίοι όροι έχουν κοινό παράγοντα το  $-3$ . Οπότε η παράσταση γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} 2\alpha\mu^2 - 8\alpha\nu^2 - 3\mu^2 + 12\nu^2 &= (2\alpha\mu^2 - 8\alpha\nu^2) + (-3\mu^2 + 12\nu^2) = \\ &= 2\alpha(\mu^2 - 4\nu^2) - 3(\mu^2 - 4\nu^2) = (\mu^2 - 4\nu^2)(2\alpha - 3) \end{aligned}$$

Από τις δύο τελευταίες παρενθέσεις παρατηρούμε ότι στην πρώτη μπορούμε να έχουμε διαφορά τετραγώνων αφού μπορούμε να γράψουμε:  $4v^2 = (2v)^2$ . Κατά συνέπεια μπορούμε να συνεχίσουμε την παραγοντοποίηση ως εξής:

$$(\mu^2 - 4v^2)(2\alpha - 3) = [\mu^2 - (2v)^2](2\alpha - 3) = (\mu + 2v)(\mu - 2v)(2\alpha - 3)$$

Συνολικά έχουμε:

$$2\alpha\mu^2 - 8\alpha v^2 - 3\mu^2 + 12v^2 = (2\alpha\mu^2 - 8\alpha v^2) + (-3\mu^2 + 12v^2) =$$

$$2\alpha(\mu^2 - 4v^2) - 3(\mu^2 - 4v^2) = (\mu^2 - 4v^2)(2\alpha - 3) = [\mu^2 - (2v)^2](2\alpha - 3) =$$

$$= (\mu + 2v)(\mu - 2v)(2\alpha - 3)$$

### 5. $y^2(x + 1) - x - 1$

Στην παράσταση επειδή το πρώτο μέρος είναι γινόμενο και ο ένας παράγοντας είναι παρένθεση, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε έναν όρο – παρένθεση και στο δεύτερο μέρος. Βγάζουμε το ‘-’ κοινό παράγοντα από το ‘ $-x - 1$ ’, οπότε η παράσταση γίνεται:

$$y^2(x + 1) - x - 1 = y^2(x + 1) - (x + 1)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι έχουμε μία παράσταση που αποτελείται από δύο όρους που έχουν κοινό παράγοντα την παρένθεση. Κατά συνέπεια η παράσταση γίνεται:

$$y^2(x + 1) - x - 1 = y^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(y^2 - 1)$$

Παρατηρούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι η δεύτερη παρένθεση μπορεί να εξελιχθεί σε διαφορά τετραγώνων αφού μπορώ να γράψω:  $1 = 1^2$  και η παράσταση γίνεται:

$$(x + 1)(y^2 - 1) = (x + 1)(y^2 - 1^2) = (x + 1)(y + 1)(y - 1)$$

Συνολικά έχουμε:

$$y^2(x + 1) - x - 1 = y^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(y^2 - 1) = (x + 1)(y + 1)(y - 1)$$

### 6. $9x^2 - (2x + 5)^2$

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους, εκ των οποίων ο δεύτερος είναι τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι και ο πρώτος όρος μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο αφού μπορώ να γράψω:  $9x^2 = (3x)^2$ . Οπότε έχουμε διαφορά τετραγώνων και παραγοντοποιείται ως εξής:

$$9x^2 - (2x + 5)^2 = (3x)^2 - (2x + 5)^2 = [3x + (2x + 5)][3x - (2x + 5)] =$$

$$(3x + 2x + 5)(3x - 2x - 5) = (5x + 5)(x - 5)$$

Παρατηρούμε τέλος ότι στην πρώτη από τις δύο τελευταίες παρενθέσεις υπάρχει κοινός παράγοντας το 5 και κατά συνέπεια παραγοντοποιείται περαιτέρω ως εξής:

$$(5x + 5)(x - 5) = 5(x + 1)(x - 5)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} 9x^2 - (2x + 5)^2 &= (3x)^2 - (2x + 5)^2 = [3x + (2x + 5)][3x - (2x + 5)] = \\ (3x + 2x + 5)(3x - 2x - 5) &= (5x + 5)(x - 5) = 5(x + 1)(x - 5) \end{aligned}$$

### 7. $16x^2 + 25y^2 - 9\omega^2 + 40xy$

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Ελέγχουμε αν έχουμε τρία τετράγωνα, δύο ομόσημα και ένα ετερόσημο, ώστε να ομαδοποιήσουμε σε δύο ομάδες των τριών και του ενός όρου. Έχουμε δύο ομόσημα τετράγωνα, τους  $16x^2$  και  $25y^2$ , και ένα ετερόσημο τετράγωνο, το  $-9\omega^2$ . Γράφουμε σε μία ομάδα τα δύο ομόσημα τετράγωνα μαζί με τον τέταρτο όρο και αφήνουμε μόνο του το ετερόσημο τετράγωνο. Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$16x^2 + 25y^2 - 9\omega^2 + 40xy = 16x^2 + 40xy + 25y^2 - 9\omega^2$$

Ελέγχουμε αν η πρώτη ομάδα των τριών όρων μπορεί να είναι ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$\text{Έχουμε; } 16x^2 + 40xy + 25y^2 - 9\omega^2 = [(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 5y + (5y)^2] - 9\omega^2 = (4x + 5y)^2 - 9\omega^2$$

