

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΛ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

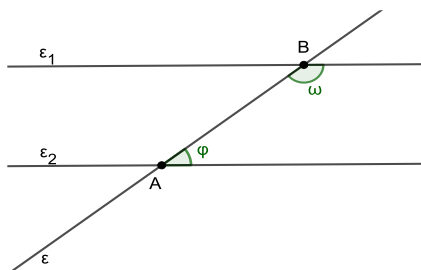
ΑΣΚΗΣΗ1

- i. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- iii. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.
- iv. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου είναι $2n-4$ ορθές.
- v. Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Α/Π1 ΛΣΣΣΣ

ΑΣΚΗΣΗ2

- i. Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.
- ii. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες ϕ και ω είναι εντός εναλλάξ των ϵ_1 και ϵ_2 που τέμνονται από την ϵ .



- iii. Στο ίδιο επίπεδο έχουμε μια ευθεία ϵ και έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ . Ονομάζουμε δ την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ϵ . Αν ισχύει $\delta > \rho$, τότε η ϵ έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.
- iv. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετη στην ευθεία.
- v. Ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο αν έχει μόνο αμβλείες γωνίες.

. Α/Π2 ΣΛΣΛ

ΑΣΚΗΣΗ3

- i. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
- ii. Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο και οι τρεις γωνίες του είναι αμβλείες.
- iii. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο καθεμία από τις τρεις γωνίες του είναι ίση με 60° .
- iv. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- v. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ4

- i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.
- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.
- iii. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
- iv. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
- v. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

ΑΠ4 ΣΣΣΛΣ

ΑΣΚΗΣΗ5

- i. Ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο, όταν έχει όλες τις γωνίες του ορθές.
- ii. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- iv. Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.
- v. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

. ΑΠ 5 ΛΣΣΣΛ

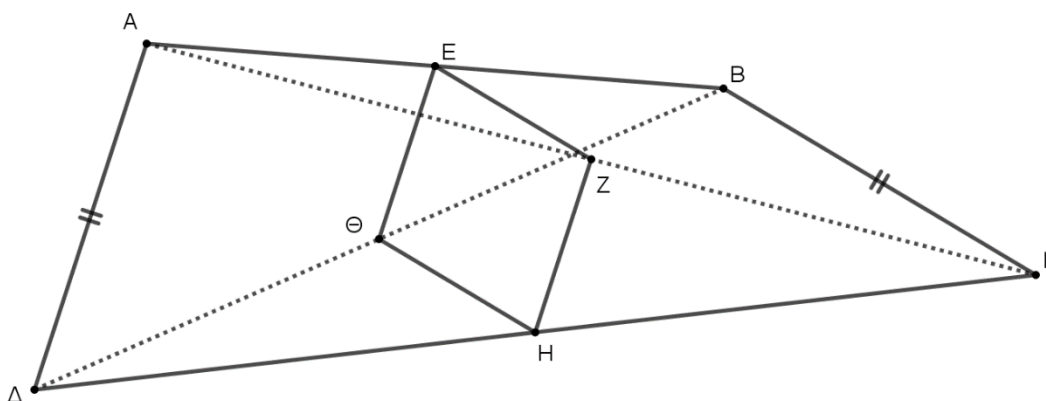
ΑΣΚΗΣΗ6

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος ισχύει ότι $AD = BG$ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

α. $EZ // H\Theta$

β. Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ABΓ, τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, άρα $EZ = // \frac{B\Gamma}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΒΓΔ, τα σημεία Θ και Η είναι τα μέσα των πλευρών ΒΔ και ΓΔ αντίστοιχα, άρα $H\Theta = // \frac{B\Gamma}{2}$ (2).

Από (1) και (2) $EZ // H\Theta$.

β) Από το ερώτημα (α) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει δύο απέναντι πλευρές του (ΕΖ και ΘΗ) παράλληλες και ίσες.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ, τα σημεία Ζ και Η είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα,

άρα $ZH = // \frac{A\Delta}{2}$ αλλά από υπόθεση έχουμε $B\Gamma = A\Delta$, οπότε $ZH = // \frac{B\Gamma}{2}$ (3). Από (1) και (3) είναι $EZ =$

ZH , άρα το παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος αφού έχει 2 διαδοχικές πλευρές του ίσες.

