

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΓΕΛ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

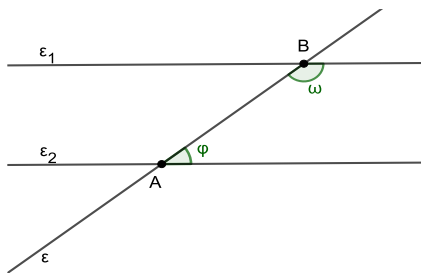
ΑΣΚΗΣΗ1

- Ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του ορθές.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.
- Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

. ΑΠ 1 ΛΣΣΣΛ

ΑΣΚΗΣΗ2

- Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.
- Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες ϕ και ω είναι εντός εναλλάξ των ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε .



- Στο ίδιο επίπεδο έχουμε μια ευθεία ε και έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ε . Αν ισχύει $\delta > \rho$, τότε η ε έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.
- Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετη στην ευθεία.
- Ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο αν έχει μόνο αμβλείες γωνίες.

. ΑΠ2 ΣΛΛΣΛ

ΑΣΚΗΣΗ3

- Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
- Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο και οι τρεις γωνίες του είναι αμβλείες.
- Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο καθεμία από τις τρεις γωνίες του είναι ίση με 60° .
- Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

. ΑΠ3 ΣΛΣΣΣ

ΑΣΚΗΣΗ4

- i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.
- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.
- iii. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
- iv. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- v. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

ΑΠ4 ΣΣΣΛΣ

ΑΣΚΗΣΗ5

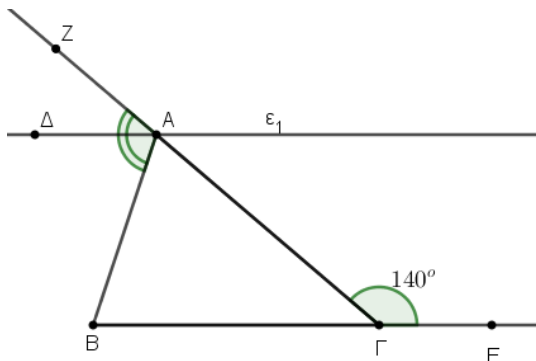
- i. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2n-4$ ορθές.
- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές
- iv. Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- v. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

ΑΠ5 ΣΣΣΛ

ΑΣΚΗΣΗ6

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ϵ_1 παράλληλη προς τη ΒΓ που διέρχεται από το Α. Αν $\widehat{A\Gamma E} = 140^\circ$ και $\widehat{B\hat{A}Z} = 110^\circ$, τότε:

- α) i. Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ
- ii. Να υπολογίσετε τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ.
- β) Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του.
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B\hat{A}D}$.



ΛΥΣΗ

α) i. Οι γωνίες **AΓB** και **AΓE** είναι εφεξής και **παραπληρωματικές**.

Άρα, $\hat{A}\Gamma B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Οι γωνίες **BÂΓ** και **BÂZ** είναι εφεξής και **παραπληρωματικές**.

Άρα, $\hat{B}\hat{A}\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

ii. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου **ABΓ** είναι 180° , οπότε:

$\hat{B}\hat{A}\Gamma + \hat{A}\hat{B}\Gamma + \hat{A}\hat{\Gamma}B = 180^\circ$ ή $70^\circ + \hat{A}\hat{B}\Gamma + 40^\circ = 180^\circ$.

Άρα, $\hat{A}\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε: $\hat{B}\hat{A}\Gamma = 70^\circ$, $\hat{A}\hat{B}\Gamma = 70^\circ$.

Επομένως, το τρίγωνο **ABΓ** είναι **ισοσκελές** με **ίσες πλευρές** τις ΑΓ και ΒΓ, αφού βρίσκονται **απέναντι** από τις **ίσες γωνίες** $\hat{A}\hat{B}\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\Gamma$ αντίστοιχα.

γ) Οι γωνίες **BÂΔ** και **AΒΓ** είναι **εντός εναλλάξ** των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ, επομένως **είναι ίσες**, δηλαδή $\hat{B}\hat{A}\Delta = 70^\circ$.

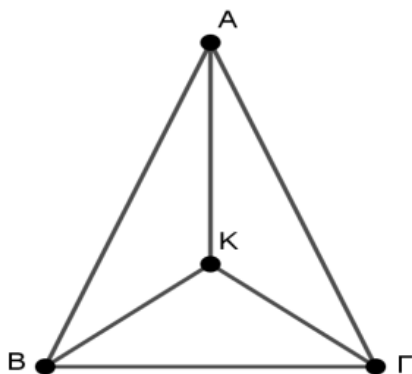
ΑΣΚΗΣΗ7

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τέτοιο ώστε $KB=KG$. Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες ΚΒΓ και ΚΓΒ είναι ίσες.

β) τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΓΑΚ είναι ίσα.

γ) η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.



ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε $KB = KG$, οπότε το τρίγωνο **KBΓ** είναι **ισοσκελές** με βάση τη ΒΓ. Επομένως οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες. Δηλαδή η γωνία **ΚΒΓ** είναι **ίση** με τη γωνία **ΚΓΒ**.

β) Τα τρίγωνα **ΒΑΚ** και **ΓΑΚ** έχουν:

- την ΑΚ **κοινή** πλευρά
- $AB = AG$ από την **υπόθεση**
- $KB = KG$ από την **υπόθεση**

οπότε τα **τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ** είναι **ίσα** (ΠΠΠ).

γ) Επειδή λόγω του (β) ερωτήματος τα τρίγωνα **ΒΑΚ** και **ΓΑΚ** είναι **ίσα**, θα είναι **ίσες** και οι γωνίες **ΚΑΒ** και **ΚΑΓ**, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΚΒ και ΚΓ, οπότε η **ΑΚ** είναι **διχοτόμος** της γωνίας ΒΑΓ

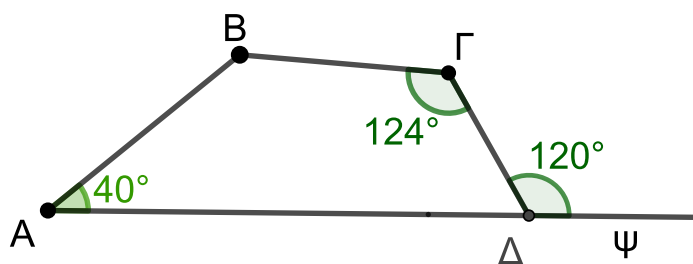
ΑΣΚΗΣΗ8

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος δίνεται η εξωτερική γωνία $\Gamma\Delta\psi = 120^\circ$ και οι γωνίες $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 124^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

γ) Είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ παράλληλα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική με την εξωτερική της $\Gamma\Delta\psi$. Επομένως, $\Delta = 180^\circ - \Gamma\Delta\psi = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου, σε μοίρες, είναι ίσο με $(2 \cdot n - 4) \cdot 90^\circ$. Στο σχήμα μας είναι $n = 4$. Οπότε το άθροισμα των γωνιών του ΑΒΓΔ είναι ίσο με $(2 \cdot 4 - 4) \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Επομένως:

$$B = 360^\circ - (A + \Gamma + \Delta) = 360^\circ - (40^\circ + 124^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 224^\circ = 136^\circ.$$

γ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ δεν είναι παράλληλα, γιατί οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, τη Β και την Α, με άθροισμα $136^\circ + 40^\circ = 176^\circ$ μικρότερο από 180° . Επομένως, τέμνονται.