Επειδή το  $9\omega^2$  μπορεί να γραφτεί ως τετράγωνο μπορούμε να συνεχίσουμε χρησιμοποιώντας τη διαφορά τετραγώνων ως εξής:

$$(4x + 5y)^2 - 9\omega^2 = (4x + 5y)^2 - (3\omega)^2 = (4x + 5y + 3\omega)(4x + 5y - 3\omega)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} 16x^2 + 25y^2 - 9\omega^2 + 40xy &= 16x^2 + 40xy + 25y^2 - 9\omega^2 = [(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 5y + (5y)^2] - 9\omega^2 = \\ &= (4x + 5y)^2 - (3\omega)^2 = (4x + 5y + 3\omega)(4x + 5y - 3\omega) \end{aligned}$$

### 8. $6\alpha^3 + 9\alpha^2\beta - 4\alpha\beta - 6\beta^2 + 8\alpha + 12\beta$

Η παράσταση αποτελείται από έξι όρους οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Ελέγχω αν υπάρχουν τέσσερα τετράγωνα, δύο θετικά και δύο αρνητικά, ώστε να τους ομαδοποιήσω σε δύο ομάδες των τριών όρων η καθεμία, αλλά δεν υπάρχουν. Συνεπώς θα πρέπει να τους ομαδοποιήσω σε τρεις ομάδες των δύο όρων η καθεμία. Αν επιλέξω ως αρχική ομάδα τους δύο πρώτους όρους, μπορώ να τους παραγοντοποιήσω βγάζοντας κοινό παράγοντα ως εξής:

$$6\alpha^3 + 9\alpha^2\beta = 3\alpha^2(2\alpha + 3\beta)$$

Προσπαθώ να ομαδοποιήσω τους υπόλοιπους τέσσερις ώστε να εμφανίζεται μετά την παραγοντοποίηση η παρένθεση  $(2\alpha + 3\beta)$ . Οπότε ομαδοποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 6\alpha^3 + 9\alpha^2\beta - 4\alpha\beta - 6\beta^2 + 8\alpha + 12\beta &= (6\alpha^3 + 9\alpha^2\beta) + (-4\alpha\beta - 6\beta^2) + (8\alpha + 12\beta) = \\
 &= 3\alpha^2(2\alpha + 3\beta) - 2\beta(2\alpha + 3\beta) + 4(2\alpha + 3\beta) = (2\alpha + 3\beta)(3\alpha^2 - 2\beta + 4)
 \end{aligned}$$

### 9. $x^2 - 3x - 18$

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Δεν υπάρχουν δύο τετράγωνα, συνεπώς δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως ανάπτυγμα τετραγώνου. Η παράσταση είναι όμως της μορφής:  $x^2 + kx + \lambda$ , δηλαδή είναι τριώνυμο. Για να το παραγοντοποιήσουμε αναζητούμε δύο αριθμούς,  $\alpha$  και  $\beta$ , με άθροισμα τον συντελεστή του  $x$ , δηλαδή το  $-3$  και γινόμενο τον σταθερό όρο, δηλαδή το  $-18$ . Δηλαδή,  $\alpha + \beta = -3$  και  $\alpha\beta = -18$ . Με δοκιμές βρίσκουμε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι οι:  $-6$  και  $3$ , οπότε διασπούμε το  $-3x$  σε  $-6x + 3x$  και η παράσταση γίνεται ως εξής:

$$x^2 - 3x - 18 = x^2 - 6x + 3x - 18$$

Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ομαδοποιώντας την σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία, οι δύο πρώτοι όροι μαζί και οι δύο τελευταίοι όροι μαζί. Οπότε έχουμε:

$$x^2 - 6x + 3x - 18 = x(x - 6) + 3(x - 6) = (x - 6)(x + 3)$$

Συνολικά έχουμε:

$$x^2 - 3x - 18 = x^2 - 6x + 3x - 18 = x(x - 6) + 3(x - 6) = (x - 6)(x + 3)$$

### 10. $2x^2 - x - 3$

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Δεν υπάρχουν δύο τετράγωνα ώστε να είναι ανάπτυγμα τετραγώνου, όπως επίσης δεν είναι τριώνυμο της μορφής  $x^2 + kx + \lambda$ . Οπότε παραμένει μόνο η διάσπαση. Παρατηρούμε ότι ο μεγαλύτερος, κατά απόλυτη τιμή, συντελεστής το 3 ισούται με το άθροισμα των απόλυτων τιμών των άλλων δύο συντελεστών, δηλαδή:  $3 = 2 + 1$ . Οπότε διασπούμε το  $-3$  σε  $-2 - 1$  και η παράσταση γίνεται:

$$2x^2 - x - 3 = 2x^2 - x - 2 - 1$$

Για να παραγοντοποιήσουμε ομαδοποιούμε σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία, παίρνοντας μαζί τους όρους με τους ίδιους συντελεστές, δηλαδή:

$$2x^2 - x - 2 - 1 = (2x^2 - 2) + (-x - 1) = 2(x^2 - 1) - (x + 1)$$

Δεν υπάρχει κοινός παράγοντας στους δύο όρους, παρατηρούμε όμως ότι η πρώτη παρένθεση είναι διαφορά τετραγώνων οπότε έχουμε:

$$2(x^2 - 1) - (x + 1) = 2(x^2 - 1^2) - (x + 1) = 2(x + 1)(x - 1) - (x + 1) = (x + 1)[2(x - 1) - 1] =$$

$$= (x + 1)(2x - 2 - 1) = (x + 1)(2x - 3)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 3 &= 2x^2 - x - 2 - 1 = (2x^2 - 2) + (-x - 1) = 2(x^2 - 1) - (x + 1) = 2(x^2 - 1^2) - (x + 1) \\ &= 2(x + 1)(x - 1) - (x + 1) = (x + 1)[2(x - 1) - 1] = (x + 1)(2x - 2 - 1) = (x + 1)(2x - 3) \end{aligned}$$

### 11. $3x(4x + 1) - 6y(4x + 1)$

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους. Αρχικά ελέγχουμε αν υπάρχει κοινός παράγοντας. Ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών είναι το 3. Έχουμε επίσης κοινό παράγοντα την παρένθεση  $(4x + 1)$ . Συνολικά ο κοινός παράγοντας είναι ο  $3(4x + 1)$ . Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$3x(4x + 1) - 6y(4x + 1) = 3(4x + 1)(x - 2y)$$

### 12. $12κx^5 - 75κx^3$

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους. Ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών είναι το 3, ενώ από τις κοινές μεταβλητές κοινός παράγοντας είναι το  $κx$ . Συνολικά ο κοινός παράγοντας είναι ο  $3κx$ . Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$12κx^5 - 75κx^3 = 3κx(4x^4 - 25κ^2)$$

Ελέγχουμε αν η παράσταση μέσα στην παρένθεση παραγοντοποιείται περαιτέρω. Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο τετράγωνα, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τη διαφορά τετραγώνων:

$$3κx(4x^4 - 25κ^2) = 3κx [(2x^2)^2 - (5κ)^2] = 3κx (2x^2 + 5κ)(2x^2 - 5κ)$$

Συνολικά έχουμε:

$$12κx^5 - 75κx^3 = 3κx(4x^4 - 25κ^2) = 3κx [(2x^2)^2 - (5κ)^2] = 3κx (2x^2 + 5κ)(2x^2 - 5κ)$$

### 13. $-16κ^3 - 9κλ^2 + 24κ^2λ$

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους. Αρχικά ελέγχουμε αν έχουν κοινό παράγοντα. Οι συντελεστές δεν έχουν κοινό παράγοντα γιατί ο Μ.Κ.Δ. τους είναι το 1. Έχουν όμως κοινή μεταβλητή το  $κ$ , οπότε ο κοινός παράγοντας είναι η μικρότερη δύναμη του  $κ$  δηλαδή το  $κ$ . Οπότε η παράσταση αρχικά παραγοντοποιείται ως εξής:

$$-16κ^3 - 9κλ^2 + 24κ^2λ = -κ(16κ^2 + 9λ^2 - 24κλ)$$

Ελέγχουμε αν η παράσταση μέσα στην παρένθεση παραγοντοποιείται περαιτέρω. Παρατηρούμε ότι έχει δύο τετράγωνα, τους  $16\kappa^2$  και  $9\lambda^2$ , οπότε ελέγχουμε αν έχουμε ανάπτυγμα τετραγώνου. Έχουμε:

$$- \kappa(16\kappa^2 + 9\lambda^2 - 24\kappa\lambda) = - \kappa [(4\kappa)^2 - 2 \cdot 4\kappa \cdot 3\lambda + (3\lambda)^2] = - \kappa(4\kappa - 3\lambda)^2$$

Συνολικά έχουμε:

$$- 16\kappa^3 - 9\kappa\lambda^2 + 24\kappa^2\lambda = - \kappa(16\kappa^2 + 9\lambda^2 - 24\kappa\lambda) = - \kappa [(4\kappa)^2 - 2 \cdot 4\kappa \cdot 3\lambda + (3\lambda)^2] = - \kappa(4\kappa - 3\lambda)^2$$

#### 14. $16x^2 + 42y\omega - 49y^2 - 9\omega^2$

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Ελέγχουμε αν υπάρχουν τρία τετράγωνα, δύο ομόσημα και ένα ετερόσημο. Υπάρχουν: ομόσημα τα  $- 49y^2$  και  $- 9\omega^2$  και ετερόσημο το  $16x^2$ . Οπότε ομαδοποιούμε τους τέσσερις όρους σε δύο ομάδες των τριών όρων η μία, που αποτελείται από τα δύο ομόσημα τετράγωνα και τον τέταρτο όρο, και ενός όρου η άλλη, που αποτελείται από το ετερόσημο τετράγωνο. Έχουμε:

$$16x^2 + 42y\omega - 49y^2 - 9\omega^2 = 16x^2 - 49y^2 + 42y\omega - 9\omega^2$$

Επειδή τα δύο τετράγωνα είναι αρνητικά από τους τρεις τελευταίους όρους βγάζουμε το ‘ - ‘ κοινό παράγοντα και η παράσταση γίνεται:

$$16x^2 - 49y^2 + 42y\omega - 9\omega^2 = 16x^2 - (49y^2 - 42y\omega + 9\omega^2)$$