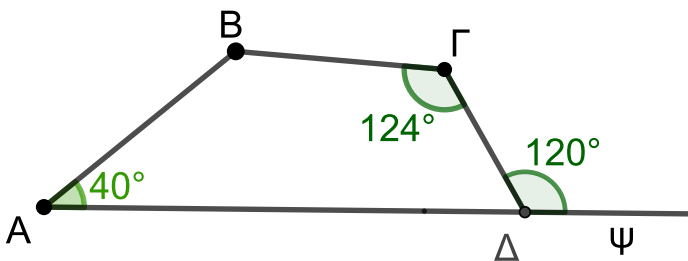
ΑΣΚΗΣΗ 7

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος δίνεται η εξωτερική γωνία $\Gamma\Delta\psi = 120^\circ$ και οι γωνίες $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 124^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

γ) Είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ παράλληλα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ΛΥΣΗ

α) Η γωνία Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική με την εξωτερική της $\Gamma\Delta\psi$. Επομένως, $\Delta = 180^\circ - \Gamma\Delta\psi = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου, σε μοίρες, είναι ίσο με

$(2 \cdot n - 4) \cdot 90^\circ$. Στο σχήμα μας είναι $n = 4$. Οπότε το άθροισμα των γωνιών του ΑΒΓΔ είναι ίσο με $(2 \cdot 4 - 4) \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Επομένως:

$$B = 360^\circ - (A + \Gamma + \Delta) = 360^\circ - (40^\circ + 124^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 224^\circ = 136^\circ.$$

γ) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ δεν είναι παράλληλα, γιατί οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες

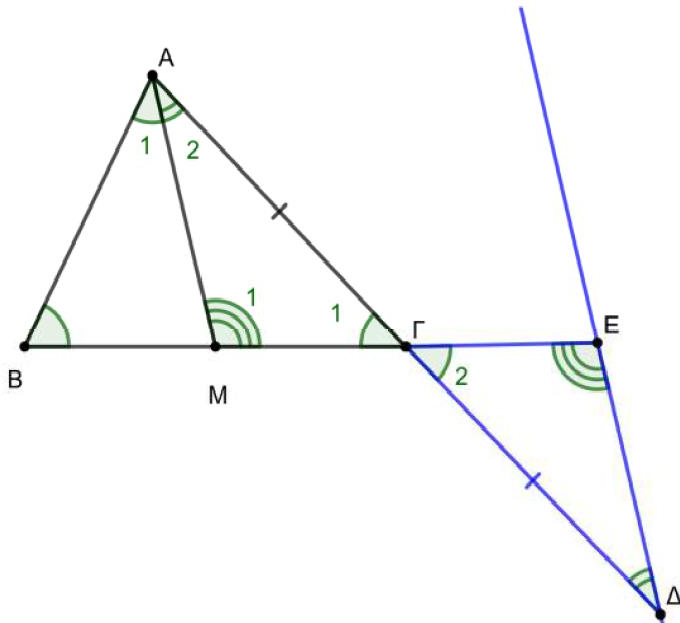
ΑΣΚΗΣΗ8

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΓ = ΓΕ.

β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $\widehat{B} + \widehat{BAM} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$.



ΛΥΣΗ

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα **ΑΜΓ** και **ΔΕΓ**. Αυτά έχουν:

- $ΑΓ = ΓΔ$ από υπόθεση,
- $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ ως κατακορυφήν,
- $\widehat{A_2} = \widehat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ.

Είναι ίσα, επειδή έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες αντίστοιχα ίσες (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΓΠ).

Έτσι οι πλευρές **ΜΓ = ΓΕ** γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{A_2}$ και $\widehat{\Delta}$.

β) Αφού $ΑΓ = ΓΔ$ και $ΜΓ = ΓΕ$, το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι **παραλληλόγραμμο** επειδή οι **διαγώνιοι του διχοτομούνται** στο Γ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΜΒ, η εξωτερική γωνία $\widehat{M_1} = \widehat{B} + \widehat{BAM}$ (2)

όμως $\widehat{M_1} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$ (3) επειδή είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΜ και ΔΕ που τέμνονται από την ΜΕ.

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma\hat{E}\Delta} = \widehat{B} + \widehat{BAM}$