Ελέγχουμε αν η παρένθεση αποτελεί ανάπτυγμα τετραγώνου:

$$16x^2 - (49y^2 - 42y\omega + 9\omega^2) = 16x^2 - [(7y)^2 - 2 \cdot 7y \cdot 3\omega + (3\omega)^2] = (4x)^2 - (7y - 3\omega)^2$$

Καταλήξαμε σε διαφορά τετραγώνων, οπότε παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$(4x)^2 - (7y - 3\omega)^2 = [4x + (7y - 3\omega)] [4x - (7y - 3\omega)] = (4x + 7y - 3\omega)4x - 7y + 3\omega$$

Συνολικά έχουμε:

$$16x^2 + 42y\omega - 49y^2 - 9\omega^2 = 16x^2 - (49y^2 - 42y\omega + 9\omega^2) = 16x^2 - [(7y)^2 - 2 \cdot 7y \cdot 3\omega + (3\omega)^2] = (4x)^2 - (7y - 3\omega)^2 = [4x + (7y - 3\omega)] [4x - (7y - 3\omega)] = (4x + 7y - 3\omega)4x - 7y + 3\omega$$

#### 15. $4\alpha^2 - 9\beta^2$

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Παρατηρούμε όμως ότι και οι δύο όροι γράφονται σαν τετράγωνα, οπότε έχουμε διαφορά τετραγώνων:

$$4\alpha^2 - 9\beta^2 = (2\alpha)^2 - (3\beta)^2 = (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$$

**16.  $9x^2 + 16 + 24x$** 

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Ελέγχουμε αν υπάρχουν δύο τετράγωνα. Υπάρχουν τα:  $9x^2$  και 16, οπότε ελέγχουμε αν έχουμε ανάπτυγμα τετραγώνου:

$$9x^2 + 16 + 24x = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = (3x + 4)^2$$

**17.  $4x^2 - 2ax - 9y^2 - 3ay$** 

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Δεν έχουν επίσης τρία τετράγωνα για να ομαδοποιηθούν σε δύο ομάδες των τριών και ενός όρου αντίστοιχα. Οπότε θα ομαδοποιηθούν σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι για να ομαδοποιηθούν. Μπορούμε με δοκιμές να φτάσουμε στη κατάλληλη ομαδοποίηση. Παρατηρούμε όμως ότι υπάρχουν δύο ετερόσημα τετράγωνα, οπότε επιλέγουμε η μία ομάδα να αποτελείται από τα δύο αυτά τετράγωνα και η άλλη ομάδα από τους υπόλοιπους δύο όρους. Οπότε έχουμε:

$$4x^2 - 2ax - 9y^2 - 3ay = 4x^2 - 9y^2 - 2ax - 3ay$$

Η πρώτη ομάδα θα παραγοντοποιηθεί με διαφορά τετραγώνων, ενώ από τη δεύτερη ομάδα θα βγάλουμε κοινό παράγοντα το '- α' και η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 - 2ax - 3ay &= (2x)^2 - (3y)^2 - \alpha(2x + 3y) = \\ (2x + 3y)(2x - 3y) - \alpha(2x + 3y) &= (2x + 3y)(2x - 3y - \alpha) \end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2ax - 9y^2 - 3ay &= 4x^2 - 9y^2 - 2ax - 3ay = (2x)^2 - (3y)^2 - \alpha(2x + 3y) = \\ (2x + 3y)(2x - 3y) - \alpha(2x + 3y) &= (2x + 3y)(2x - 3y - \alpha) \end{aligned}$$

**18.  $18\beta^2 - 24\alpha\beta - 18 + 8\alpha^2$** 

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους, οι οποίοι έχουν κοινό παράγοντα το 2. Οπότε έχουμε:

$$18\beta^2 - 24\alpha\beta - 18 + 8\alpha^2 = 18\beta^2 - 24\alpha\beta + 8\alpha^2 - 18 = 2(9\beta^2 - 12\alpha\beta + 4\alpha^2 - 9)$$

Η παράσταση μέσα στην παρένθεση αποτελείται από τρία τετράγωνα, δύο θετικά (τα  $9\beta^2$  και το  $4\alpha^2$ ) και ένα αρνητικό (το '- 9'). Δημιουργούμε δύο ομάδες μία με τρεις όρους, τα δύο θετικά τετράγωνα και τον τέταρτο όρο, και μία μόνο με το αρνητικό τετράγωνο. Η πρώτη ομάδα ελέγχουμε αν αποτελεί ανάπτυγμα τετραγώνου.

$$2(9\beta^2 - 12\alpha\beta + 4\alpha^2 - 9) = 2[(3\beta)^2 - 2 \cdot 3\beta \cdot 2\alpha + (2\alpha)^2 - 9] = 2[(3\beta - 2\alpha)^2 - 9]$$

Γράφουμε και το αρνητικό τετράγωνο και στη συνέχεια έχουμε διαφορά τετραγώνων:

$$2[(3\beta - 2\alpha)^2 - 9] = 2[(3\beta - 2\alpha)^2 - 3^2] = 2(3\beta - 2\alpha + 3)(3\beta - 2\alpha - 3)$$

Συνολικά έχουμε:

$$18\beta^2 - 24\alpha\beta - 18 + 8\alpha^2 = 18\beta^2 - 24\alpha\beta + 8\alpha^2 - 18 = 2(9\beta^2 - 12\alpha\beta + 4\alpha^2 - 9) = 2[(3\beta)^2 - 2 \cdot 3\beta \cdot 2\alpha + (2\alpha)^2 - 9] = 2[(3\beta - 2\alpha)^2 - 3^2] = 2(3\beta - 2\alpha + 3)(3\beta - 2\alpha - 3)$$

### 19. $x^2 + xy - 7x - 4y + 12$

Η παράσταση αποτελείται από πέντε όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Πρέπει να ομαδοποιηθούν σε δύο ομάδες των τριών και δύο όρων αντίστοιχα. Η ομάδα των τριών όρων θα είναι είτε ανάπτυγμα τετραγώνου είτε τριώνυμο. Για να είναι ανάπτυγμα τετραγώνου πρέπει να υπάρχουν δύο τετράγωνα στη παράσταση. Επειδή δεν υπάρχουν προσανατολιζόμαστε στη ύπαρξη τριωνύμου της μορφής:  $x^2 + kx + \lambda$ . Παρατηρούμε ότι από τους πέντε όρους οι τρεις που δημιουργούν τριώνυμο είναι οι:  $x^2 - 7x + 12$ . Οπότε η παράσταση ομαδοποιείται ως εξής:

$$x^2 + xy - 7x - 4y + 12 = (x^2 - 7x + 12) + (xy - 4y)$$

Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  τέτοιους ώστε:  $\alpha + \beta = -7$  και  $\alpha \cdot \beta = 12$ . Με δοκιμές βρίσκουμε ότι:  $\alpha = -3$  και  $\beta = -4$ .

Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε τους δύο όρους βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $y$ .

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}(x^2 - 7x + 12) + (xy - 4y) &= (x^2 - 3x - 4x + 12) + y(x - 4) = [x(x - 3) - 4(x - 3)] + y(x - 4) \\ &= (x - 3)(x - 4) + y(x - 4) = (x - 4)[(x - 3) + y] = (x - 4)(x - 3 + y)\end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned}x^2 + xy - 7x - 4y + 12 &= (x^2 - 7x + 12) + (xy - 4y) = (x^2 - 3x - 4x + 12) + y(x - 4) = \\ &= [x(x - 3) - 4(x - 3)] + y(x - 4) = (x - 3)(x - 4) + y(x - 4) = (x - 4)[(x - 3) + y] = \\ &= (x - 4)(x - 3 + y)\end{aligned}$$

### 20. $-x^2 - 2x + 15$

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Επίσης δεν υπάρχουν δύο τετράγωνα προκειμένου να είναι ανάπτυγμα τετραγώνου. Παρατηρούμε όμως ότι έχει τη μορφή τριωνύμου, μόνο που το  $x^2$  έχει πρόσημο '-', οπότε για να πάρει την

κανονική του μορφή πρέπει να βγάλουμε αρχικά το ‘-’ κοινό παράγοντα. Συνεπώς η παράσταση γίνεται:

$$-x^2 - 2x + 15 = -(x^2 + 2x - 15).$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο που είναι μέσα στην παρένθεση πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς  $\alpha, \beta$  τέτοιους ώστε:  $\alpha + \beta = 2$  και  $\alpha \cdot \beta = -15$ . Με δοκιμές βρίσκουμε ότι είναι  $\alpha = 5$  και  $\beta = -3$ . Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$-(x^2 + 2x - 15) = -(x^2 + 5x - 3x - 15) = -[x(x + 5) - 3(x + 5)] = -(x + 5)(x - 3)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x + 15 &= -(x^2 + 2x - 15) = -(x^2 + 5x - 3x - 15) = -[x(x + 5) - 3(x + 5)] = \\ &= -(x + 5)(x - 3) \end{aligned}$$

## 21. $10y^2 + 7xy - 3x^2$

Η παράσταση έχει τρεις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Δεν υπάρχουν δύο τετράγωνα, οπότε δεν είναι ανάπτυγμα τετραγώνου. Επίσης δεν έχει τη μορφή τριωνύμου. Οπότε μένει μόνο η μέθοδος της διάσπασης. Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές έχουν την εξής σχέση:  $10 = 7 + 3$ , οπότε μπορούμε να διασπάσουμε το  $10y^2$  σε  $7y^2 + 3y^2$  και η παράσταση γίνεται:

$$10y^2 + 7xy - 3x^2 = 7y^2 + 3y^2 + 7xy - 3x^2 = (7y^2 + 7xy) + (3y^2 - 3x^2)$$

Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε την πρώτη ομάδα βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $7x$ . Προκειμένου να παραγοντοποιήσουμε τη δεύτερη ομάδα βγάζουμε αρχικά κοινό παράγοντα το 3 και στη συνέχεια προκύπτει διαφορά τετραγώνων. Οπότε έχουμε:

$$(7y^2 + 7xy) + (3y^2 - 3x^2) = 7y(y + x) + 3(y^2 - x^2) = 7y(y + x) + 3(y - x)(y + x)$$

Στην τελευταία παράσταση οι δύο όροι έχουν κοινό παράγοντα την παρένθεση  $(y + x)$ , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 7y(y + x) + 3(y - x)(y + x) &= (y + x)[7y + 3(y - x)] = (y + x)(7y + 3y - 3x) = \\ &= (y + x)(10y - 3x) \end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} 10y^2 + 7xy - 3x^2 &= 7y^2 + 3y^2 + 7xy - 3x^2 = (7y^2 + 7xy) + (3y^2 - 3x^2) = 7y(y + x) + 3(y^2 - x^2) \\ &= 7y(y + x) + 3(y - x)(y + x) = (y + x)[7y + 3(y - x)] = (y + x)(7y + 3y - 3x) = \\ &= (y + x)(10y - 3x) \end{aligned}$$

**22.  $6\kappa^2\lambda^3(2\mu + 3)^3 - 3\kappa^3\lambda^5(2\mu + 3)^2$** 

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους. Αρχικά ελέγχουμε αν υπάρχει κοινός παράγοντας. Ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών είναι το 3. Οι δύο όροι έχουν κοινές μεταβλητές τις  $\kappa$  και  $\lambda$ , ενώ έχουν και κοινή την παρένθεση  $(2\mu + 3)$ . Ο κοινός παράγοντας που αντιστοιχεί στο  $\kappa$  είναι η μικρότερη δύναμη, δηλαδή το  $\kappa^2$ . Ο κοινός παράγοντας που αντιστοιχεί στο  $\lambda$  είναι η μικρότερη δύναμη, δηλαδή το  $\lambda^3$ . Ο κοινός παράγοντας που αντιστοιχεί στην παρένθεση είναι η μικρότερη δύναμη, δηλαδή η  $(2\mu + 3)^2$ . Οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} 6\kappa^2\lambda^3(2\mu + 3)^3 - 3\kappa^3\lambda^5(2\mu + 3)^2 &= 3\kappa^2\lambda^3(2\mu + 3)^2[2(2\mu + 3) - \kappa\lambda^2] = \\ &= 3\kappa^2\lambda^3(2\mu + 3)^2(4\mu + 6 - \kappa\lambda^2) \end{aligned}$$

**23.  $(5\alpha - 2\beta)^2 - (3\alpha + 4\beta)^2$** 

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους οι οποίοι είναι διαφορά τετραγώνων. Οπότε η παραγοντοποίηση έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} (5\alpha - 2\beta)^2 - (3\alpha + 4\beta)^2 &= [(5\alpha - 2\beta) + (3\alpha + 4\beta)] \cdot [(5\alpha - 2\beta) - (3\alpha + 4\beta)] = \\ &= (5\alpha - 2\beta + 3\alpha + 4\beta)(5\alpha - 2\beta - 3\alpha - 4\beta) = (8\alpha + 2\beta)(2\alpha - 6\beta) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη από τις τελευταίες παρενθέσεις έχει κοινό παράγοντα το 2, όπως και η δεύτερη παρένθεση. Συνεπώς η παραγοντοποίηση συνεχίζεται ως εξής:

$$(8\alpha + 2\beta)(2\alpha - 6\beta) = 2(4\alpha + \beta) \cdot 2(\alpha - 3\beta) = 4(4\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} (5\alpha - 2\beta)^2 - (3\alpha + 4\beta)^2 &= [(5\alpha - 2\beta) + (3\alpha + 4\beta)] \cdot [(5\alpha - 2\beta) - (3\alpha + 4\beta)] = \\ &= (5\alpha - 2\beta + 3\alpha + 4\beta)(5\alpha - 2\beta - 3\alpha - 4\beta) = (8\alpha + 2\beta)(2\alpha - 6\beta) = 4(4\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta) \end{aligned}$$

**24.  $6ax + 9\beta x - 4ay - 6\beta y$** 

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν τρία τετράγωνα, οπότε δεν μπορούμε να έχουμε ομαδοποίηση σε δύο ομάδες των τριών και ενός όρου. Συνεπώς τους ομαδοποιούμε σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία. Ελέγχουμε αν πάρουμε τους δύο πρώτους όρους σαν μία ομάδα και τους δύο τελευταίους ως δεύτερη ομάδα, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε. Έχουμε:

$$6ax + 9\beta x - 4ay - 6\beta y = (6ax + 9\beta x) + (-4ay - 6\beta y)$$

Από την πρώτη ομάδα βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $3x$  και από τη δεύτερη ομάδα βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $-2y$ , οπότε έχουμε:

$$(6\alpha x + 9\beta x) + (-4\alpha y - 6\beta y) = 3x(2\alpha + 3\beta) - 2y(2\alpha + 3\beta) = (2\alpha + 3\beta)(3x - 2y)$$

Συνολικά έχουμε:

$$6\alpha x + 9\beta x - 4\alpha y - 6\beta y = 3x(2\alpha + 3\beta) - 2y(2\alpha + 3\beta) = (2\alpha + 3\beta)(3x - 2y)$$

## 25. $(2y - 1)(3x + 2) - (x + 2)(1 - 2y)$

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους, ο καθένας από τους οποίους αποτελείται από δύο παρενθέσεις. Παρατηρούμε ότι η παρένθεση  $(1 - 2y)$  του δεύτερου όρου έχει αντίθετα πρόσημα από την παρένθεση  $(2y - 1)$  του πρώτου όρου. Οπότε βγάζουμε από την παρένθεση  $(1 - 2y)$  ένα μείον κοινό παράγοντα και η παράσταση γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}(2y - 1)(3x + 2) - (x + 2)(1 - 2y) &= (2y - 1)(3x + 2) - (x + 2)[- (2y - 1)] = \\ &= (2y - 1)(3x + 2) + (x + 2)(2y - 1)\end{aligned}$$

Οπότε οι δύο όροι έχουν κοινό παράγοντα την παρένθεση  $(2y - 1)$  και η παράσταση γίνεται:

$$(2y - 1)(3x + 2) + (x + 2)(2y - 1) = (2y - 1)(3x + 2 + x + 2) = (2y - 1)(4x + 4)$$

Η τελευταία παρένθεση έχει κοινό παράγοντα το 4 οπότε:

$$(2y - 1)(4x + 4) = 4(2y - 1)(x + 1)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned}(2y - 1)(3x + 2) - (x + 2)(1 - 2y) &= (2y - 1)(3x + 2) + (x + 2)(2y - 1) = \\ (2y - 1)(3x + 2 + x + 2) &= (2y - 1)(4x + 4) = 4(2y - 1)(x + 1)\end{aligned}$$

## 26. $16x^4 - 81y^4$

Η παράσταση αποτελείται από δύο όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Παρατηρούμε όμως ότι, καθένας από τους δύο όρους γράφεται σαν τετράγωνο οπότε έχουμε διαφορά τετραγώνων και η παράσταση γίνεται:

$$16x^4 - 81y^4 = (4x^2)^2 - (9y^2)^2 = (4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2)$$

Η δεύτερη από τις τελευταίες παρενθέσεις είναι πάλι διαφορά τετραγώνων, οπότε έχουμε:

$$(4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2) = (4x^2 + 9y^2)[(2x)^2 - (3y)^2] = (4x^2 + 9y^2)(2x + 3y)(2x - 3y)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned}16x^4 - 81y^4 &= (4x^2)^2 - (9y^2)^2 = (4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2) = (4x^2 + 9y^2)[(2x)^2 - (3y)^2] = \\ &= (4x^2 + 9y^2)(2x + 3y)(2x - 3y)\end{aligned}$$

**27.  $25\alpha\beta^2 + 36\alpha\gamma^2 - 60\alpha\beta\gamma$** 

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους οι οποίοι έχουν κοινό παράγοντα το  $\alpha$ , οπότε η παράσταση γίνεται:

$$25\alpha\beta^2 + 36\alpha\gamma^2 - 60\alpha\beta\gamma = \alpha(25\beta^2 - 60\beta\gamma + 36\gamma^2)$$

Οι τρεις όροι μέσα στην παρένθεση περιλαμβάνουν δύο τετράγωνα, οπότε ελέγχουμε αν πρόκειται για ανάπτυγμα τετραγώνου. Έχουμε:

$$\alpha(25\beta^2 - 60\beta\gamma + 36\gamma^2) = \alpha[(5\beta)^2 - 2 \cdot 5\beta \cdot 6\gamma + (6\gamma)^2] = \alpha(5\beta - 6\gamma)^2$$

Συνολικά έχουμε:

$$25\alpha\beta^2 + 36\alpha\gamma^2 - 60\alpha\beta\gamma = \alpha(25\beta^2 - 60\beta\gamma + 36\gamma^2) = \alpha[(5\beta)^2 - 2 \cdot 5\beta \cdot 6\gamma + (6\gamma)^2] = \alpha(5\beta - 6\gamma)^2$$

**28.  $ax^2 - kx - ay^2 + ky$** 

Η παράσταση αποτελείται από τέσσερις όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Επίσης δεν υπάρχουν τρία τετράγωνα για να ομαδοποιήσουμε σε δύο ομάδες των τριών και ενός όρου, οπότε ομαδοποιούμε σε δύο ομάδες των δύο όρων η καθεμία. Ομαδοποιούμε παίρνοντας τους όμοιους όρους μαζί και έχουμε:

$$ax^2 - kx - ay^2 + ky = (ax^2 - ay^2) + (-kx + ky)$$

Κάθε ομάδα έχει κοινό παράγοντα, η μεν πρώτη το  $a$  η δε δεύτερη το  $-k$ . Κατά συνέπεια η παράσταση γίνεται:

$$(ax^2 - ay^2) + (-kx + ky) = a(x^2 - y^2) - k(x - y)$$

Η πρώτη παρένθεση είναι διαφορά τετραγώνων, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} a(x^2 - y^2) - k(x - y) &= a(x + y)(x - y) - k(x - y) = (x - y)[a(x + y) - k] = \\ &= (x - y)(ax + ay - k) \end{aligned}$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} ax^2 - kx - ay^2 + ky &= ax^2 - ay^2 - kx + ky = a(x^2 - y^2) - k(x - y) = a(x + y)(x - y) - k(x - y) \\ &= (x - y)[a(x + y) - k] = (x - y)(ax + ay - k) \end{aligned}$$

**29.  $4x^2 - 25a^2 + 9y^2 - 16\beta^2 - 12xy - 40a\beta$** 

Η παράσταση έχει έξι όρους. Υπάρχουν τέσσερα τετράγωνα, δύο θετικά (τα  $4x^2$  και  $9y^2$ ) και δύο αρνητικά (τα  $-25a^2$  και  $-16\beta^2$ ). Οπότε μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους έξι όρους σε δύο ομάδες των τριών όρων η καθεμία, συμπληρώνοντας τη κάθε δυάδα με έναν από τους άλλους δύο όρους ώστε να δημιουργηθούν δύο αναπτύγματα τετραγώνων. Έχουμε:

$$4x^2 - 25a^2 + 9y^2 - 16\beta^2 - 12xy - 40a\beta = (4x^2 + 9y^2 - 12xy) + (-25a^2 - 16\beta^2 - 40a\beta)$$

Βγάζουμε το μείον κοινό παράγοντα από τη δεύτερη παρένθεση και ελέγχουμε αν καθεμία παρένθεση αποτελεί ανάπτυγμα τετραγώνου. Έχουμε:

$$(4x^2 + 9y^2 - 12xy) + (-25\alpha^2 - 16\beta^2 - 40\alpha\beta) = (4x^2 + 9y^2 - 12xy) - (25\alpha^2 + 16\beta^2 + 40\alpha\beta) =$$

$$[(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2] - [(5\alpha)^2 + 2 \cdot 5\alpha \cdot 4\beta + (4\beta)^2] = (2x - 3y)^2 - (5\alpha + 4\beta)^2$$

Η τελευταία παράσταση είναι διαφορά τετραγώνων οπότε έχουμε ότι:

$$(2x - 3y)^2 - (5\alpha + 4\beta)^2 = [(2x - 3y) + (5\alpha + 4\beta)] [(2x - 3y) - (5\alpha + 4\beta)] =$$

$$= (2x - 3y + 5\alpha + 4\beta)(2x - 3y - 5\alpha - 4\beta)$$

Συνολικά έχουμε:

$$4x^2 - 25\alpha^2 + 9y^2 - 16\beta^2 - 12xy - 40\alpha\beta = (4x^2 + 9y^2 - 12xy) + (-25\alpha^2 - 16\beta^2 - 40\alpha\beta) =$$

$$= (4x^2 + 9y^2 - 12xy) - (25\alpha^2 + 16\beta^2 + 40\alpha\beta) =$$

$$= [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2] - [(5\alpha)^2 + 2 \cdot 5\alpha \cdot 4\beta + (4\beta)^2] = (2x - 3y)^2 - (5\alpha + 4\beta)^2 =$$

$$= [(2x - 3y) + (5\alpha + 4\beta)] [(2x - 3y) - (5\alpha + 4\beta)] =$$

$$= (2x - 3y + 5\alpha + 4\beta)(2x - 3y - 5\alpha - 4\beta)$$

### 30. $4\alpha^2 - 4\alpha x + 4\alpha - 2x + 1$

Η παράσταση αποτελείται από πέντε όρους, οι οποίοι δεν έχουν κοινό παράγοντα. Πρέπει να ομαδοποιήσουμε τους πέντε όρους σε δύο ομάδες των τριών και δύο όρων αντίστοιχα. Η ομάδα των τριών όρων θα είναι είτε ανάπτυγμα τετραγώνου είτε τριώνυμο. Η παράσταση περιέχει δύο τετράγωνα, τα  $4\alpha^2$  και  $1$ , οπότε ελέγχουμε αν μαζί με το  $4\alpha$  αποτελούν ανάπτυγμα τετραγώνου και η παράσταση ομαδοποιείται ως εξής:

$$4\alpha^2 - 4\alpha x + 4\alpha - 2x + 1 = (4\alpha^2 + 4\alpha + 1) + (-4\alpha x - 2x) = [(2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 1 + 1^2] - 2x(2\alpha + 1)$$

$$= (2\alpha + 1)^2 - 2x(2\alpha + 1) = (2\alpha + 1)(2\alpha + 1 - 2x)$$

### 31. $-3x^2 + 15x - 18$

Η παράσταση αποτελείται από τρεις όρους, οι οποίοι έχουν κοινό παράγοντα το  $-3$ . Οπότε η παράσταση γίνεται ως εξής:

$$-3x^2 + 15x - 18 = -3(x^2 - 5x + 6)$$

Η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι τριώνυμο, οπότε για να το παραγοντοποιήσουμε πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  τέτοιους ώστε;  $\alpha + \beta = -5$  και  $\alpha\beta = 6$ . Με δοκιμές βρίσκουμε ότι είναι  $\alpha = -2$  και  $\beta = -3$ . Οπότε η παράσταση γίνεται:

$$-3(x^2 - 5x + 6) = -3(x^2 - 2x - 3x + 6) = -3[x(x - 2) - 3(x - 2)] = -3(x - 2)(x - 3)$$

Συνολικά έχουμε:

$$\begin{aligned} -3x^2 + 15x - 18 &= -3(x^2 - 5x + 6) = -3(x^2 - 2x - 3x + 6) = -3[x(x-2) - 3(x-2)] = \\ &= -3(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

32.